系统辨识理论与实践
——在水电控制工程中的应用

涂彬周　李永华　编著

中国电力出版社

系统辨识理论与实践

——在水电控制工程中的应用

徐枋同 李永华 编著

电力科技专著出版资金资助项目

中国电力出版社

内容提要

系统辨识是以试验加分析的方法建立被研究对象（被控系统）的数学模型，它是现代控制论的重要支柱之一。

本书系统地阐述辨识的基本理论和方法，并侧重于理论与实践的结合。全书共十四章，其中第一～九章为基本理论和方法，第十、十一章为实现辨识技术的微机软、硬件配置与设计，第十二章和第十三章分别为系统辨识在水电厂机组控制和安全与经济运行方面的应用，第十四章为水电机组的辨识试验。每一章都以相当数量的篇幅安排了具体的应用实例，这些内容也是作者多年来研究工作和实践的总结。

本书主要面向从事控制工程的技术界人士和高校研究生，特别适用于从事水电控制工程的技术工作者。本书能有助于系统辨识在水电领域的推广和应用。

图书在版编目（CIP）数据

系统辨识理论与实践——在水电控制工程中的应用/徐枋同，李永华编著．-北京：中国电力出版社，1999

ISBN 7-5083-0047-5

Ⅰ．系… Ⅱ．①徐… ②李… Ⅲ．系统辨识-理论-应用-水力发电站-控制设备 Ⅳ．TV734．3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 16954 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号 100044 http://www.cepp.com.cn）

实验小学印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

1999 年 8 月第一版 1999 年 8 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 14.5 印张 328 千字

印数 0001—1500 册 定价 27.00 元

前　　言

系统辨识与参数估计（简称系统辨识）理论是60年代从现代系统理论发展出来的一个分支，它以试验加分析的方法建立被研究（或控制）对象（系统）的数学模型，特别是动态系统的模型描述。其中，系统辨识是指从系统的输入输出数据推断出系统的模型结构，而参数估计是在已知的模型结构上估计其参数。对于具有一定因果关系的工程系统，根据其输入输出数据来建模是一种有用的方法。

1962年，L. A. Zadeh曾给辨识下过一个定义“根据系统的输入输出数据，从给定的模型类中，确定一个与所测系统等价的模型”。这个定义点明了辨识的三个要素：①输入输出数据，它是辨识计算的基础。②指定的模型类，即寻找模型的范围。③等价的准则，即所选模型与数据相拟合的优化准则。按照Zadeh的定义，要求所建的模型与真实系统完全等价，这在实践中是难以做到的。于是后来P. Eyknoff、V. Strejc、L. Ljung等人相继又从实用的角度对辨识的定义作了补充和解释，即所要求的只是一个能表示动态系统本质特征的适合于应用的模型。

应该看到，现代控制理论的发展和动态系统的日趋复杂性是促使系统辨识理论迅速发展的推动力，而计算机技术的发展则是系统辨识学科得以发展的强大物质支柱，否则系统辨识只可能停留在一大堆数学公式上。显而易见，系统辨识不仅是理论性而且实践性也很强的一门学科。从1967年起，国际自控联（IFAC）每三年召开一次“系统辨识和参数估计国际专业讨论会”，系统辨识学科取得了飞速的发展。为数众多的论文和多种多样的研究方法，使一些国外学者喻之为“一口袋的技巧”。要想从如此丰富而庞杂的内容中做出某种归纳和总结，使之条理化和系统化是件不容易的事。但至少可以这样评价，到今天，对于线性系统的辨识，在理论上日臻完善，有比较系统的方法。但对非线性系统的辨识问题，目前尚未有成熟的理论和统一的方法。

现在，应用系统辨识的理论和技术建立数学模型的工作已日益被工程技术界所重视。系统辨识已成功地为化工、船舶操纵、电力工业、玻璃制造等行业提供了数学模型和控制方案、还在环境、生物、生物医学、社会经济等系统获得了广泛的应用。

