# 现代科技管理讲义

## 数量方法

主　编　　吴云从

江苏省科学技术干部局

一九八三年 二月

# 目 录

第四章　经营管理决策



第五章　存 贮 概 论



第六章　抽 样 检 验

# 第一章　线性规划

线性规划是运筹学中最成熟的一个分支，是系统工程的重要方法。由于线性模型易于分析求解，所以线性规划在生产安排，资源分配，物资运输以及社会经济系统的其他许多问题上得到了广泛的应用。

早在本世纪三十年代末四十年代初，康托洛维奇和希奇柯克等人在研究生产组织与物资运输等问题时，就应用了线性规划的方法。1947年，美国数学家旦泽(G·Dantzig)等人进一步从理论上完善了线性规划，提出了线性规划问题的一般解法——单纯形法。五十年代以来，随着电子计算机的迅速发展，计算技术日益提高，线性规划的应用在广度与深度上也不断前进。

## §1·1　概　论

一、线性规划的数学模型

在提出线性规划的一般数学模型之前，我们先看看下面两个问题。

例1·1·1 设用$A_1$，$A_2$，……，$A_m$种原料，可以生产$B_1$，……，$B_n$种产品。持有原料单位数、单位产品利润数及每单位产品所需的各种原料数列表如下：

（表1·1·1）

| 原料＼产品 | $B_1$ | $B_2$ | …… | $B_n$ | 现有原料 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $C_{11}$ | $C_{12}$ | …… | $C_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $C_{21}$ | $C_{22}$ | …… | $C_{2n}$ | $a_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | …… | ⋮ | ⋮ |
| $A_m$ | $C_{m1}$ | $C_{m2}$ | | $C_{mn}$ | $a_m$ |
| 利　润 | $b_1$ | $b_2$ | …… | $b_n$ | |

表中$C_{ij}$——生产单位$B_j$所需原料$A_i$的数量，$i=1$，……，$m$；$j=1$，2……，$n$。

在原料如表1·1·1那样限制下，如何组织生产才能使总利润最大？

解：设产品$B_j$生产$x_j$件，$j=1$，……，$n$，于是$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$当满足约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_j \leqslant a_i,\ (i=1\cdots\cdots, m)$$

$$x_j \geqslant 0,\ (j=1, \cdots\cdots n)$$

并使目标函数(总利润)：

$$S = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$$

最大。

例1·1·2 某工厂用机床$A_1$，$A_2$，……，$A_m$加工$B_1$，$B_2$，……，$B_n$种零件，在一个生产周期内，各机床的可利用工时，工厂必须完成的各零件数，各机床加工每个零件的时间(工时/件)和加工每个零件的成本(元/件)如下表所示，问在这个生产周期内如何安排机床的生产任务，才能既完成加工任务，又使总的加工成本最低。

（表1·1·2）

| 机床 \ 零件 | $B_1$ | $B_2$ | ……………………… | $B_n$ | 机床工作时限 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $C_{11}$ | $C_{12}$ | ……………………… | $C_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $C_{21}$ | $C_{22}$ | ……………………… | $C_{2n}$ | $a_2$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ……………………… | | ⋮ |
| $A_m$ | $C_{m1}$ | $C_{m2}$ | ……………………… | $C_{mn}$ | $a_m$ |
| 需要加工零件数 | $b_1$ | $b_2$ | ……………………… | $b_n$ | |

$C_{ij}$表示机床$A_i$加工1件$B_j$所需要的时间（工时/件）。

（表1·1·3）加工每个零件的成本(元)表

| 零件 \ 机床 | $B_1$ | $B_2$ | …………………… | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $d_{11}$ | $d_{12}$ | …………………… | $d_{1n}$ |
| $A_2$ | $d_{21}$ | $d_{22}$ | …………………… | $d_{2n}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | …………………… | ⋮ |
| $A_m$ | $d_{m1}$ | $d_{m2}$ | …………………… | $d_{mn}$ |

**解**：设$x_{ij}$为机床$A_i$加工零件$B_j$的件数，

($i=1$，2，……，$m$；$j=1$，2，……，$n$)，则我们的问题便是求一组$x_{ij}$，使之满足约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \leq a_i，(i=1，2，……，m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j，(j=1，2，……，n)$$

