

高等学校试用教材

数字信号 处理基础



北方交通大学 王瑞英 主编
中国铁道出版社

高等学校试用教材

数字信号处理基础

北方交通大学 王瑞英 主编
上海铁道学院 周大纲 主审

中国铁道出版社

1995年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书主要讲述有关数字信号处理方面的基本知识,共分五章,主要包括:离散信号与系统分析基础、离散傅里叶变换与快速傅里叶变换、数字滤波器的设计、相关与谱分析及数字处理系统的结构与实现等内容。为便于学习,每章后配有习题,书末给出了习题答案,并在附录中提供了几个基本实验的指导书及参考程序。

本书为高校通信工程和电类各专业本科生教材,也可供从事该专业的科技人员参考使用。

高等学校试用教材

数字信号处理基础

北方交通大学 王瑞英 主编

*

中国铁道出版社出版、发行

(北京市东单三条 14 号)

责任编辑 武亚雯 封面设计 陈东山

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本:787×1092 毫米 1/16 印张:18.5 字数:451 千

1995 年 4 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数:1—2500 册

ISBN7-113-01901-3/TN·72 定价:10.90 元

前 言

本书是根据铁道部高等学校通信信号教学指导委员会推荐,经铁道部批准的教材建设规划安排编写的。

近年来,数字信号处理技术已在各种科学技术领域得到了广泛的应用,而且内容之丰富,发展之迅速是非常惊人的。但是,作为大学生的教材,只能给出一些有关数字信号处理方面的基本知识。所以本书的书名特意加上了“基础”二字。

本书在离散信号与系统分析的基础上,重点介绍了快速傅里叶变换、谱分析和谱估计,以及数字滤波及数字系统硬件实现中的问题。为了照顾到没有设置“信号与系统”和“网络分析”课程而直接进行此课程教学时的困难,书中编入了有关离散信号与系统分析和模拟滤波器设计的一些基本内容。书中每章还选编了一部分习题。这些习题计算过程并不复杂,但对学生掌握基本理论和概念都是非常有益的。此外,书末附录中还给出了数字信号处理几个基本实验的指导书及C语言参考程序。通过实验可以培养学生运用数字信号处理技术的能力。本教材参考教学时数为64~72学时,其中实验为12~20学时。

本书由北方交通大学王瑞英主编,上海铁道学院周大纲主审。参加编写的人员及分工:第一、二章由兰州铁道学院张志远执笔,第四章由上海铁道学院陈寒达执笔,附录中的实验指导书及C语言程序由北方交通大学冉学文执笔,其余各章由王瑞英执笔。

本书初稿完成后,周大纲教授主持召开了由上海铁道学院、兰州铁道学院、北京工业大学、北京邮电大学以及北方交通大学等单位的部分有关专家参加的审稿会,与会者对书稿提出了宝贵的修改意见。北京邮电大学诸维明教授、北京工业大学谭穆端教授、北方交通大学吴湘淇教授、聂涛教授以及编者所在教研室的有关老师都对本书的编写给予了大力的支持并提出了许多宝贵建议。此外,中国电子学会信号处理分会主席北方交通大学袁保宗教授也在百忙中对本书的编写给予了关心和帮助,在此,我们一并表示诚挚的感谢。

编 者

1994.4

目 录

绪 论	1
第一章 离散信号与系统分析基础	6
第一节 离散信号与取样定理	6
一、离散信号	6
二、连续时间信号的取样及取样定理	9
第二节 离散时间系统与差分方程	14
一、线性非时变离散系统	14
二、离散卷积	14
三、离散时间系统的差分方程和状态方程	16
四、离散时间系统的稳定性和因果性	18
五、离散时间系统的时域分析	19
第三节 Z 变换	20
一、 Z 变换	20
二、逆 Z 变换	25
三、 Z 变换的主要性质	29
四、序列的傅里叶变换—— Z 变换的特例	32
五、序列的 Z 变换与其它变换的关系	34
第四节 离散时间系统的 Z 域分析	36
一、差分方程的 Z 变换解法	36
二、 Z 域系统函数	37
三、离散时间系统的频率特性	38
习 题	41
第二章 离散傅里叶变换与快速傅里叶变换	44
第一节 离散傅里叶级数(DFS)	44
一、四种形式的傅里叶变换	44
二、离散傅里叶级数(DFS)	46
第二节 离散傅里叶变换(DFT)	50
一、从离散傅里叶级数到离散傅里叶变换	50
二、离散傅里叶变换的性质	51
三、用循环卷积求线性卷积	54
四、离散傅里叶变换与 Z 变换的关系	58
五、频域取样	58