在水利、水电工程技术界，应用系统辨识理论相对于有些专业而言起步较晚，但近些年来发展很快。例如水文工作者用系统辨识理论或灰色理论来建立暴雨径流（时间序列）的数学模型，取得了成效。在水电厂的水轮发电机组控制系统中，作为被控对象的水轮机其特性复杂，运行工况变化大，而且变化频繁。要想完全依靠力学、电学等物理定理来描述其动态特性从而得出数学模型，可以说是难以实现的。对于现场真机来说问题就更复杂，即使同一水电厂中的机组，虽然型号完全相同，但由于安装质量，引、排水流道等条件的差异，其特性也不可能完全相同，有的甚至差别很大。因此应用系统辨识理论建模是解决此难题的一个很好的途径。另外，随着电力系统的规模扩大，水轮发电机组单机容量和电厂

总容量的迅速增大，对水轮机组调节系统的控制水平提出了更高的要求。水电机组本质上是一个非线性、时变、多输入的被控对象，随着微机调速器的日益成熟，传统的定参数PID控制模式完全有条件逐步采用更高级的控制模式来替代。而系统辨识理论正是水轮发电机组实现自校正、自适应控制必不可少的理论和技术基础。

面对以上现实情况，作者认为有必要写一本书，将我们对系统辨识理论的理解，及其在工程中，特别是在水电控制工程中应用的实践经验总结出来，以适应系统辨识理论在水电工程界推广应用这一客观需要。

作者结合水轮发电机组的控制系统和工业上的位置伺服系统，从事系统辨识和建模的科研和教学工作十余年，多次为研究生讲授此课程。与课题组同志一起先后开发研制了数代（Z-80单板机、S-100总结8位工控机、STD总线16位工控机、STD总线16位单片机）由工业控制机及以工业控制机与微机组成的双微机在线辨识装置。曾多次去水电厂（如黄坛口、黄龙滩、凤滩、古田一级、磨子潭等水电厂）进行真机辨识试验。同时还在火电厂锅炉用的蛇形管弯管自动生产线上为弯管的精密定位伺服系统进行辨识工作，为该系统的控制器设计提供了有用的数学模型。基于以上工作背景，我们希望此书的内容能够在理论与实践的结合方面为系统辨识这门学科添上一砖一瓦。当今有关系统辨识与参数估计的书籍已经不少，论文更是为数众多，但是内容大都偏于系统辨识理论和算法，再附以较简单的仿真算例，而真正来源于工程实践的内容则偏少，特别是结合水力发电工程的则更为少见。我们认为系统辨识在水电工程界至今未受到应有的关注，除了其他种种原因外，恐怕与这方面内容的欠缺不无关系，因此，我们希望本书能起到抛砖引玉的作用。

系统辨识不仅是一门理论性强，而且也是实践性很强的学科。用再好的算法建立起来的模型，最终还必须通过实践的检验才能被确定和认可。辨识工作涉及数据的采集、处理、传输以及计算机的应用等多方面技术，只要其中某个环节配合不上，就会导致整个辨识工作的失败。所以本书特别对辨识试验的实践给予了高度的重视。书中以相当比例的篇幅阐述了在工程中系统辨识的具体实施方案，这些方案都是作者与课题组同志在实验室和现场试验中经过检验行之有效的，所以具有实用参考价值。本书为了突出系统辨识理论与应用的相互依存关系，在阐述原理和算法的基础上，每一章均安排了应用实例，这些内容也是作者多年来从事这方面工作的成果总结。