$x_{ij} \geq 0$　（实际上$x_{ij}$应是0或正整数）

$(j=1, 2, \cdots\cdots, n; i=1, 2, \cdots\cdots, m)$,

并使目标函数(加工总成本)：

$$S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}d_{ij}x_{ij}$$

最小。

从上述两个例子可以看到，这里的约束条件是用线性不等式或等式表示的，而问题的目标函数也是线性的。具有这样的数学模式的问题，人们称之为线性规划问题。

线性规划问题数学模型的一般形式可描述为：

求一组变量$x_j(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$的值，使其满足约束：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i, \quad (\text{也可以是}\geqslant b_i,\ \text{或}=b_i)$$

$$(j=1, 2, \cdots\cdots, m) \qquad (1\cdot1\cdot1)$$

$$x_j\geqslant 0, \quad (j=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

并使目标函数

$$S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \quad \text{最大(或最小)。}$$

式中$a_{ij}$, $b_i$, $c_j$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, m; \ j=1, 2, \cdots\cdots, n)$为已知量，$x_j$是待定的决策变量，$j=1, 2, \cdots\cdots, n$。我们称m为线性规划的阶数，n为线性规划的维数。

因为任何一个不等式都可以加上一个变量把它化为等式，并在目标函数中加进这个变量时把它的系数取作零，而且，由于求目标函数的最大值问题与最小值问题是可以互相转化的：Max　$S=\text{Max}(-S)$，所以线性规划问题的数学模型可以标准化为：

求一组变量$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，使其满足约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, \quad (j=1, \cdots\cdots, m) \qquad (1\cdot1\cdot2)$$

$$x_j\geqslant 0, \ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

并使目标函数：

$$S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \quad \text{最大。}$$

$(1\cdot1\cdot2)$式还可写为：

$$P_1x_1+P_2x_2+\cdots\cdots+P_nx_n=P_0,$$

这里

$$P_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix},\quad j=1,\ \cdots\cdots,\ n;\ P_o=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}。$$

用矩阵符号表示时，线性规划的标准形式为：求X

$$(P)\qquad 满足\quad \begin{cases}AX=b\\ X\geqslant 0\end{cases}\qquad (1\cdot1\cdot3)$$

使得

Max $C^TX$。　　　（T—— 转置记号）

$$这里\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}。$$

问题还可简记为：

$$\mathrm{Max}\left\{C^TX\,\middle|\,AX=b,\ X\geqslant 0\right\}。\qquad (1\cdot1\cdot4)$$

二、线性规划的图解法

下面我们将利用坐标和图象，通过实例，用几何的直观形象来解释线性规划中的一些基本概念。

例 1·1·3 设有规划问题：

求　$(x_1,\ x_2)$，满足约束条件：

$$\begin{cases}x_1\leqslant 4\\ x_2\leqslant 3\\ x_1+2x_2\leqslant 8\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\end{cases}\qquad (1\cdot1\cdot5)$$