六、离散傅里叶变换应用中的一些问题	61
第三节 快速傅里叶变换(FFT)	63
一、FFT 的由来与发展	63
二、FFT 算法依据	63
三、基 2 时域抽取 FFT 算法	65
四、基 2 频域抽取 FFT 算法	73
五、其它基时域抽取 FFT 算法	75
六、实序列的 FFT 特殊算法	77
七、IDFT 的快速算法——IFFT	79
习 题	80
第三章 数字滤波器的设计	84
第一节 概 述	84
一、数字滤波器及其分类	84
二、数字滤波器的设计	85
三、数字滤波器的实现	85
第二节 IIR 数字滤波器的设计	85
一、分段常数频率选择 IIR 数字滤波器的技术要求	85
二、IIR 数字滤波器的间接设计法	87
三、模拟滤波器设计简介	95
四、数字滤波器的频率变换	107
五、IIR 数字滤波器的计算机辅助优化设计	113
第三节 FIR 数字滤波器的设计	121
一、FIR 数字滤波器的特点	121
二、线性相位 FIR 数字滤波器的特性	121
三、线性相位 FIR 数字滤波器的设计	127
四、线性相位 FIR 数字滤波器的计算机辅助优化设计	145
五、简单整系数线性相位 FIR 数字滤波器	152
习 题	160
第四章 相关与谱分析	164
第一节 用 DFT 对确定信号进行谱分析	164
一、DFT 作为连续时间信号的近似谱分析	164
二、DFT 作为离散时间序列的近似谱分析	167
三、频率分辨率的提高	171
第二节 确定性离散信号的相关函数及能量谱、功率谱	174
一、相关函数的定义与性质	174
二、相关与卷积的关系	176
三、序列的能量谱与功率谱	177
四、自相关序列的快速算法	179
第三节 随机信号的相关函数及谱估计	180

一、离散随机序列	180
二、平稳随机序列和各态历遍性随机序列	183
三、平稳随机信号的功率谱	184
四、平稳随机序列通过线性非时变离散时间系统	185
第四节 功率谱估计	187
一、估计质量的基本概念	188
二、经典功率谱估计	189
三、现代谱估计简介	193
习 题	196
第五章 数字处理系统的结构与实现	198
第一节 数字滤波器的结构	198
一、IIR 数字滤波器的结构	198
二、FIR 数字滤波器的结构	204
第二节 有限字长效应	208
一、从例题看有限字长效应	208
二、量化及量化误差	209
三、滤波器输入信号量化效应	212
四、滤波器系数量化效应	214
五、定点运算中有限字长对数字滤波器的影响	219
第三节 数字处理系统的实现	228
一、输入/输出描述法数字滤波器的实现	228
二、块处理结构 IIR 数字滤波器的硬件实现	234
三、FFT 算法的实现	234
习 题	239
附录:数字信号处理基本实验(附参考程序)	242
实验一 用 FFT 对确定连续信号进行谱分析	242
实验二 用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器	243
实验三 用频率取样法设计 FIR 数字滤波器	244
实验四 IIR 数字滤波器三种结构形式的软件实现	246
实验五 利用单片机实现 FIR 数字滤波器	247
参考程序(C 语言)	251
一、确知信号的 FFT 谱分析程序	251
二、双线性变换法设计 IIR 数字滤波器程序	258
三、频率取样法设计 FIR 数字滤波器程序	268
四、IIR 数字滤波器三种结构形式程序实现	273
习题答案	283
参考文献	288

绪 论

数字信号处理是近二十几年发展起来的一门新学科。70年代以来,大规模集成电路和计算机技术的飞跃发展,为数字信号处理技术提供了新的手段。利用数字信号处理技术,不仅可以获得模拟信号处理难以取得的效果,而且还具有很多优点,因此,数字信号处理技术在科学和工程技术的许多领域都得到了广泛的应用。

一、数字信号处理基本概念及特点

信号是信息的运载工具和表现形式,信息处理也即对信号进行处理。由于很多种信号,例如光、声、热、振动等信号都可以转换成电信号,因此,我们所说的信号处理一般是指电信号的处理。

所谓信号处理,就是对信号进行某种所需的变换或按预定的规则进行运算,以便把它们加工改造成另一种信号,使之对原信号更容易分析、识别和使用。由于信号通常分成两大类,一类是时间和幅度都是连续取值的模拟信号;另一类是时间和幅度只能取某些离散值的数字信号。所以,信号处理也分成模拟信号处理和数字信号处理两种。

实现信号处理的设备称之为系统。对模拟信号进行处理的设备叫模拟系统;对数字信号进行处理的设备叫数字系统。数字系统若附加某些设备也可用来处理模拟信号。由于自然界中的信号绝大多数是属于模拟信号,且早期的数字处理系统速度很慢,又不经济,因此,最早的信号处理技术大多是采用模拟处理的方法,所用处理设备当然就是模拟系统,例如使用模拟计算机或是晶体管以及 R 、 L 、 C 等基本模拟元件所组成的系统。近二十几年来,随着大规模集成电路的发展和数字计算机的广泛使用,数字信号处理技术有了很大的发展,并且得到了越来越多的应用。

