现代数学基础丛书

同调论

——代数拓扑学之一

● 沈信耀 著

科学出版社

现代数学基础丛书

同　调　论

——代数拓扑学之一

沈信耀　著

科　学　出　版　社

2002

内 容 简 介

本书是作者在为研究生开设代数拓扑学课程的讲义基础上整理而成的.全书共九章.第零章为预备知识,前三章介绍单纯同调论,第四章为当前流行的范畴论.从第五章开始介绍在一般空间上的连续同调论.后四章是CW空间、一般系数的同调论、乘积空间的同调论和Steenrod运算.

本书论述严谨,深入浅出.作者力图从较直观的几何概念出发引出极为抽象的概念.

本书适合于高校数学系高年级学生和研究生阅读.

图书在版编目(CIP)数据

同调论——代数拓扑学之一/沈信耀著.—北京:科学出版社,2002.7

(现代数学基础丛书)

ISBN 7-03-008745-3

Ⅰ.同… Ⅱ.沈… Ⅲ.同调论 Ⅳ.O189.22

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第42741号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年7月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2002年7月第一次印刷 印张:12 1/8

印数:1—2 000 字数:318 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

序　　言

1983 年夏，在改革开放和各项工作复苏的大环境下，为了重新推动代数拓扑学在国内的教学和发展，在厦门大学举办了一次讲习班．参加的人来自祖国各地．主讲人（按讲课顺序）为陈奕培，沈信耀，姜伯驹和吴振德四位．当时因为是文化大革命以后，能找到的参考资料不多．幸好由孙以丰教授翻译的《基础拓扑学》刚好出版，于是就选用它为主要参考书．

从厦门回到北京以后，我就应中国科学院研究生院的邀请，开始在研究生院为研究生开设“代数拓扑学”课程．为同学开列的参考书，除上述《基础拓扑学》外，还有江泽涵译《拓扑学》，冯康译《组合拓扑学基础》，Vick 著：“Homology Theory”，以及 Greenberg 著：“Algebraic Topology”等．开列这么多书是因为不同的年头，不是每种书都好找（买就更难）．由于开列的各书内容、讲法不尽相同，再加上听课的同学来自科学院的各个不同研究所，拓扑学的基础相差很多．因此编写一本适合我们需要的参考书，便成了我的一项任务．

在这种背景下，我开始动手写“代数拓扑学”讲义．

真写起来，首先遇到的是通过这门课要达到什么目的？其次是怎样达到这些目的．我给自己定的目标是：同学们通过这门课的学习，最主要的是能了解到“代数拓扑学”是怎样的一个学科，它能干什么，是怎样干的．至于传授代数拓扑学方面的知识，这当然是无疑义的．但我认为，更重要的是通过这些学习，要将代数拓扑学的基本思想和方法让同学知道，并进而能掌握、运用．因为具体的知识随着时间的推移，随着课题的变化，它也要更新．而基本的思想、方法，相对而言更重要，更稳定，更持久．以同调群为例，我们当然要将它作为最基本的概念予以介绍．但如果只是从形式上，说它是闭链群模边缘链群的商群，那么同学们将很

茫然. 因此, 如何通过这个形式上的定义, 将基本的几何想法传授给同学, 在我看来是比介绍这个定义更为重要的事. 实际上, 我觉得先讲基本的几何想法, 有了基本想法, 同调群的定义便顺理成章的得出. 这是从大的方面讲、从影响同调论的格局的角度讲. 其他的概念, 我觉得也应该从客观的需要, 很自然的来予以引进. 例如“星形”概念, 我在书中的处理, 就和常见的不同. 另外, 为了方便读者, 我还引用记号“¡”, 它后面的内容, 或者是提醒读者该注意的地方, 不要忽略; 或者是帮助读者更好地理解等等.