并使目标函数

$$S=2x_1+5x_2$$

的值最大。

解：取$x_1$为横坐标，$x_2$为纵坐标，建立平面坐标系。

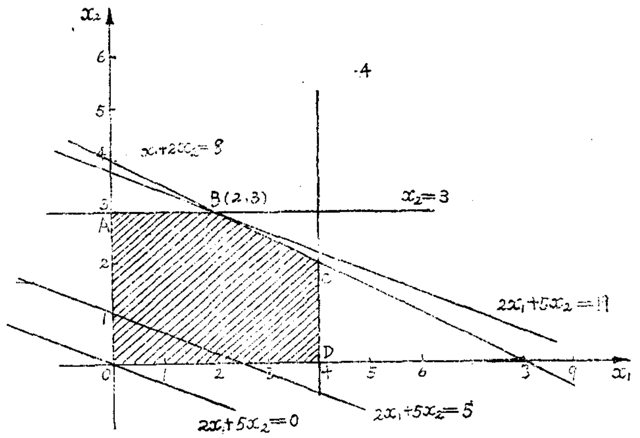
①划出$x_1+2x_2=8$这条直线，并定出

$$x_1+2x_2\leqslant 8$$

的区域。区域在直线左下方。

②划出$x_1=4$这条直线，并定出$x_1\leqslant 4$的区域。区域在直线左侧。

③划出$x_2=3$这条直线，并定出$x_2\leqslant 3$的区域。区域在直线下方。



（图1·1·1）

④划出$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$的区域。区域是第一象限。

⑤确定满足所有约束条件的集合。如图1·1·1所示的阴影区，它是OABCD这个凸多边形。

现在，在寻找最优解之前，先借用图1·1·1说明线性规划的几个基本概念。

容许解(feasible solution)：满足约束条件的$(x_1, x_2)$称为容许解，或可行解。图中凸多边形OABCD上的任一点$(x_1, x_2)$都是规划（1·1·5）的容许解。所有容许解组成的集合称为容许解集。图1·1·1中OABCD凸多边形区域上的所有点构成容许解集。

基本容许解：不能用其他容许解线性表示的容许解，称基本容许解。图1·1·1中凸边形的顶点A、B、C、D、O所相应的坐标都是基本容许解，它们都不可能用自己以外的凸多边形上的其它点来线性表示，亦即不是凸边形上的任意其他两点联成的直线上的点。

最优解：满足约束条件并达到目标函数要求的$(x_1, x_2)$。本例中最优解是凸多边形OABCD上使目标函数$(2x_1+5x_2)$取最大值的点$(x_1, x_2)$。

⑥找最优解

令目标函数值S分别取0，1，5，8，15，19……，便得到平行直线族：

$$2x_1+5x_2=0$$
$$2x_1+5x_2=1$$
$$2x_1+5x_2=5$$
$$2x_1+5x_2=8$$
$$2x_1+5x_2=15$$
$$2x_1+5x_2=19$$
$$\cdots\cdots$$

由（图1·1·1）可见，当S值愈大，目标函数直线离开原点愈远。因此找寻最优解的问

题，就是要在上列那样的平行线族中，找出一条既与凸多边形OABCD相交，而又离原点最远（即S最大）的直线。这条直线与凸多边形的交点坐标就是问题的最优解。在（图1·1·1）中可以看到，经过B点的直线符合要求：B点的坐标既满足约束条件又使目标函数取得最大值。所以它是问题的最优解。

为解出B点的坐标，我们可以通过精确作图来测量，也可以解方程组

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases},$$

得$(x_1, x_2) = (2, 3)$，它是问题的最优解。

$(x_1, x_2) = (2, 3)$相应的目标函数的最大值为：

$$S = 2 \times 2 + 5 \times 3 = 19$$

我们还可从（图1·1·1）中得到如下的启示：

1．任意两容许解联线上的解都是容许解；

2．线性规划问题的最优解如果存在的话，必定可以在凸多边形的某个顶点上达到。

三、线性规划问题解的性质

为了便于讨论n维矢量空间上的线性规划问题，给出以下几个重要的概念与定理。

（一）几个概念

凸集：一个点集K，如果对K中任意两点$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，它们的凸组合

$X = \alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)}$　　$(\alpha_1 \geqslant 0, \alpha_2 \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$也属于K，则K称为一个凸集。

例如矩形、园、四面体等都是凸集，但园环不是凸集。

从几何上讲，若联接n维空间中点集K上任意两点$X^{(1)}$，$X^{(2)}$的线段仍全部在点集K中，则点集k称为凸集。换句话说，若

$$\{X \mid X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,\ X^{(1)} \in K,\ X^{(2)} \in K\} \in K,$$

则称K为凸集。

极点（或称顶点）：若凸集K中的点X不能成为K中任何线段的内点，则称X为K的极点。换句话说，对于任意两点$X^{(1)} \in K$，$X^{(2)} \in K$，如果不存在$\alpha(0 < \alpha < 1)$使得