数字信号处理与模拟信号处理相比有很多优点,主要表现在以下几方面:

(1)精度高:模拟处理系统中元件的精度要达到 10^{-3} 已很不容易,而数字处理系统在采用 17 位字长时即可达到 10^{-5} 的精度。对于频率分辨力,模拟系统只能做到 1Hz,而数字系统则可做到 2MHz。

(2)可靠性强:模拟系统中各种元件参数都有一定的温度系数,因而会随着环境条件的变化而改变,并且容易出现感应、杂散效应,甚至振荡等。数字系统只有“0”和“1”两种电平,它受噪声、温度、电磁感应的影响都比模拟系统小,所以可靠性强。

(3)灵活性大:具有不同特性的模拟系统,其系统的各个元件一般都不相同的。就是说,要改变模拟系统的特性,必须改变系统中的各个元件。然而,对于数字系统,只要改变系统存储

器中的数据,就可以改变系统的参数,从而得到具有不同特性的系统。

(4)便于大规模集成化:数字部件对电路参数的要求不太严格,且具有高度的规范性,因此易于实现大规模集成化。此外,在低频电路中,它可以取代大电感、大电容,制成比模拟电路体积小,重量轻且价廉的电路。

(5)可以做到时分复用:数字系统可以按时间顺序同时处理几路独立的信号,这就是所谓的时分复用,如图1所示。当各路输入信号同时输入序列值时,同步系统控制它们在时间上前后错开,由并行变为串行进入处理器。处理器在处理完第一路序列的第一个值之后,再处理第二路序列的第一个值,直至各路信号序列的第一个值都处理一遍,然后经串行变为并行分路输出。如此反复进行,就可通过一个系统处理多路信号。处理器速度越高,它所能处理的信号路数越多。

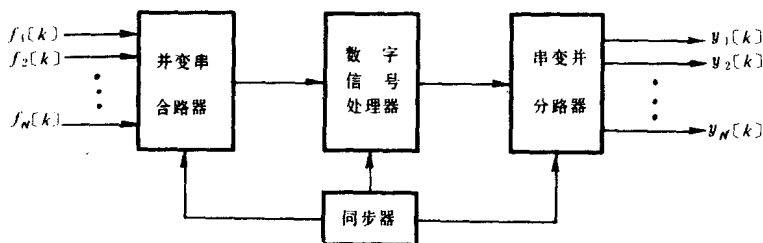


图1 时分复用多路数字信号处理系统

以上表明,数字处理有着模拟处理无可比拟的优点。但是,作为一次信息源或原始信号源,大多都是模拟信号,而且这也是永远改变不了的事实。考虑到这些,于是就广泛地出现了用数字系统处理模拟信号的情况。用数字系统不能直接处理模拟信号,必须首先将模拟信号变成数字信号。完成这种变换作用的器件叫A/D变换器,它具有三方面的功能:第一,根据取样定理所要求的速率对模拟信号 $f(t)$ 进行取样,使之变成离散信号 $f[kT]$;第二,把 $f[kT]$ 进行量化变成数字信号 $f[k]$;第三,把数字信号 $f[k]$ 编成一串二进制数码,然后送到数字系统进行处理。数字系统处理后的输出信号仍是一串二进制数码。如果我们希望处理后的输出信号还是模拟信号,尚需再附加一个叫做D/A的变换器,它首先把二进制码变成数字信号 $y[k]$,然后使其再变成阶梯状的连续信号。最后,可再用一个模拟低通滤波器对阶梯波进行平滑,从而获得模拟输出信号 $y(t)$ 。以上用数字系统代替模拟系统对模拟信号进行处理的简要过程如图2所示。

数字处理系统优点虽多,但仍有不足之处。一般地说,目前很多数字系统的速度还不是很,因而还不能处理很高频率的信号,尤其是用微型计算机进行软件处理时更是如此。此外,硬件系统的设计和结构还比较复杂,

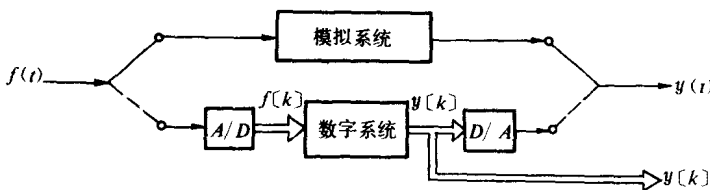


图2 模拟信号的数字处理系统

价格也相对较贵。所以,对于要求不太高的简单系统一般还不便于采用。但是随着超大规模集成电路(VLSI)的发展,预料这些问题将会逐步得到妥善的解决。

二、数字信号处理基础内容及应用

由于信号处理的目的是通过系统的作用,将一定的输入信号变成人们所希望的输出信号,例如削弱信号中的多余内容;滤除混杂的噪声和干扰;估计信号的特征参数;变换信号成为容易分析和辨识的形式等,因此,信号处理的基本内容概括地讲,是包括了处理系统和信号分析这两个紧密联系互相渗透的分支。