本书内容限于讨论离散时间模型的辨识问题。由于工业被控对象大都在时间上是连续的，因此，连续时间模型才是其最直接和最自然的描述。连续模型的参数与被描述对象的动力学特性有着直接的对应关系和物理含义。事实上，经典辨识中的一些方法可以归并为连续时间模型的辨识法。例如阶跃响应法，就是由对象的阶跃响应实验曲线获得其S域传递函数的；又如频率响应法是由系统的频率响应获得S域传递函数的。当然，经典方法只考虑确定性信号，在噪声不允许忽略的情况下，所得结果将会有较大的误差。另外，上述经典方法不能在线进行辨识，在应用上就有很大局限。应用现代辨识理论对系统进行连续模型的辨识，主要的困难在于微分方程的数学处理和需要量测有关物理量的各阶导数。近些年来，国内外学者在连续模型的直接辨识方法方面做了许多工作，其中以积分法中的Walsh函数法和块脉冲函数（BPF）法较方便实用。结合水电工程，在连续模型的辨识上我

们也做过一些工作[1,2]，为了不使本书内容过于庞大，这类辨识问题不收入本书中。

本书主要是面向工程技术界，特别是水电控制工程的同行，因此在理论内容上不去求多求全，我们只选择其中基本的。事实上，在辨识算法上的改进与数值计算方法密切相关连，考虑到阅读对象的实际情况，我们不作过多的展开。在取材上，结合水电机组控制系统的实际，对多输入多输出（MIMO）系统的辨识，本书只选取了最基本的内容，也可以称之为“要义”吧。对于非线性系统辨识，结合水电控制工程系统，虽然我们也做过一些工作[3]，但由于非线性系统辨识的理论和方法尚不成熟，所以没有收入本书。根据我们的体会，水轮机调节系统被控对象的动态特性，在一定范围内用线性模型可以取得较好的描述（拟合）。而在大范围内，即使是静特性的描述，至今尚未有满意的数学表达式，通常只能采用列表的方式。非线性动态模型的建立确实存在着很大的困难。神经网络具有通过学习逼近任意非线性映射的能力[4]，从系统辨识的角度看，其中循环神经网络代表了动态非线性模型。将神经网络应用于水电控制工程系统（非线性）的辨识建模，我们也做了一些探讨[5]，可望给我们开辟一条新的途径，而这些已越出本书内容的范畴了。

本书之所以能够出版问世，得益于电力科技专著出版基金的资助，在这里谨向基金办公室和专著评审委员会的专家们表示衷心的感谢。同时，作者也要感谢先后曾参加过现场试验的武汉水利电力大学陈启卷、王学武、蔡维由、谭玖芳、吴畏、陈光大和武汉汽车工业大学的陆丰奎、杨熔、张亮等老师，以及以陈建为首的多届研究生，还有配合现场试验的工厂的同志们，没有他们的参与，要完成这些大型试验也是不可能的。

最后还要感谢徐恺同志在本书撰写过程中的参与和支持，特别是在数字信号处理和MATLAB语言编程方面，他的工作为本书的内容增添了特色。

作者学识有限，错误和疏漏之处在所难免，还望同行专家和广大读者提出宝贵意见，不吝指正。

作　者

1997 年 11 月

---

[1] 徐枋同、邓志敏．水轮发电机的连续模型辨识——块脉冲函数的应用．湖北暨武汉仪器仪表学会 1990 学术会议论文

[2] 邓志敏．水轮发电机组的连续时间模型辨识．硕士学位论文．武汉水利电力大学，1990

[3] 张宇．自适应水轮机调速器研究．硕士学位论文．武汉水利电力大学，1993

[4] 李永华，杨熔，张亮，徐枋同．用神经网络建立含继电非线性特性的调速系统模型．1996 两岸机电及控制技术交流学术研讨会论文集．台北，1996

[5] 陈启卷．系统辨识和智能化控制及在水电机组中的应用．博士学位论文．武汉水利电力大学，1996

目　录

第一章 水电控制工程中的数学模型

第一节 数学模型的几种描述方法

工业被控对象一般都是时间连续的，即连续时间系统，其动力学特性用微分方程描述。大量的工程实践问题经线性化处理后，可用线性常微分方程描述，称为线性连续模型。由于微分方程中的变量是系统输入量和输出量的导数，一般情况下难于量测，而且系统辨识的数据采集和算法均需用计算机来完成，所以现代辨识方法均采用离散时间模型。为了模型的通用性，可将所得到的离散时间模型转换为连续时间模型，当然这种转换必将带来某种程度的近似。