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)},$$

则称X为K的极点。

例如，矩形的顶点，四面体的顶点，园域园周上的点，球体的球面上的点等都是极点。

基变量与基本容许解（基本可行解）：若一个线性规划问题的阶数为$m(m \leqslant n)$，一个容许解$X = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T$，它大于零的分量$\leqslant m$，且对应大于零的分量的系数矢量$P_j$是线性无关的，则称这个容许解为基本容许解（或基本可行解），而它的诸非零分量$x_i$称为基变量，其他分量称为非基变量，并说这样的$P_j$组成该线性规划问题的一组基。

最优解：一个容许解，若它使目标函数达到极大值（或极小值），则称它是线性规划的最优解，或简称为线性规划的解。此时，目标函数的值称为线规划的值。

当一个线性规划的值可为负无穷或正无穷时我们称这样的线性规划为无界的。当解的分量可以取无穷大时我们称这样的线性规划为无界解情形。

（二）关于解的几个定理

**定理1·1·1** 线性规划(P)的容许解集合M：$\{X\mid AX=b,\ X\geqslant 0\}$是一个凸集。

证：若M是空集或单点集，定理自然成立。

若M中至少有两点，于是可在M中任取两点$X^{(1)}$及$X^{(2)}$，而

$$\begin{cases} AX^{(1)}=b,\ X^{(1)}\geqslant 0 \\ AX^{(2)}=b,\ X^{(2)}\geqslant 0 \end{cases}$$

作$X^{(1)}$，$X^{(2)}$的凸组合，得

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\geqslant 0 \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

则

$$\begin{aligned} AX&=A[\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}] \\ &=\alpha AX^{(1)}+(1-\alpha)AX^{(2)} \\ &=\alpha b+(1-\alpha)b \\ &=b。\end{aligned}$$

所以 $X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)}\in M$，是(P)的容许解。这也就证明了容许解的集合M是一个凸集。证毕。

**定理1·1·2** 线性规划(P)的容许解集合M中的点X是极点的充要条件为X是(P)的基本容许解。

证：先证必要性：极点X是(P)基本容许解。

若X是容许解集M的一个极点，但X不是(P)的基本容许解。当$X\neq 0$时，X必有非0分量，$x_{j_1}$，$x_{j_2}$，……，$x_{j_k}(k\leqslant m)$，且它们相应的系数列矢量$P_{j_1}$，$P_{j_2}$，……，$P_{j_k}$线性相关。即存在不全为0的$\delta_1$，$\delta_2$，……，$\delta_k$使得

$$\delta_1P_{j_1}+\delta_2P_{j_2}+\cdots\cdots+\delta_kP_{j_k}=0,$$

亦即有实数$\lambda\neq 0$，使得

$$\lambda\delta_1P_{j_1}+\lambda\delta_2P_{j_2}+\cdots\cdots+\lambda\delta_kP_{j_k}=0。\qquad (1\cdot1\cdot6)$$

又因$x_{j_1}$，$x_{j_2}$，……，$x_{j_k}$是(P)的容许解X的非零分量，所以

$$x_{j_2}P_{j_1}+x_{j_2}P_{j_2}+\cdots\cdots+x_{j_k}P_{j_k}=b。\qquad (1\cdot1\cdot7)$$

(1·1·6)与(1·1·7)分别相加与相减得

$$(x_{j_1}+\lambda\delta_1)P_{j_1}+(x_{j_2}+\lambda\delta_2)P_{j_2}+\cdots\cdots+(x_{j_k}+\lambda\delta_k)P_{j_k}=b,$$

$$(x_{j_1}-\lambda\delta_1)P_{j_1}+(x_{j_2}-\lambda\delta_2)P_{j_2}+\cdots\cdots+(x_{j_k}+\lambda\delta_k)P_{j_k}=b。$$

选择

$$\lambda=\min_{t=1,\cdots\cdots,k}\frac{x_{j_t}}{|\delta_t|}>0,\quad |\delta_t|\neq 0,$$

从而$0<\lambda|\delta_t|\leqslant x_{j_t}$，$t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$,

这样便保证了$x_{jt}+\lambda\delta_t\geqslant 0$，$x_{jt}-\lambda\delta_t\geqslant 0$，$(t=1,2,\cdots\cdots,k)$。