这里的处理系统主要是指滤波器。当然对于数字处理系统就是数字滤波器了。数字滤波器通常分成两大类,一类是无限脉冲响应(Infinite Impulse Response 简记为 IIR)数字滤波器,另一类是有限脉冲响应(Finite Impulse Response 简记为 FIR)数字滤波器。IIR 数字滤波器的一般设计方法,是采用由模拟滤波器系统函数 $H(s)$ 向数字滤波器系统函数 $H(z)$ 转换的方法,主要有冲激响应不变法和双线性变换法。FIR 数字滤波器的一般设计方法有窗口法和频率取样法。此外,两种滤波器都还有使用计算机辅助的优化设计法。

频谱是各类信号参数中物理含义最明显的一类最基本的参数,因此,这里的信号分析主要是指信号的谱分析。对于确定信号,谱分析可以采用变换法和滤波法两种。其中变换法主要是离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform 简记为 DFT)及其快速算法又称快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, 简记为 FFT)。对于随机信号的谱是指其功率谱,分析的方法有经典的自相关法、周期图法和近代的最大熵法、参数信号模型法等。

数字信号处理,例如上述的数字滤波和数字谱分析,可以在通用计算机上通过对算法编制程序(即软件)来实现,也可以用数字化硬件来实现。无论是用软件还是用硬件实现的数字信号处理器,它们都是以有限字长的数字量运算来近似无限精度的算术运算,两者之间必定产生误差。因此,有关数字信号处理的基本结构,软、硬件实现的基本方法以及用有限字长的数字量运算来代替无限精度运算时所产生的量化效应等也是数字信号处理要涉及到的内容。

数字信号处理应用十分广泛,这里简单列举以下几个方面的应用。

1. 通信中的信号变换处理

通信技术实际上就是信号的传输与处理技术。通信系统的基本功能由放大、衰减、滤波、均衡、调制解调、多路复用、同步与变换等构成。以前这些功能都是用模拟电路实现,目前越来越多地被数字电路所代替。而且在编码调制,信号的加解密,频分复用与时分复用的转换以及在通信网络的控制与切换、通信系统的性能测试等方面也都使用了数字信号处理技术。总之,通信系统的数字化已为期不远了。

2. 语音信号处理

在目前的语音信号处理中,语音信号的压缩,语音的分析与合成,语音的检测与识别以及正在研究的语言理解,都是通过数字处理系统和技术来实现的。

3. 图像信号处理

人类由视觉获得的信息量约占由五官获得的信息总量的 70% 以上,信息量大,而且包含着多维空间信息,这些都决定了图像处理的复杂性。但是,由于采用了迅速发展的数字信号处理技术,图像信息的传输(通信)和处理(图像增强、识别、压缩、复原等)技术仍有了显著的进展,是近年来发展比较迅速的一个领域。目前,在国民经济各部门,如空间技术、遥感技术、地形勘测,机械操作自动监测等很多方面都已得到广泛应用。

4. 生物医学信息处理

数字信号处理技术在生物医学及诊断方面的应用也是很有有效的。例如通过对反映生物电活动的心电信号、脑电信号、肌电信号的处理,提取信号的数字特征,可及早发现一些用常规方法难以判断的冠心病等。另外,如X射线计算机断层(CT)技术,血象、血球、肿瘤的认识以及疑难疾患的诊断等也不断取得新的成果。

5. 电子仪器数字化

目前,越来越多的电子仪器利用了数字信号处理技术,例如数字信号源、数字万用表、数字示波器、数字频谱分析仪等。这些仪器都具有高精度、高稳定度、低功耗、小体积以及可编程等特点。此外,利用数字处理技术做成信号分析系统,可以计算并显示被测信号的各种参量如相关函数、功率谱参数等。所谓第三代自动测试系统的仪器,就是仪器与数字信号处理相结合的产物。

除上述应用外,在雷达与声纳、自动控制、地球与核物理、地震与振动等技术领域,数字信号处理技术也都得到了广泛的应用。总之,凡是需要对信号进行处理或控制的一切领域都会从数字信号处理技术中得到满意的帮助。因此,数字信号处理是一个极富有生命力的新兴学科。