同学们对代数拓扑学的印象, 一般都是概念多而且抽象, 不好学. 这不奇怪, 因为第一, “先天不足”. 我们在大学里面, 相对于分析而言, 几何、代数的训练较少. 而代数拓扑学是几何学的一个分支. 它以代数为工具. 同学们对之可以说是从“零”开始, 感到陌生很正常. 第二, 代数拓扑学是以代数为工具来表达、研究拓扑不变量的. 也就是说, 要把代数、几何融合在一起. 这就更增加了难度. 第三, 代数拓扑经常是先建立一套理论, 然后才去解决问题. 如 J. F. Adams 解决 Hopf 不变量为 1 的问题, 就是先建立起高 (二) 阶运算的理论, 然后作为这种理论的一个应用, 把 Hopf 不变量为 1 的问题解决了. 又如他解决球上线性无关的最大切向量场问题, 也是利用 K 理论来完成的. 但我想, 如果能让初学者认识到, 拓扑学的目的是寻求拓扑不变量, 而同调论又是紧紧抓住边界是拓扑不变这一点的话, 那么学习同调论的很多困难都能迎刃而解.

如上所述, 我给自己定的目标是: 介绍代数拓扑学为何物, 它的基本想法是什么, 它能作些什么, 以及是如何作的. 当然这种介绍要通过具体事例来进行. 而阐述同一个思想、方法的事例很多. 因此, 选哪些, 不选哪些, 这就见仁见智了. 而且, 即使选同样的事例, 如何组织这些材料, 从什么角度切入, 安排起来也都会不同. 打一个不一定恰当的比方, 同样是贝多芬的第五交响乐, 同样是同一个交响乐团, 但由于指挥家的理解和诠释的不同, 演

奏出来的乐曲，风格、速度、节奏等都会有所不同.

在众多的以边界为出发点的同调论中，以单纯同调论最为直观、易懂. 因此与当今时尚的书籍均以抽象说法开头不同，我在本书中，仍以单纯同调论开始. 实际上，这一部分，我也经历了取—舍—取的过程. 即开始时，讲单纯同调论，后来不讲了. 但几经比较，从同学接受的角度讲，最终还是将它保留了下来.

讲单纯同调论不仅因为它直观、易于接受. 实际上，一般同调论中的基本东西，在单纯同调论中都有反映. 所以抓住这一环，对初学者而言不无裨益.

单纯同调论占三章.

从第五章开始，介绍如何将 (多面体上的) 单纯同调论推广为 (一般空间上的) 连续 (奇异) 同调论. 由于在建立连续同调论时，从形式上讲，它和单纯同调论的建立差别不大. 因此在这之前，我们将这个过程抽象为链复形. 并以之作为范畴的一个实例. 由于范畴论已成为当今流行的一种数学知识. 我们特辟一章予以简单介绍. 是为第四章.

上面已经提到，连续同调论的建立，在形式上和单纯同调论的建立差别不大. 实际上，连续同调论也仍然是以边界为自己的出发点. 对此，我们在第五章的开头，写了一段详细的阐述. 希望对初学者理解连续同调论的立论之本有所帮助.

第六章介绍 J. H. C. Whitehead 所引进的 CW 空间. 这类空间的重要性，包括它的广泛性，同伦技巧可以施展等，都已被公认. 我们从同调的角度，显示其优越性. 包括在它上面同调论唯一.

第七章介绍一般系数的同调论.

从这一章开始，我们将寻求几何背景的任务逐步转移给读者. 这是因为读者通过前一阶段的学习，应该已经体会到，形式上的代数定义有着明确的几何背景在指引. 不找到这种几何背景，形式上的代数定义将无从理解. 另一方面，也希望借此培养、锻炼读者在这方面的能力.

第八章介绍乘积空间的同调论.

这两章都要用到一些同调代数. 我们结合需要，将它们做了一些介绍.

由于 Steenrod 运算 (代数) 的重要性，我们在最后一章特别予以介绍. 希望为有意继续深入学习、钻研代数拓扑学的读者提供一些方便.