构造n维矢量：

$$X^{(1)}:\begin{cases} x_{j1}^{(1)}=x_{j1}+\lambda\delta_1, \\ x_{j2}^{(1)}=x_{j2}+\lambda\delta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{jk}^{(2)}=x_{jk}+\lambda\delta_k, \\ x_j^{(1)}=0,\ (j\neq j_1,\ j_2,\ \cdots\cdots,\ j_k), \end{cases}$$

$$X^{(2)}:\begin{cases} x_{j1}^{(2)}=x_{j1}-\lambda\delta_1, \\ x_{j2}^{(2)}=x_{j2}-\lambda\delta_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{jk}^{(2)}=x_{jk}-\lambda\delta_k, \\ x_j^{(2)}=0,\ (j\neq j_1,\ j_2,\ \cdots\cdots j_k)。 \end{cases}$$

显见　$X^{(1)}\geqslant 0$，$X^{(2)}\geqslant 0$，且$X^{(1)}\neq X^{(2)}$，

而且　$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(1)}P_j=b$，　$\sum_{j=1}^{n} x_j^{(2)}P_j=b$，

这里，$X^{(1)}=(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots\cdots,\ x_n^{(1)})$，

$X^{(2)}(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots\cdots,\ x_n^{(2)})$。

所以我们构造的$X^{(1)}$与$^{(2)}$是线性规划(P)的两个不同的容许解，而且恰好满足：

$$X=\frac{1}{2}(X^{(1)}+X^{(2)})。$$

这样便得出X不是(P)的容许解集M的极点，与假设矛盾。这样我们便用反证法证明了X必是(P)的基本容许解。

再证充分性：基本容许解X是容许解集M的极点。

因为$X=0$时，显然X必是极点，所以只需证明，当$X\neq 0$时，若X的非零分量对应的列矢量$P_{j1}$，$P_{j2}$，……，$P_{jk}(k\leqslant m)$线性无关，则X一定是极点。

仍用反证法，若X是基本容许解但不是容许解集M的极点。因X不是凸集M的极点，所以在M中存在不同的两点$X^{(1)}$，$X^{(2)}$使得

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)},\qquad 0<\alpha<1,$$

即　$x_j==\alpha x_j^{(1)}+(1-\alpha)x_j^{(2)}$，　　$j=1,2,\cdots\cdots,n$

当$j \neq j_1, j_2, \cdots\cdots, j_k$时，上式变为

$$0 = \alpha x_j^{(1)} + (1-\alpha) x_j^{(2)}$$

因为 $x_j^{(1)} \geqslant 0$， $x_j^{(2)} \geqslant 0$，$\alpha > 0$，$1-\alpha > 0$，

所以 $\qquad x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$，$(j \neq j_1, j_2, \cdots\cdots, j_k)$

又因

$$x_{j_1}^{(1)} P_{j_1} + x_{j_2}^{(1)} P_{j_2} + \cdots\cdots + x_{j_k}^{(1)} P_{j_k} = b,$$

$$x_{j_1}^{(2)} P_{j_1} + x_{j_2}^{(2)} P_{j_2} + \cdots\cdots + x_{j_k}^{(2)} P_{j_k} = b,$$

两式相减得

$$(x_{j_1}^{(1)} - x_{j_1}^{(2)}) P_{j_1} + (x_{j_2}^{(1)} - x_{j_2}^{(2)}) P_{j_2} + \cdots\cdots + (x_{j_k}^{(1)} - x_{j_k}^{(2)}) P_{j_k} = 0。$$

由于$X^{(1)}$，$X^{(2)}$是不相同的两点，其中至少有某个$x_{j_t}^{(1)} - x_{j_t}^{(2)} \neq 0$，所以$P_{j_1}$，$P_{j_2}$ $\cdots\cdots$，$P_{j_k}$线性相关。这与假设相矛盾，因而证明了当$P_{j_1}$，$P_{j_2}$，$\cdots\cdots$，$P_{j_k}$线性无关时，X一定是M的极点，即X是基本容许解时，X一定是M的一个极点。证毕。