线性系统的辨识，在理论上和方法上已较成熟，也是我们讨论的重点。对于要用非线性微分方程描述的系统，系统辨识迄今尚缺乏一种统一的数学理论[1]，只是对某些特定结构的模型才能进行。

数学模型按其形式可分为非参数模型和参数模型两类，前者是以时间 t 或频率 ω 为自变量，如脉冲响应、阶跃响应、频率响应。后者是指显含参数的动态特性模型，如传递函数(阵)、微分方程、状态方程和差分方程。早期的(或称经典的)辨识方法只能获得非参数模型。

根据干扰或噪声的情况，模型又可分为确定性的和随机性的。当噪声不容忽略时，应采用随机模型来描述系统。

第二节 动态系统模型间的转换

一个动态系统根据应用的需要可用不同的数学模型来描述，模型之间可相互等价转换。现代辨识方法一般得到的是参数模型类中的差分方程形式，为了设计或整定控制器需用脉冲传递函数，为了更通用地描述连续对象的特性，需采用传递函数。反之，当我们在进行辨识之前，往往可根据一定的先验知识和理论依据，试写出对象的状态方程或微分方程，并转换成离散的状态方程或差分方程，以供选择模型类别时参考。下面即按上述应用需要介绍单输入单输出(SISO)系统数学模型间的转换关系。

一、由差分方程写出脉冲传递函数并转换为(连续)传递函数

1. 差分方程化为脉冲传递函数

u 为输入量，y 为输出量，差分方程为

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) \tag{1-2-1}$$

式中：q^{-1}代表时间平移算子，$q^{-1}y(k)=y(k-1)$；$A(q^{-1})$、$B(q^{-1})$为多项式，即

$$
\left.\begin{aligned}
&A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_n q^{-n} \\
&B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots - b_m q^{-m} \\
&m \leqslant n
\end{aligned}\right\} \tag{1-2-2}
$$

对式(1-2-1)两边取 Z 变换

$$
A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})U(z)
$$

所以脉冲传递函数

$$
G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \tag{1-2-3}
$$

可见脉冲传递函数实际上与差分方程是一一对应的。

2. 脉冲传递函数转换为(连续)传递函数

脉冲传递函数的参数值与采样周期 T 有关，由于一般工业对象都是连续过程，因此常需要将辨识得到的脉冲传递函数转换为传递函数以便于通用。常用的转换方法是双线性变换(Tustin)法。当采样频率远高于系统的工作频带上限$\left(\text{即}\frac{\omega T}{2} \ll 1\right)$时，双线性变换能保证传递函数在变换前后有相近的频率特性。在实际使用中应取值 $\omega T < 0.5$[16]。双线性反变换公式为

$$
z^{-1} = \frac{2 - Ts}{2 + Ts} \tag{1-2-4}
$$

当模型阶次较高时，手算计算工作量较大，所以下面给出用计算机计算的方法[10]。

为了一般性，设离散模型为

$$
G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{(m-1)} z^{m-1} + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} z^{-d} \tag{1-2-5}
$$

式中：d 为纯滞后的拍数。

经变换后的连续模型为

$$
G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0} e^{-\tau s} \tag{1-2-6}
$$