三、数字信号处理学科由来与发展

离散时间信号、数字信号及其处理问题并不是近期才提出来的。数字信号处理的基本数学原理早在一个世纪之前就已经有人研究。数值计算、Z变换和离散傅里叶变换(DFT)就是数字信号处理的基础理论。但是由于当时条件尚不成熟,所以多年来一直都沿用模拟处理的方法。1965年库利(J. W Cooley)和图基(J. W Tukey)提出了计算DFT的快速算法(FFT),使DFT得到了实际的应用,从而大大推动了数字信号处理学科的发展。当时,数字滤波器理论也在形成,例如凯泽(Kaiser)开始提出了用双线性变换设计数字滤波器的方法。所以,在60年代中期就形成了较为定型的数字信号处理的理论。与此同时,数字元件工艺及数字计算机的发展也为数字信号处理技术的发展提供了物质基础。

1966年之后,又有很多著名的算法出现,但当时的处理方法并不像模拟滤波器那样以硬件形式出现,而是以软件形式出现。所以,可以认为那时的数字信号处理就是用计算机进行的信号处理。

70年代,大规模集成电路(LSI)技术得到了发展,这时用硬件实现数字滤波器成为可能。开始,是用多个IC芯片来实现数字信号处理中的一个基本运算,如加法、乘法、延迟等。1980年前后接连出现了将许多个加法器、乘法器和延迟电路等集中在一起,按信号流程排列的LSI的成果。

将软件的通用性和灵活性与硬件相结合,使数字信号处理技术的应用范围可以更加扩大。为此,70年代就有许多人研究如何将微处理器应用于数字信号处理。之后,各种微处理器、位片处理器相继出现,并发展到信号处理器。就信号处理器芯片而言,其发展速度也非常之快,例如目前广泛采用的TMS320系列已有了好几代产品。此外,各种FFT单板(或片)机、专用的数字滤波器也有不少种。近来又发展了一种“门阵技术”,利用它可以随时构成任意的专用集成电路。这些都为信号的实时处理提供了有利条件,使得数字信号处理技术得到了突飞猛进的发展。

从目前来看,数字信号处理技术的发展趋势大致有以下几个方面:

(1)按不同用途分别使用两种处理方法。对于非实时处理,用计算机(软件)完成处理功能。

而且,适合于数字信号处理特点的编程语言也在不断研究改进之中。对于实时处理,可采用串行处理和并行处理两种方式。串行处理利用硬件控制 LSI 芯片;并行处理利用存储程序控制的信号处理机。

(2)无论软件或硬件系统都具有多种功能,而且软、硬件设备相结合,形成合理的性能价格比也是考虑的趋向。

(3)为进一步加快运算速度,增强实时性和进一步提高精度,改善处理质量,几种算法的混合运用,新的算法和变换也在不断地研究与发展。

(4)处理手段高级化,向仿生识别与智能识别方向发展。

由上可见数字信号处理这门新兴学科,涉及到很多内容,但作为大学本科生教材,本书只能讨论有关数字信号处理基础方面的内容。尽管如此,书中所述的基本理论、概念和方法,对深入学习和理解更多的数字信号处理内容和技术都还是很有帮助的。

第一章 离散信号与系统分析基础

数字信号处理与模拟信号处理相比,存在许多优点,而且,随着电子计算机的广泛应用和集成电路的日益发展,数字信号处理所涉及的应用范围越来越多。为了深入讨论数字信号处理的有关内容,必须首先掌握离散信号与系统的基本知识,这是学习数字信号处理的基础。 Z 变换也是本章的重要内容。另外在本章中还要介绍 Z 变换与拉氏变换以及与傅氏变换的关系。在讲述离散系统系统函数的基础上,讨论离散系统的频率特性。

第一节 离散信号与取样定理

一、离散信号

(一)离散时间信号(序列)

时间变量与幅度变量均为连续变量的信号叫作连续信号或模拟信号,我们所遇到的信号大多是这种模拟信号。但模拟信号不能直接用数字系统处理,必须将它首先加以离散化,得到离散信号(序列)后才能进行数字处理。离散时间信号是在时间上不连续的序列,用 $f[k]$ 或 $x[k]$ 表示, k 表示它们在序列中前后位置的序号,是一个整数。由取样产生的序列叫作取样序列,即 $f[k] = f(t)|_{t=kT} = f(kT)$, k 为整数,当 k 不为整数时无定义,而不应该认为此时的 $f[k]$ 数值为零。序列不一定必须由模拟信号经取样而得到,例如每隔一定时间所得到的温度记录数据本身就是一个离散时间信号。

(二)序列的基本运算

1. 序列的位移与翻转

设原序列为 $f[k]$,则 $f[k \pm n]$ 称作 $f[k]$ 位移后的序列,它是一个新的序列,其形状与 $f[k]$ 相同,只是向左或向右移动了一定的距离。 $f[k+n]$ 表示 $f[k]$ 向左(即前移) n 个单元(每个单元表示取样间隔 T)后的新序列,而 $f[k-n]$ 表示 $f[k]$ 向右移动(即延迟) n 个单元后形成的新序列。 $f[k]$ 、 $f[k+n]$ 与 $f[k-n]$ 的图形如图1-1(a)、(b)、(c)所示。 $f[-k]$ 表示 $f[k]$ 沿纵轴翻转, $f[-k]$ 称作 $f[k]$ 的翻转序列或折迭序列,其物理意义是,若 $f[k]$ 是存入计算机存储器中的数,则 $f[-k]$ 表示倒着取数。 $f[-k \pm n]$ 表示 $f[k]$ 首先翻转后得到 $f[-k]$,然后再向右或向左移动 n 个单元,它们的图形分别如图1-1(d)、(e)、(f)所示。