第零章汇集了书中将要用到的一些非拓扑学材料。

本书，从开始动手写初稿，至今已十载有余. 其间除在研究生院讲授外，还曾应邀在北京大学、云南大学讲过. 历届参加听讲的同学，提过不少意见. 我也边讲边改. 每讲一次都要改一些. 但每次改了又都嫌还没改好. 因此，虽早已有要我付梓之说，但迟迟未敢应命. 现在，研究生院原先油印的讲义，虽说是规定开学时借，考试后还. 但每次都不能如数收回. 每学期总有一些同学觉得用起来方便而忘了返还. 多年下来，所余之数已不敷周转所需. 重印又不可能. 于是抱着抛砖引玉，为历届同学留一书面材料和为今后想学代数拓扑的学人提供一些方便，便将有关同调论的材料重新审订增补一遍，编成此册，是为代数拓扑学之一. 余下的内容，有关同伦论，广义同调论等部分就留待他日了.

限于作者的水平，奢望如上，但一下子肯定达不到. 因此希望使用本书的老师、同学和其他读者多提意见，以便完善.

本书校样，余建明同志和潘建中同志分头看了前一部分 (到第三章) 和后一部分，提了一些改进意见. 潘建中同志在排版安排插图方面，李春英同志在纠正排版错误方面出了不少力. 在此向他们表示感谢. 作者还对科学出版社刘嘉善同志在本书的出版方面所做的多方协助表示感谢.

作　者

2002 年 2 月

目 录

绪论

本书介绍代数拓扑学，特别是其中的同调论．那么，什么是代数拓扑学呢？

代数拓扑学是拓扑学的一个分支，而拓扑学属于几何学．因此为了回答什么是拓扑学，首先需要回答什么是几何学．

几何学，对于我们大家来说并不陌生．我们从孩提时代开始就熟悉客观世界的几何图形．到了小学，我们学画图．到了中学，我们有平面几何和立体几何课．在大学，有解析几何、微分几何等课程．可是，到底什么是几何学呢？真要说清楚这个问题还并不容易．

下面我们介绍德国数学家 F. Klein 的看法．

德国数学家 Klein (1849~1925) 于 1872 年接替 von Staudt 出任 Erlangen 大学哲学院教授时，有一个就职演说 —— 最新几何研究的比较评论．在这篇就职演说里，他阐述了他的几何观．后人称之为 Erlangen 纲领．

Erlangen 纲领，不仅总结了到 19 世纪 70 年代为止所发现和研究的各种几何，还提出了什么是几何学的统一观点．

简单说，他认为，构成一门几何学，有两个要素．这两个要素是：一为由某种元素所构成的集合 (空间)；另一是，要有作用在这个空间上的一个变换群．空间里的两个图形 (子集) 叫做相等，如果存在变换群里的一个变换，将其中一个变为另一个．由于这个变换取自变换群，所以这样定义的相等是一个等价关系 (为什么？)．于是空间里的图形便被分成一些等价类．研究同一个等价类里各元素 (图形) 所共有的性质，即研究空间的图形 (子集) 在这个变换群下不变的性质，便构成一门几何学．特别地，研究等价类的特征性质，即寻求全系不变量的问题，更是各门几何学的中心课题．

这里，变换群和空间在决定几何学时同样重要．实际上，同一个空间，可能有不同的群在上面作用．于是同一个空间上，可以有多种几何学存在．特别，如果群 G 作用在空间 K 上，那么群 G 的子群 H 也可以作用在 K 上．于是 K 上就有相应于 G 和 H 的两种几何．显然，在 G 下不变的性质，也在 H 下不变．但反过来，在 H 下不变就不一定在 G 下不变．因此 K 上相应于 G 的几何，其内容比之 H 的几何要"少些"．也就是说，群越大的几何，其内容越"贫乏"．不过，这时，它的几何更"稳定"，适用范围更广．当然，因为它在更广的范围成立，也就更不容易获得．不过，一旦获得，它就具有更大的普遍性．

下面我们来看一些例子．

中学学过的、以公理方式展开的平面几何，是研究平面上的图形，在刚体运动 (由平移，旋转和反射构成的) 群下不变的性质．这时的不变量有距离，交角等．而两个三角形合同 (属于同一个等价类) 的充要条件是相应边相等，或两边夹一角相等．这些都是三角形合同的全系不变量．