定理1·1·3　若M是一个凸多面体，则线性规划(P)的目标函数S(X)至少在M的一个顶点(极点)上达到极值。

证：我们就极小值的情况来叙述。设$X^{(0)}$是在M上使S(X)取极小值的点。因$X^{(0)}$是M上的点，所以$X^{(0)}$表示为凸多面体M诸顶点(极点)$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，$\cdots\cdots$，$X^{(P)}$的凸组合，即

$$X^{(0)} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X^{(j)}, \quad \alpha_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1。$$

因为目标函数S(X)是线性函数，故

$$S(X^{(0)}) = S\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j X^{(j)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j S(X^{(j)}),$$

因为$\alpha_j \geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$，所以至少有一个k，使$\alpha_k > 0$。

设对所有$\alpha_k > 0$的k，皆有$S(X^{(k)}) > S(X^{(0)})$，于是当有

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j S(X^{(j)}) > S(X^{(0)}).$$

这与$S(X^{(0)}) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j S(^{(j)})$相矛盾，此矛盾证明至少有一个满足$\alpha_k > 0$的k使得$S(X^{(k)}) = S(X^{(0)})$。这就证明了目标函数S(X)至少在M的一个顶点$X^{(k)}$上达到极小值，而$X^{(k)}$为极小值点。证毕。

定理1·1·4，如果线性规划(P)有两个最优解$X^{(1)}$，$X^{(2)}$，则(P)有无穷多个最优解，且它是$X^{(1)}$，$X^{(2)}$的线性凸组合。即若$X^{(1)}$，$X^{(2)}$是(P)的最优解，则

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha) X^{(2)} \qquad (1 \geqslant \alpha \geqslant 0,)$$

也是(P)的最优解。

这个定理的证明是容易的，我们留给读者作为练习。

在线性规划问题(P)中，容许解集M的顶点(极点)对应着一组线性无关列矢量。而线性规划(P)的系数矩阵A中共有n列，n个列矢量中线性无关矢量组的个数是有限的，因而M的极点是有限的。这一结论联同定理1·1·3便可得出：如果线性规划(P)有最优解，就只需从M的有限几个极点中去找。下节要讨论的单纯形法，就是根据这个原理，由一个极点迭代到另一极点，经有限次迭代，求得线性规划问题(P)的最优解，或判定它无最优解。

对于单纯形迭代法我们将不给以更多的理论阐述，着重介绍方法。对理论感兴趣的读者可参考文献〔1〕或〔2〕。单纯形迭代法也有专用的计算程序可供使用。

## § 1·2　单纯形法

一、举例

单纯形法是在解线性方程组的迭代法思想上发展起来的。在进行手算的时候，需要列出表格进行矩阵的初等变换，所以单纯形法又称表解法。

下面我们首先举例说明对目标函数取极大的问题的解法。

例1·2·1　目标函数：Max　$S = 6x_1 + 4x_2$，

约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ x_2 \leqslant 7, \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0, \end{cases} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 1)$$

解：1．首先加松弛变量$x_3$，$x_4$，$x_5$，使约束条件化为等式：

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_2 + x_5 = 7 \end{cases} \qquad (1 \cdot 2 \cdot 2)$$

相应地，目标函数可写为

$$S = 6x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

因为$x_3$，$x_4$，$x_5$前面的系数为0，所以目标函数并未改变。

2．然后列表如下(初始单纯形表)

这个表的中间部分实际上就是三个约束方程加上一个目标函数方程的系数矩阵。为了说清解题步骤，我们设置一个"编号列"，将每一行加上一个编号，如(1)，(2)，……等。每次变换后继续顺序加以编号，在最左边加"变量列"，其元素$x_3$，$x_4$，$x_5$，排列如(表1·2·1)

(表1·2·1)

| 变量列 $x_i$ | 编号 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 常数列 $b_i$ | 比值 $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | (1) | ② | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 | 10／2＝5 |
| $x_4$ | (2) | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 | 8／1＝8 |
| $x_5$ | (3) | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 7 | |
| 目标行 | (4) | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | S | |

3．选择关键数

第4行代表目标函数方程，称为"目标行"，在目标行中选一个最大的系数6开始变换。6处于$x_1$这一列，所以选择该列为"关键列"。计算常数列与关键列在同一行上的数的比值：分别为$\frac{10}{2}=5$，$\frac{8}{1}=8$(若$a_{ij}\leqslant 0$，则不计算它们的比值。)，记在(表1·2·1)的最右列，选其中最小者5所在的行为"关键行"即第1行。关键行与关键列交点处的数2就是"关键数"，加园圈以表示。