2. 序列的和与积

两个序列同序号的数值相加或相乘,可以分别得到两个新序列,即

$$y[k] = f_1[k] + f_2[k], \quad g[k] = f_1[k] \cdot f_2[k]$$

一个序列乘以常数 a ,即序列的每个值都乘以 a

设

$$f_1[k] = \{1, 2, 3, 4, 5\}, f_2[k] = \{5, 4, 3, 2, 1\}$$

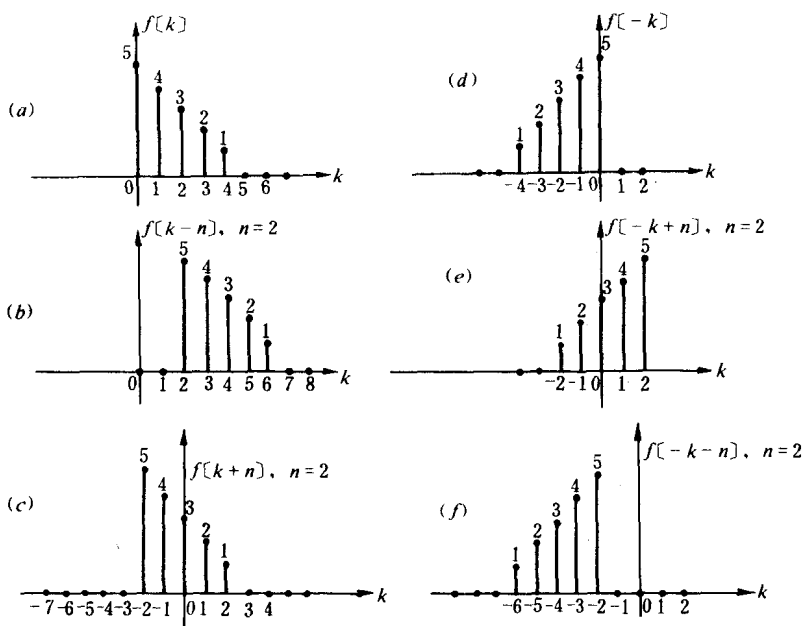


图 1-1 序列的位移与翻转

则

$$y[k] = f_1[k] + f_2[k] = \{6, 6, 6, 6, 6\}$$

$$g[k] = f_1[k] \cdot f_2[k] = \{5, 8, 9, 8, 5\}$$

$$v[k] = 2 \cdot f_1[k] = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

序列的延迟可通过延迟器实现,两序列的积可通过乘法器实现,序列乘以常数可通过标量乘法器实现,序列的和可通过加法器实现,如图 1-2 所示。延迟器、标量乘法器和加法器是构成数字信号处理系统的基本单元。这里只谈到序列的简单运算,此外尚有序列的差分和序列的卷积运算,将在后面详细说明。

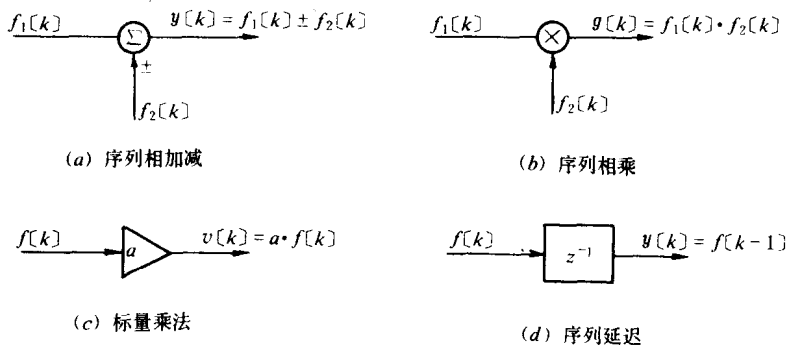


图 1-2 序列基本运算的实现

(三)常用的基本离散时间信号

1. 单位脉冲序列 $\delta[k]$

$\delta[k]$ 定义为

$$\delta[k] = \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k = 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

$\delta[k]$ 在 $k=0$ 处有一个单位值 1, 在其余各点上均为 0, 因此称为单位脉冲序列, 如图 1-3(a) 所示。它是一个最重要最常用的序列。 $\delta[k-n]$ 表示将 $\delta[k]$ 向右移动 n 个单元后形成的序列。当 $k=n$ 时, $\delta[k-n]=1$ 。 $\delta[k+2]$ 的图形如图 1-3(b) 所示。