其中：$\tau = dT$。

两种模型系数间的关系式为

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta_{n-j} = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=0}^{m} b_i w_{ij}, \qquad j = 0, 1, \cdots, n \\
&\alpha_{n-j} = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=0}^{n} a_i w_{ij}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \\
&\alpha_n = \sum_{i=0}^{n} a_i w_{io} \\
&a_0 \underline{\underline{\mathrm{def}}} 1 \\
&w_{ij} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{i-k} C_{n-i}^{j-k} C_i^k 2^j T^{n-j}, i, j = 0, 1, \cdots, n \\
&C_P^Q \underline{\underline{\mathrm{def}}} \begin{cases} 0, & Q > P \text{ 或 } Q < 0 \\ 1, & Q = P \text{ 或 } Q = 0 \\ \dfrac{P(P-1)\cdots(P-Q+1)}{Q!}, & Q < P \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{1-2-7}
$$

反之，当需要将连续模型

$$G(s)=\frac{\beta_m s^m+\beta_{m-1}s^{m-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}e^{-\tau s},\quad m\leqslant n \tag{1-2-8}$$

转换为离散模型时，利用双线性变换公式

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{1-2-9}$$

可得离散模型

$$G(z^{-1})=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}z^{-d} \tag{1-2-10}$$

式中：$d=\tau/T$。

两种模型系数间的关系为

$$\left.\begin{aligned}
&b_{n-j}=\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{m}\beta_i\left(\frac{2}{T}\right)^iV_i, && j=0,1,\cdots,n\\
&a_{n-j}=\frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\left(\frac{2}{T}\right)^iV_{ij}, && j=0,1,\cdots,n-1\\
&a_0=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\left(\frac{2}{T}\right)^iV_{in}\\
&a_n\ \underline{\underline{\mathrm{def}}}\,1\\
&v_{ij}=\sum_{k=0}^{j}(-1)^{i-k}C_{n-i}^{j-k}C_i^k,i,j=0,1,2,\cdots,n
\end{aligned}\right\} \tag{1-2-11}$$

C_P^Q 定义同式(1-2-7)。

二、由（连续）状态方程转换为离散状态方程和差分方程

1. 由连续状态方程转换为离散状态方程

高阶线性微分方程经选择状态向量 $\boldsymbol{X}$ 后，写成一阶微分方程组的形式即为状态方程。定常 SISO 系统的状态方程模型为(省略自变量 t)

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}&=\boldsymbol{FX}+\boldsymbol{G}u\\ y&=\boldsymbol{CX}+Du\end{aligned}\right\} \tag{1-2-12}$$

实践中一般按零阶保持采样，对应的离散状态空间模型为(省略采样周期 T)

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}(k+1)&=\boldsymbol{AX}(k)+\boldsymbol{B}u(k)\\ y(k)&=\boldsymbol{CX}(k)+Du(k)\end{aligned}\right\} \tag{1-2-13}$$

式中：$\boldsymbol{A}=\exp\{\boldsymbol{FT}\}$；$\boldsymbol{B}=\int_0^T\exp\{\boldsymbol{F}\tau\}B\mathrm{d}\tau$；$\boldsymbol{C}$、$D$ 不变。

变换中的关键是计算矩阵指数 $\exp\{\boldsymbol{FT}\}$，方法有按矩阵指数的级数展开、Laplace 变换、Cayley—Hamilton 定理以及将 $\exp\{\boldsymbol{FT}\}$ 通过线性变换成对角阵等，读者可参阅有关书籍[14]。

离散模型式(1-2-13)一般是非规范型的，其所含的参数数目最多可达 n^2+2n 个，如果过程是可控和可观的，则适当选择变换矩阵，对式(1-2-13)作线性变换，使其成为规范型状

态空间模型（可控规范型或可观规范型），则系数可减少到 $2n$ 个，这将有利于参数辨识。需要指出的是如果状态方程式(1-2-12)是完全可控(完全可观)的，经离散化后的离散状态方程式(1-2-13)要保持完全可控（完全可观）的充分条件取决于采样周期 T 值的选择[15]。

2. 由离散状态方程转换的差分方程

下面给出由离散状态方程(完全可观的)到差分方程的变换[10]。设 SISO 过程

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{X}(k+1) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}u(k) \\ y(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(k) \end{aligned}\right\} \tag{1-2-14}$$