这个几何，由于使用了欧氏平行公设："过线外一点，有一条而且只有一条直线和它不相交"．所以也称为欧氏几何．

立体几何情况类似．

在解析几何里面，我们用坐标来表示点．一个可逆变换叫做仿射变换，如果变换后的点，其坐标可用原来那个点的坐标的线性函数表示．显然，所有的仿射变换构成一个群，叫做仿射变换群．研究在这个变换群下不变的性质，便是仿射几何．这时的不变量有：直线 (直线仍变为直线)，直线的平行性 (相交)，线段的中点，直线上三个点的简单比值等．又，椭圆 (椭圆仍变为椭圆)，抛物线 (抛物线仍变为抛物线)，双曲线 (双曲线仍变为双曲线) 等也是仿射不变量．

在微分几何里面，我们利用微积分作为工具来研究比直线、二次曲线更一般的光滑曲线．我们知道，平面曲线完全由其曲率决定，即曲率构成了一组全系不变量．而空间曲线则由曲率和挠

率这两个函数决定. 亦即, 这两个函数构成了空间曲线合同与否的全系不变量.

除了以上这些几何以外, 我们知道还有所谓的投影几何学. 亦即, 研究图形在投影变换群下不变的几何学. 这时的不变量有: 线性关系, 共线 (点) 性, 交比, 二次曲线等.

不难看出, 以上几个群中, 投影变换群是最大的一个群. 仿射变换群是它的一个子群, 而刚体运动群又是仿射变换群的子群.

Klein 的 Erlangen 纲领, 是从总结到他那个时代为止的、各种几何所要完成的目标是什么这样一个高度而得到的. 他的这个总结, 可以说是继往开来的一个里程碑. 实际上, 他不仅总结、概括了当时的各种几何学, 而且明确地提出了, 应该研究拓扑学——一门研究图形在拓扑变换群下如何分类的新几何学. 特别是如何找全系不变量.

当然, Klein 关于什么是几何学的观点, 也有其时代的局限性. 今天的代数几何与微分几何就都不能统一于 Klein 的观点之下. 但在当时, 他的这个观点, 不仅给各种几何以一个系统的分类, 并提供了很多可供研究的方向. 此外, 他的这个有关研究变换群下不变性的观点, 其影响已超出数学本身, 而扩大到力学和一般的数学物理. 当人们注意到 Maxwell 方程经 Lorentz 变换是不变的以后, 变换下不变性的物理问题, 或者, 物理定律的表达方式不依赖于坐标系的问题也变得十分重要了.

在 Klein 关于什么是几何学的观点影响下, 拓扑学开始明确了自己的任务 (在此之前, 拓扑学虽已崭露头角, 但究竟应该如何推进, 并不明确), 这就是研究空间里图形的这样一些性质: 它们在拓扑变换之下是不变的, 特别是定出全系不变量. 于是自然会问: 有些什么性质是拓扑不变的呢? 我们又如何去寻求这些不变量呢? 它的全系不变量为何?

为此, 我们回顾一下拓扑变换的定义.

一个映射 (连续变换) 叫做是一个拓扑变换 (或同胚映射), 如果它本身是一一的, 它的逆变换也是连续的. 两个空间叫做是同

胚的，如果能找到一个同胚映射，将其中一个变为另一个．由于拓扑变换是如此的一般，因此，许多常见的量，例如，长度、角度等刚性量，不可能是拓扑不变的．同样，平行性，二次曲线也不可能在拓扑变换下不变．总之，空间的许多性质，在拓扑变换下要变．那么有无不变的呢？有的话，是哪些？怎么处理和利用它们呢？

拓扑学，从处理的方法上讲，可以分为点集拓扑学（或称一般拓扑学），代数拓扑学（又称组合拓扑学）和微分拓扑学．点集拓扑学是从集合论的角度，将几何图形视为点的集合，或进而视为空间（有邻域概念的点集），用集合论的方法予以研究．代数拓扑学，则是寻求并研究空间的、用代数形式表现出来的拓扑不变量．它早期是利用组合方法．现在发展成利用函数空间来达到目的．由于它只涉及连续性，因此，强有力的微积分工具，这时就无用武之地了．这大概也是许多人觉得代数拓扑学比较抽象、难接受的原因之一．与此形成对比的是微分拓扑学．微分拓扑学是利用微积分为工具，对流形进行研究．拓扑学的这些分支，它们互有区别，但又紧密相关．