2. 单位阶跃序列 $u[k]$

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

$u[k]$ 为右边序列如图 1-4(a) 所示。图 1-4(b) 是 $u[-k]$ 的图形, 表示 $-k \geq 0$, 即 $k \leq 0$ 时取值为 1 的序列, 它是一个左边序列。 $u[k-n]$ 表示 $u[k]$ 右移 n 个单元的新序列, 而 $u[-k-n]$ 表示 $u[-k]$ 左移 n 单元形成的新序列, 它们分别如图 1-4(c)、(d) 所示。

单位阶跃序列可以用单位脉冲序列表示为

$$u[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[k-n]$$

反之, 单位脉冲序列 $\delta[k]$ 也可用单位阶跃序列来表示, 即

$$\delta[k] = u[k] - u[k-1]$$

3. 矩形序列 $R_N[k]$

$$R_N[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (1-3)$$

矩形序列也叫矩形窗函数(门函数)如图 1-5 所示, 它是一个长度为 N 的有限长序列。显然有

$$R_N[k] = u[k] - u[k-N]$$

4. 正弦序列

$$f[k] = \sin k\Omega \quad (1-4)$$

若连续正弦信号为

$$f(t) = \sin 2\pi f \cdot t = \sin \omega t$$

式中 $\omega = 2\pi f$, 单位是弧度/秒。将连续正弦信号进行均匀取样, 设取样间隔为 T , 令 $t = kT$, 则

$$f(kT) = f[k] = \sin \omega kT = \sin k\Omega$$

式中 $\omega T = \Omega$, Ω 的单位是弧度, 我们将 ω 称作模拟域频率, 将 $\Omega = \omega T$ 叫作数字域频率。正弦序列的图形如图 1-6 所示。相应尚有其余弦序列。

5. 指数序列

(1) 实指数序列

$$f[k] = \begin{cases} a^k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

式中 a 为实数, $|a| > 1$ 时, 序列是发散的, $|a| < 1$ 时, 序列是收敛的, a 为负值时, 序列是正负交替的。

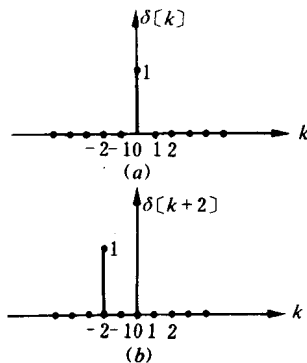


图 1-3 单位脉冲序列

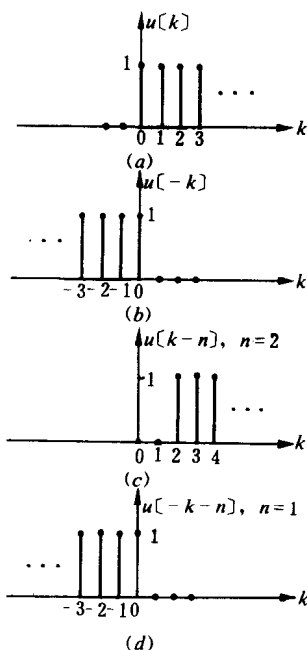


图 1-4 单位阶跃序列

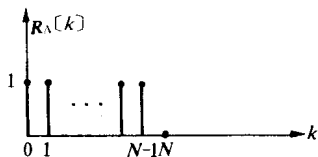


图 1-5 矩形序列

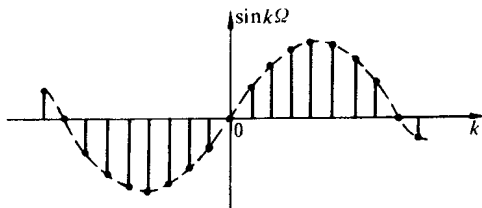


图 1-6 正弦序列

(2) 复指数序列

$$f[k] = e^{(\sigma + j\Omega)k} \quad (1-6)$$

将其展开成实部与虚部,得

$$f[k] = e^{\sigma k} \cos k\Omega + je^{\sigma k} \sin k\Omega$$

正弦序列和余弦序列可以用复指数序列表示为

$$\sin k\Omega = \frac{1}{2j}(e^{jk\Omega} - e^{-jk\Omega}), \cos k\Omega = \frac{1}{2}(e^{jk\Omega} + e^{-jk\Omega})$$

Ω 是正弦序列、余弦序列和复指数序列的数字域频率。

二、连续时间信号的取样及取样定理

前面已经提出,为了对连续信号(模拟信号)进行数字处理,首先要经 A/D 转换器对连续信号进行取样以得到离散信号,这个过程叫作数据采集。那么应以怎样的速率进行取样,才能使取样后得到的离散信号完全保留原来连续信号的全部信息呢?现在我们从理论上进行分析。