完全可观。其中 $\boldsymbol{X}$ 为 n 维状态向量，则与其唯一对应的差分方程为

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \tag{1-2-15}$$

式中：a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式系数，即

$$\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

$$\left.\begin{aligned} [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^{\mathrm{T}} &= \boldsymbol{P}\Gamma_0\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{P} &= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_1 & & 0 & \\ \vdots & & & \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Gamma_0 &= [\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \vdots \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \vdots \cdots \vdots (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{n-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{1-2-16}$$

式中：Γ_0 为方程式(1-2-14)的可观测阵。

三、由脉冲传递函数转化为离散状态方程[11]

设脉冲传递函数为

$$\left.\begin{aligned} G(z^{-1}) &= \frac{b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \\ b_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-2-17}$$

可化为离散状态方程

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(k) + \boldsymbol{B}u(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(k) \end{cases}$$

当为可控规范型实现时，其系数阵为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{I}_{n-1} & \\ 0 & & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{C} &= [b_n \quad b_{n-1} \quad \cdots \quad b_1] \end{aligned}\right\} \tag{1-2-18}$$

当为可观规范型实现时，其系数阵为

$$
\left.\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ & & & -a_{n-1} \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & -a_1 \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} \\
C &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]
\end{aligned}\right\} \tag{1-2-19}
$$

如果传递函数的分子分母具有相同的阶次，即

$$
G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} \tag{1-2-20}
$$

此时可先作一次长除将式(1-2-20)变成

$$
G(z^{-1}) = b_0 + \frac{b'_1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b'_{n-1} z^{-(n-1)} + b'_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}} \tag{1-2-21}
$$

则可控规范型的离散状态方程为

$$
\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \\ y(k) = CX(k) + Du(k) \end{cases}
$$

式中：A、B 阵同式(1-2-18)；C 和 D 为

$$
\left.\begin{aligned}
C &= [b'_n \quad b'_{n-1} \quad \cdots \quad b'_1] \\
D &= b_0
\end{aligned}\right\} \tag{1-2-22}
$$

四、由状态方程转换为传递函数

1. 连续系统

设连续 SISO 系统的状态方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= FX + Gu \\
y &= CX + Du
\end{aligned}
$$

则在零初始条件下对应的传递函数为

$$
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - F)^{-1}G + D
$$

对应于 MIMO 系统，状态方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= FX + GU \\
Y &= CX + DU
\end{aligned}
$$

则传递函数阵为

$$
G(s) = C(sI - F)^{-1}G + D
$$

2. 离散系统

离散 SISO 系统的状态方程为

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = CX(k) + Du(k)$$

在零初始条件下，其脉冲传递函数为

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

同理，对于 MIMO 系统，有脉冲传递函数矩阵

$$\boldsymbol{G}(z) = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

显然，它们与连续系统的传递函数(矩阵)是极其相似的，它们具有完全相同的代数性质，因此有关连续系统传递函数(矩阵)导出的一切结论都适用于离散系统的脉冲传递函数矩阵。

五、由脉冲响应序列转换为脉冲传递函数

按定义，对脉冲响应序列$\{g(n)\}$取 Z 变换即为脉冲传递函数，即

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)z^{-n} \tag{1-2-23}$$

但是实践中，用式(1-2-23)是写不出用有理函数表达的$G(z)$的。下面我们不加证明介绍用 Hankel 矩阵法来求取$G(z)$中分子分母的系数值，这里

$$G(z) = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots + a_nz^{-n}} \tag{1-2-24}$$

Hankel 矩阵的定义是

$$\boldsymbol{H}(1,k) = \begin{bmatrix} g(k) & g(k+1) & \cdots & g(k+l-1) \\ g(k+1) & g(k+2) & \cdots & g(k+l) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(k+l-1) & g(k+l) & \cdots & g(k+2l-2) \end{bmatrix}$$