4．迭代：　进行行的初等变换

进行行的初等变换，就是把关键数变为1，把关键列上的其他数都变为0，具体的变换如(表1·2·2)所示。各行变换后，顺序编号为(5)，(6)，(7)，(8)，在变量列中，将关键行上的$x_3$换为$x_1$。

(表1·2·2)

| 变量列 $x_i$ | 变换方法 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 常数列 $b_i$ | 比值 $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | (5)＝(1)÷2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 5 | 10 |
| $x_4$ | (6)＝(2)－(5) | 0 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 3 | 6 |
| $x_5$ | (7)＝(3) | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 7 | 7 |
| 目标行 | (8)＝(4)－(5)×6 | 0 | 1 | －3 | 0 | 0 | S－30 | |

5．重复步骤3：再选关键数

现在第8行代表目标函数方程，为目标行，在第8行中的最大值是1，并处于$x_2$列，故选$x_2$列为关键列。计算比值于(表1·2·2)的最右列。其中6最小，它所在行为关键行，

$\frac{1}{2}$为关键数。

6．重复步骤4：再进行行的初等变换，如(表1·2·3)“变换方法列”所示。并将(表1·2·2)变量列中关键行上的$x_4$换为$x_2$。便得到表1·2·3。

(表1·2·3)

| 变量列 $x_i$ | 变换方法 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | 常数列 $b_i$ | 比值 $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | (9)=(5)-(10)÷2 | 1 | 0 | 1 | -1 | 0 | 2 | |
| $x_2$ | (10)=(6)×2 | 0 | 1 | -1 | 2 | 0 | 6 | |
| $x_5$ | (11)=(7)-(10) | 0 | 0 | 1 | -2 | 1 | 1 | |
| 目标行 | (12)-(8)-(10) | 0 | 0 | -2 | -2 | 0 | S-36 | |

7．现在目标行(12)中全部元素均已小于或等于0，说明已得到最优方案，即

$$x_1=2(\text{台}),\quad x_2=6(\text{台})$$

$$S-36=0,\quad S=36\quad \text{即}\quad S\max=36$$

此时，松弛变量$x_3$与$x_4$均为0，因为它未在(表1·2·3)的变量列中出现。

二、迭代过程的说明

前面已经说过(表1·2·1)与模型(1·2·2)的关系，现在对模型(1·2·2)作如下变换：

$$\begin{cases} x_3=10-2x_1-x_2, \\ x_4=8-x_1-x_2, \\ x_5=7-x_2, \end{cases} \tag{1·2·3}$$