上面已经提到，空间的许多性质在拓扑变换下是要变的．但是，也不是什么都得变．例如，空间的紧性，连通性就是拓扑不变的．实际上，这就是点集拓扑所关心的．那么从代数拓扑的角度看，有些什么性质是拓扑不变的呢？显然，两条曲线的交点数目是拓扑不变的．同样，不难想像，图形的相对位置关系是拓扑不变的．特别，图形及其边界的相对位置关系是拓扑不变的．但是，这是从几何上讲的．如何将它严格化、代数化呢？本书将要介绍的同调论，就是从这里演变出来的理论．

为了便于看清它的作用，我们先把“图形及其边界的相对位置关系是拓扑不变的”改述为“图形 γ 在空间 X 中是否为另一图形 Γ 的边界是拓扑不变的”．也就是说，γ 如果在 X 中为 Γ 的边界．那么，经拓扑变换 t 作用后，这一关系仍然保持．显然，γ 是否为 Γ 的边界，是一个整体性问题．即，它依赖于所考虑的

空间 X . 当空间 X 变化时，原来是边界的可以变成不是. 反过来，原来不是的，也可能随着空间 X 的扩大而变成是的. 例如，Γ 为平面上的单位圆盘， γ 为它的边界，即单位圆周. 于是当 X 为 Γ 时， γ 在 X 中为边界. 可是取 X 为 γ , 那么 γ 在 $X(=\gamma)$ 中就不再是另一图形的边界了. 所以我们说，一个图形是否为另一个图形的边界，和你在什么空间考虑有关. 也就是说，这是一个整体性的问题.

另一方面，一个图形是否为另一图形的边界，它不仅为拓扑变换所保持，实际上，这一性质也为映射所保持. 也就是说， γ 为 Γ 的边界的话，那么 $\varphi(\gamma)$ 和 $\varphi(\Gamma)$ 间也存在这种关系，这里 φ 为映射.

现在我们利用映射保持边界关系不变这一点，来说明单位圆盘 E^2 不可能有映入其边界 S^1 的映射 φ , 使 φ 限制在边界 S^1 上为恒同映射. 这只要注意，如果这种映射存在. 那么由于 S^1 在 E^2 中是边界，故经 φ 作用后， $\varphi(S^1)=S^1$ (这是 φ 在边界 S^1 上为恒同映射的条件) 在 $\varphi(E^2)=S^1$ 中也应为边界. 但显然这不可能.

利用上述“单位圆盘 E^2 不可能有映入其边界 S^1 的映射 φ, 使 φ 限制在边界 S^1 上为恒同映射”这个结论，我们就可以证明著名的 Brouwer 不动点定理：单位圆盘 E^2 上的任意一个自映射 f 必有不动点.

如果 $f: E^2 \to E^2$ 没有不动点，即对任意的 $x \in E^2$, 均有 $f(x) \neq x$, 那么就可以从 $f(x)$ 往 x 作射线. 设此射线与 E^2 的边界 S^1 交于点 $\varphi(x)$. 这样我们就有映射

$$\varphi: E^2 \to S^1,$$

但它限制在 S^1 上却是恒同映射！这不可能.

从这里可以看出，“图形的相对位置关系是拓扑不变的”这一点，并不像乍看那样不显眼，没有多大用处. 实际上，由它演绎出来的同调论，今天已经发展成数学的一个蔚为壮观的科目. 本

书将介绍它的一部分内容. 但是，毕竟同调论只利用了边界关系是拓扑不变这一点，许多不能用这一关系导出的性质，同调论就无能为力了. 例如，不能用它来区别两个空间是否同胚的问题. 所以虽然同调论有很丰硕的成果，但是它并不构成全系不变量. 实际上，空间的拓扑分类问题至今没有彻底解决，只是在一些特殊的情形找到了全系不变量.