它是可逆的，其中各元素为各离散时刻的脉冲响应幅值。根据脉冲响应序列与离散状态方程参数阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$之间的关系

$$g(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B} \tag{1-2-25}$$

可推导出

$$\begin{bmatrix} g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \\ g(2) & g(3) & \cdots & g(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g(n) & g(n+1) & \cdots & g(2n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g(n+1) \\ g(n+2) \\ \vdots \\ g(2n) \end{bmatrix} \tag{1-2-26}$$

和

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(1) \\ g(2) \\ \vdots \\ g(n) \end{bmatrix} \tag{1-2-27}$$

因此，只须将脉冲响应序列$g(k)$，$k=1, 2, \cdots, 2n$，依次填入式(1-2-26)和式(1-2-27)的相应项，即可求得式(1-2-24)中$G(z)$的各系数。

第三节 水电控制工程中几种模型的应用

水电控制工程主要是指水轮机调节系统和发电机励磁调节系统，前者通过调速器自动调节机组的转速（频率）和有功功率；后者通过励磁调节器调节发电机端电压和无功功率。因此水电控制工程中的主要被控对象为水轮机、压力引水管道和同步发电机。根据所讨论的输入输出量的不同，其描述对象特性的数学模型也不相同。

一、用传递函数描述

1. 水轮机

混流式和轴流定桨式水轮机，其动态特性可用如下函数形式表示[3]

$$\left.\begin{aligned} M_t &= M_t(H, n, a) \\ Q &= Q(H, n, a) \end{aligned}\right\} \tag{1-3-1}$$

式中：M_t 为水轮机主动力矩；Q 为过流量；H 为工作水头；n 为转速；a 为导叶开度。

函数应呈非线性关系。但如考察某一稳定工况点附近的小范围，则可将其线性化，即将上式用泰勒级数展开且只取第一项，得

$$\Delta M_t = \frac{\partial M_t}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial M_t}{\partial n}\Delta n + \frac{\partial M_t}{\partial a}\Delta a$$

$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial Q}{\partial n}\Delta n - \frac{\partial Q}{\partial a}\Delta a$$

式中：$\Delta M_t = M_t - M_{t0}$；$\Delta Q = Q - Q_0$；$\Delta n = n - n_0$；$\Delta a = a - a_0$。

下标“0”均表示稳定工况点的基准值。再用相对于额定值的标么量来代替上述诸量，即 $m_t = \frac{\Delta M_t}{M_t}$，$q = \frac{\Delta Q}{Q_r}$，$h = \frac{\Delta H}{H_r}$，$x = \frac{\Delta n}{n_r}$，$\tau = \frac{\Delta a}{a_r}$。而且考虑到实践中接力器行程 Y 与导叶开度 a 常有线性关系，而行程测量方便，故用 Y 来代替 a，即 $\Delta Y = Y - Y_0$，$y = \frac{\Delta Y}{Y_m}$，Y_m 为接力器最大行程。于是有

$$m_t = \frac{\partial m_t}{\partial h}h + \frac{\partial m_t}{\partial x}x + \frac{\partial m_t}{\partial y}y$$

$$q = \frac{\partial q}{\partial h}h + \frac{\partial q}{\partial x}x + \frac{\partial q}{\partial y}y$$

或

$$\left.\begin{aligned} m_t &= e_h h + e_x x + e_y y \\ q &= e_{qh} h + e_{qx} x + e_{qy} y \end{aligned}\right\} \tag{1-3-2}$$

式中：e_h、e_x、e_y 分别为水轮机转矩的水头传递系数、转速传递系数和接力器行程传递系数，$e_h = \partial m_t/\partial h$、$e_x = \partial m_t/\partial x$、$e_y = \partial m_t/\partial y$；$e_{qh}$、$e_{qx}$、$e_{qy}$ 分别为水轮机流量的水头传递系数、转速传递系数和接力器行程传递系数，$e_{qh} = \partial q/\partial h$、$e_{qx} = \partial q/\partial x$、$e_{qy} = \partial q/\partial y$。