$$S=6x_1+4x_2,$$

这就是说：取$x_3$，$x_4$与$x_5$为基变量，将它们以及目标函数S均用非基变量$x_1$与$x_2$来表示；

当取$x_1=x_2=0$时，则有

$$x_3=10,\ x_4=8,\ x_5=7,$$

$$S=0。$$

$\because x_1,\ x_2\geqslant 0$

$\therefore$增大$x_1$或$x_2$，可使S值提高；

又$\because\ \sigma_1=6>4=c_2$，

$\therefore$　首先增大$x_1$，可使S值提高较快；这对应于关键列的选取；

由(1·2·3)式可以看出：增大$x_1$($x_2$不变)将使资源$b_1=10$首先耗尽，故优先考虑(1·2·3)中第1式；这对应于关键行的选取。

根据以上讨论，我们将（1·2·3）中第1式中$x_1$移到左边，$x_3$移到右边，其余各式相应变化：

$$x_1 = 5 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3,$$

$$x_4 = 3 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3,$$

$$x_5 = 7 - x_2,$$

$$S = 30 + x_2 - 3x_3, \qquad (1·2·4)$$

这就对应于（表1·2·2）。此时，$x_1$，$x_4$与$x_5$为基变量，它们以及目标函数S均用非基变量$x_2$与$x_3$表示；

若取$x_2 = x_3 = 0$，　则

$$x_1 = 5,\ x_4 = 3,\ x_5 = 7,$$

$$S = 30。$$

重复以上讨论：由（1·2·4）可知，增大$x_2$仍可使S值提高，在（1·2·4）的第2式中将$x_2$移到左边，$x_4$移到右边，其余各式相应变化得：

$$x_1 = 2 - x_3 + x_4;$$

$$x_2 = 6 + x_3 - 2x_4;$$

$$x_5 = 1 - x_3 + 2x_4, \qquad (1·2·5)$$

$$S = 36 - 2x_3 - 2x_4$$

这就对应于（表1·2·3）。

若取$x_3 = x_4 = 0$，　则

$$x_1 = 2,\ x_2 = 6,\ x_5 = 1,$$

$$S = 36。$$

在（1·2·5）的第4式中，$x_3$与$x_4$的系数均为负值，而$x_3 \geq 0$，$x_4 \geq 0$，　∴增大$x_3$或$x_4$均不能使S值提高，S＝36为极大值，最优解为

$$X = (2,\ 6,\ 0,\ 0,\ 1)$$

根据题意，只有$x_1 = 2$，$x_2 = 6$才是所要求的，$x_5 = 1$为松弛变量，题目并不要求。

**例1·2·2**　某工厂生产A、B、C三种配件，都要用到某种原材料，并且需要某工种的技工来完成。三种配件对该种原材料和技工工时的要求以及资源限制如下表：

| 资源＼配件 | A | B | C | 资源限额 |
|---|---|---|---|---|
| 原材料 | 4 | 2 | 1 | 6000（单位） |
| 技工工时 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 3 | 4000（工时） |

又，供销部门要求A不超过1000件，B不超过2000件；

A，B，C的单件利润分别是6，2，4元；

问：每种配件各生产多少件，使利润最高？

解：设A、B、C各生产$x_1$，$x_2$，$x_3$件，则模型为：

$$\text{Max}\quad S=6x_1+2x_2+4x_3,$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3\leqslant 6000, \\ 2x_1+\frac{1}{2}x_2+3x_3\leqslant 4000, \\ 0\leqslant x_1\leqslant 1000, \\ 0\leqslant x_2\leqslant 2000, \\ 0\leqslant x_3 \end{cases}$$

按单纯形法步骤迭代求解：(S.t.是Sabject to 的缩写，意即约束条件)

1．加松驰变量$x_4$，$x_5$，$x_6$，$x_7$，化约束条件为等式：

$$\begin{aligned} 4x_1+2x_2+x_3+x_4 &=6000, \\ 2x_1+\tfrac{1}{2}x_2+3x_3+x_5 &=4000, \\ x_1+x_6 &=1000, \\ x_2+x_7 &=2000, \end{aligned}$$

2．列初始单纯形表：

(表1·2·4)

| 变量列 $x_i$ | 编 号 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | 常数列 $b_i$ | 比 值 $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | (1) | 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6000 | 1500 |
| $x_5$ | (2) | 2 | $\frac{1}{2}$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4000 | 2000 |
| $x_6$ | (3) | ① | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1000 | 1000 |
| $x_7$ | (4) | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2000 | |
| 目标行 | (5) | 6 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | S | |

3．选择关键数

在目标行(第5行)中6最大，故选$x_1$列为关键列；

比值1000为最小，故选第3行为关键行；

关键数为1，加园圈表示。

4．迭代：进行行的初等变换，得(表1·2·5)。注意，在变量列中，将$x_6$换为$x_1$。

(表1·2·5)

| 变量列 $x_i$ | 变 换 方 法 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | 常数列 $b_i$ | 比 值 $q_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ | (6)=(1)-(3)×4 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | -4 | 0 | 2000 | 2000 |
| $x_5$ | (7)=(2)-(3)×2 | 0 | $\frac{1}{2}$ | ③ | 0 | 1 | -2 | 0 | 2000 | 666.7 |
| $x_1$ | (8)=(3) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1000 | |
| $x_7$ | (9)=(4) | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2000 | |
| 目标行 | (10)=(5)-(3)×6 | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | -6 | 0 | S-6000 | |