从边界是拓扑不变出发的同调群，经过许多数学家的努力，发现它就是由某种函数空间在一种叫做同伦的等价关系下的等价类所构成的群. 实际上，以 X 为定义域 (或值域) 的函数空间是 X 的拓扑不变量早就知道. 只是这种空间没法处理，没法利用，所以一直放在一边. 随着拓扑本身和其它数学分支的发展，今天我们已经有能力对函数空间进行研究，因此同调论也进入一个新的发展阶段. 不过，建立在边界关系是拓扑不变的这一事实之上的同调论，仍然发挥着它的作用，不容忽视.

第零章　欧氏空间、群、模的有关材料

这一章，我们将以后要用到的有关欧氏空间，群和模的材料汇总如下.

0.1　定义　设 G 是一个非空集合，$\circ : G \times G \to G$ 是函数. 如果下述条件 1) —3) 成立，则称 G 为群，$\circ$ 是它的运算.

1) 结合律：$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,

2) 有单位元：存在 e 使 $e \circ g = g \circ e = g$ 对任意的 $g \in G$ 成立,

3) 有逆元：对任意的 $g \in G$，有 $g^{-1} \in G$ 使 $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

当群 G 的运算 $\circ$ 适合

4) 交换律：$g \circ g' = g' \circ g$ 对任意的 $g, g' \in G$ 成立时，称 G 为交换群，或 Abel 群. 在交换群里，运算 $\circ$ 记为 $+$，元素 e 记为 0, 而 g^{-1} 记为 $-g$.

¡　可以证明：

1) 群中适合条件 2) 的元 e 唯一，称为 G 的单位元,

2) 群中适合条件 3) 的元 g^{-1} 唯一，称为 g 的逆元.

0.2　定义　集合 V 满足条件：

1) V 中有一个运算 $+$. 在这个运算下，V 是 Abel 群,

2) V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的模，即：对 $x \in V$ 和实数 $\lambda \in \mathbb{R}$，有数乘 $\lambda x \in V$，使

(i) $1x = x, x \in V$,

(ii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ x, y \in V$,

(iii) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in V$

成立，则称 V 为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，或简称为实线性空间. V 中的元素叫做点或向量. 向量 x 和 y 的差 $x - y = x + (-y)$.

0.3　例　行向量 $(m_1,\cdots,m_n)$ 的全体，按下面的运算和数乘构成一个线性空间：

$$(m_1,\cdots,m_n)+(l_1,\cdots,l_n)=(m_1+l_1,\cdots,m_n+l_n),$$

$$\lambda(m_1,\cdots,m_n)=(\lambda m_1,\cdots,\lambda m_n).$$

0.4　定义　设 $x_1,\cdots,x_k$ 为线性空间 V 中的一组向量，$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 为实数. 称表达式

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k$$

为 $x_1,\cdots,x_k$ 的线性组合. 而

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k=0$$

为 $x_1,\cdots,x_k$ 的线性关系.

0.5　定义　线性空间 V 中的一组向量 $x_1,\cdots,x_k$ 叫做是线性相关的，如果存在不全为零的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 使线性关系

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_kx_k=0$$

成立. 否则称它们为线性无关的.

0.6　命题　向量组 $x_1,\cdots,x_k$ 是线性相关的，当且仅当存在一个向量，它可写为它前面的诸向量的线性组合.

0.7　定义　线性空间 V 中的一组向量 $x_1,\cdots,x_k$ 叫做是一个母元组，如果 V 中的每个向量都可以用它们的线性组合表示.

一个母元组叫做一个基，如果母元组中的诸向量是线性无关的.

0.8　命题　从每个母元组中总可以挑出一个基.

0.9　命题　如果向量空间 V 的某个基中只有有限个向量，那么其他的基中也只有有限个向量，而且个数相同. 这个数 n 叫做线性空间 V 的维数. 这时将 V 记为 V^n.