式(1-3-2)中六个传递系数应根据水轮机的动态特性求取，而且显然它们是随工况而变化的。根据流体力学理论，水轮机过渡过程中，每一时刻的瞬时力矩系由稳态力矩和动态附加力矩两部分组成[18]。稳态力矩可从水轮机稳态试验的综合特性曲线换算得出。动态附

加力矩是由于过渡过程中各种参数变化，其中主要是水流惯性产生的。经Г.И. 克里夫琴柯研究，水流惯性产生的动态附加力矩与水轮机的尺寸大小和角速度的变化率有关，水轮机尺寸越大，角速度变化越快，动态附加力矩越大，其作用方向是阻止转速上升的，而当转速下降时，动态附加力矩则阻止转速下降。因此其性质与机组转动惯量相似，可将其折算成附加的转动惯量，再折算成附加的惯性时间常数 T_{ag}。根据估算，有资料表明，对于大型轴流式水轮机，T_{ag}最大可达 $10\%T_a$，而对于混流式水轮机和中小型轴流式水轮机，因影响较小而可忽略不计，也就是说，只考虑水轮机的稳定特性，近似采用能量试验测得的综合特性曲线计算是可以的，其计算精度在允许的范围内。

对应于某个工况点，用水轮机综合特性曲线求取六个传递系数的方法已详述于一般水轮机调节的书籍中[3]，这里不再赘述。

对于转桨式和贯流式(灯泡式)水轮机，因增加了桨叶转角变量 φ，可采用与轴流式相同的方法，导出其力矩和流量方程为

$$\left.\begin{aligned} m_t &= e_y y + e_z z + e_x x + e_h h \\ q &= e_{qy} y + e_{qz} z + e_{qx} x + e_{qh} h \end{aligned}\right\} \tag{1-3-3}$$

式中：$e_z=\dfrac{\partial m_t}{\partial z}$；$e_{qz}=\dfrac{\partial q}{\partial z}$；$z$ 为桨叶转角的标么值，$z=\dfrac{\Delta\varphi}{\varphi_m}$；$\varphi_m$ 为对应于桨叶接力器位移全行程的桨叶转角。

一般桨叶的调节速度慢，可认为从导叶调节到桨叶调节的传递函数为一阶惯性环节，即

$$\frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{K_z}{1+T_z s}$$

式中：T_z 为桨叶接力器时间常数。

以此代入式(1-3-3)可减少一个自变量 z，得转桨式水轮机的方程为

$$\left.\begin{aligned} m_t &= \left(e_y + \frac{K_z}{1+T_z s}e_z\right) y + e_x x + e_h h \\ q &= \left(e_{qy} + \frac{K_z}{1+T_z s}e_{qz}\right) y + e_{qx} x + e_{qh} h \end{aligned}\right\} \tag{1-3-4}$$

2. 压力引水管道

压力引水管道的动态特性由水击方程描述。一般在小扰动情况下，且管道长度小于600～800m时可认为是刚性水击，此时用流量和水头标么化偏差值表示的水击方程为

$$h = -T_w \frac{dq}{dt} \tag{1-3-5}$$

其中

$$T_w = \frac{LQ_r}{gAH_r}$$

式中：T_w 称为水流惯性时间常数(s)，它表示管道中的水流在额定水头 H_r 作用下，流量从 $Q=0$ 增加到 $Q=Q_r$ 所需的时间；L、A 分别为管道的长度与截面积；g 为重力加速度。

与式(1-3-5)对应的传递函数为

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = -T_w s \tag{1-3-6}$$

当电站的引水管道较长时，应考虑弹性水击。根据水力学原理可导出传递函数为