(一) 连续时间信号的取样

图 1-7(a) 是取样器的示意图,开关 S 周期性地上下运动,设其周期为 T ,当开关 S 与上面接点接通时,有信号输出;当开关 S 与下面接点接通时,没有信号输出。若开关 S 与上面接点接通的时间间隔为 τ ,那么输出信号 $f_s(t)$ 将是输入信号 $f(t)$ 的取样值, $f_s(t)$ 叫作取样信号,它是由许多宽度为 τ 的脉冲组成,各脉冲的间隔为 T 。取样信号的包络反应了原来连续信号的特征,如图 1-7(b) 所示。

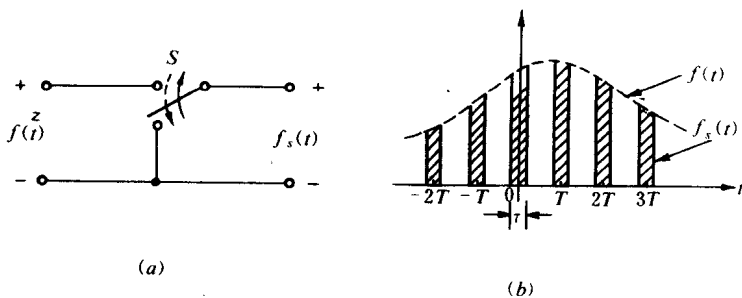


图 1-7 取样过程示意图

现在来研究在什么条件下,取样信号 $f_s(t)$ 才能保留 $f(t)$ 的全部信息,也即 $f_s(t)$ 包含 $f(t)$ 的全部频率成分。

上述取样过程可用一个乘法器的数学模型来描述,如图 1-8(a) 所示。其中 $s(t)$ 为开关函数,是一个周期为 T ,幅度为 1,脉冲宽度为 τ 的脉冲串,如图 1-8(b) 所示。

由图可见,取样信号为

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t) \quad (1-7)$$

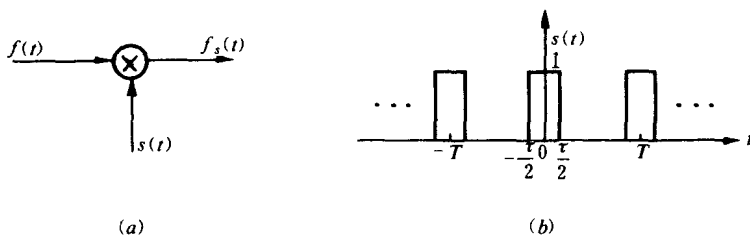


图 1-8 取样的数学模型

设 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(j\omega)$, $s(t)$ 和 $f_s(t)$ 的频谱函数分别为 $S(j\omega)$ 和 $F_s(j\omega)$, 根据傅里叶变换频域卷积定理, 有

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [F(j\omega) * S(j\omega)] \quad (1-8)$$

由信号分析可知

$$S(j\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(jn\omega_s) \delta(\omega - n\omega_s) \quad (1-9)$$

式中 $\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$, T 为取样周期, ω_s 为取样角频率。

其中

$$\begin{aligned} S(jn\omega_s) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} s(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{jn\omega_s t} dt \\ &= \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(n\omega_s \cdot \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_s \cdot \frac{\tau}{2}} = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(n\omega_s \cdot \frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

将 $S(jn\omega_s)$ 代入式(1-9), 得

$$S(j\omega) = \frac{2\pi\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(n\omega_s \cdot \frac{\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \quad (1-10)$$

可见 $S(j\omega)$ 是一个冲激序列, 它们分别出现在 $\omega = n\omega_s$ 处, 其强度为 $\frac{2\pi\tau}{T} \text{Sa}\left(n\omega_s \cdot \frac{\tau}{2}\right)$, 其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。可见各个冲激的强度是不同的。将式(1-10)代入式(1-8)中, 得

$$F_s(j\omega) = \frac{\tau}{T} \left[F(j\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(n\omega_s \cdot \frac{\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s) \right] \quad (1-11)$$

若已知 $F(j\omega)$ 的形状, 则可根据式(1-11)画出 $F_s(j\omega)$ 的图形如图 1-9 所示。图(b)假定 $F(j\omega)$ 是有限频带的, 其最高角频率为 ω_m , 而且假定 $\omega_s > 2\omega_m$, 否则 $F_s(j\omega)$ 将会出现频谱重迭。

(二) 理想取样及取样定理

为了简化对取样的分析, 掌握其实质问题, 我们假定取样器的开关 S 在上面接触的时间 $\tau \rightarrow 0$, 这便称作理想取样。在理想取样条件下, 开关函数可用均匀冲激序列近似表示为

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

此时

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT)$$

可见 $f_s(t)$ 是一系列的冲激函数, 其冲激强度反应了 $f(t)$ 的特征。

由信号分析可知