研究生数学教学系列（理工类） 9

数理统计

第二版

赵选民　徐伟　师义民　秦超英　编

GM

科学出版社

研究生数学教学系列(理工类)

数 理 统 计

第二版

赵选民 徐 伟
师义民 秦超英 编

科 学 出 版 社

2002

内 容 简 介

本书系《数理统计》一书的第二版，是根据全国工科院校硕士研究生“数理统计”课程的基本要求编写修订而成的，共分八章，内容包括：基础知识、统计量与抽样分布、参数估计、统计决策与贝叶斯统计、假设检验、方差分析与试验设计、回归分析和多元分析初步．各章均配有适量习题，书末附有习题答案或提示．

本书适合工科各专业的研究生、数学系的本科生使用．

图书在版编目(CIP)数据

数理统计/赵选民等编．—2版．—北京：科学出版社，2002
(研究生数学教学系列(理工类))
ISBN 7-03-010493-5

Ⅰ．数… Ⅱ．赵… Ⅲ．数理统计—研究生—教材 Ⅳ．O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047940 号

科[illegible]出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

1999年7月西北工业大学出版社第一版
2002年9月第　二　版　　开本：B5(720×1000)
2002年9月第二次印刷　　印张：23
印数：3 001—6 000　　字数：426 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

第一版前言

本书是根据全国工科院校硕士研究生“数理统计”课程的教学基本要求而编写的．全书共分九章，前五章介绍数理统计的基本理论与基本方法，内容包括：数理统计的基本概念、抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析．考虑到面向21世纪工科研究生数理统计课程教学改革和实际应用的需要，第六章介绍了正交试验设计、SN比及其试验设计和三次设计等方法，第七章、第八章、第九章分别介绍了多元分析初步、随机模拟方法和常用统计软件．这些方法在工、农业生产，社会、经济、工程技术和自然科学等领域都具有广泛的应用．本书各章均配有适量的习题，书末附有习题答案或提示．

在本书的编写过程中，考虑到工科硕士研究生的数学基础和教学特点，对数理统计学的基础与核心内容，尽量做到循序渐近，由浅入深，叙述严谨，分析透彻．而对应用方法部分，通过对典型实例的分析来介绍方法，培养学生应用所学知识解决工程实际问题的能力．本书的后四章内容基本独立，教师可根据学时和不同的教学要求选讲有关内容，或留给学生自学．

本书可作为工学、经济学硕士研究生“数理统计”课程48～70学时的教材，也可作为理学、农学、医学、师范、财经、统计、管理等专业本科生、研究生的教材或教学参考书，亦可供工程技术人员参考．

本书的第一章和第二章由秦超英编写，第三章和第六章由赵选民编写，第四章和第七章由师义民编写，第五章、第八章和第九章由徐伟编写，全书由赵选民统稿整理．本书的初稿曾作为讲义在西北工业大学95级、96级、97级和98级四届研究生教学中使用，并几经修改得以完善．西北工业大学应用数学系概率统计教研室、西北工业大学出版社和研究生院对本书的编写、出版给予了大力支持和帮助，西安交通大学范金城教授仔细地审阅了全稿，并提出了许多宝贵意见与建议，在此，一并致以衷心的谢忱．

由于编者水平有限，书中存在的不妥之处，敬请读者指正．

编　者

1998年12月于西北工业大学

“数理统计”教学基本要求

一、基础知识

1. 了解 n 维随机变量的概念；理解 n 维随机变量的联合分布函数、联合分布律函数、联合概率密度函数的概念与性质.

2. 理解 n 维随机变量的边缘分布、独立性、条件分布、条件数学期望.

3. 会求二维随机变量和、商的分布，会求随机向量变换的联合分布.

4. 会求 n 维随机向量的数学期望向量、协方差矩阵及相关系数矩阵.

5. 理解随机变量和随机向量的特征函数的概念，知道特征函数的性质.

6. 掌握 Γ 分布族、β 分布族、t 分布族、F 分布族及多元正态分布族及其性质.

二、统计量与抽样分布

1. 理解总体、样本和统计量的概念，掌握样本均值、样本方差、样本矩和经验分布函数的计算.

2. 理解充分统计量、完备统计量，掌握因子分解定理.

3. 掌握正态总体样本均值与样本方差的分布及非正态总体样本均值与样本方差的渐近分布.

4. 理解次序统计量的概念，掌握其概率分布.

三、参数估计

1. 理解估计量的无偏性、均方误差、相合估计的概念，了解渐近正态估计.

2. 掌握矩估计法、极大似然估计法和用次序统计量估计参数的方法.

3. 理解最小方差无偏估计、有效估计的概念，掌握判定方法.

4. 会求单个正态总体的均值与方差的置信区间，会求两个正态总体的均值差与方差比的置信区间.

四、统计决策与贝叶斯估计

1. 理解统计决策的基本概念.

2. 会求参数的贝叶斯估计及贝叶斯风险.

3．会求参数的贝叶斯置信区间.

4．了解 minimax 估计的概念及判定方法.

五、假设检验

1．理解假设检验的基本思想，掌握假设检验的基本步骤，了解假设检验可能产生的两类错误.

2．了解效函数与无偏检验的概念.

3．掌握单个和两个正态总体的均值与方差的假设检验.

4．了解非参数的 χ^2 拟合优度检验，柯尔莫哥洛夫与斯米尔诺夫检验和独立性检验方法.

六、方差分析与试验设计

1．掌握单因素方差分析和两因素非重复试验的方差分析方法.

2．了解两因素等重复试验的方差分析方法.

3．掌握正交试验设计的直观分析与方差分析方法.

4．了解 SN 比的试验设计方法与原理，了解三次设计的原理与方法.

七、回归分析

1．理解回归分析的基本概念，掌握一元线性回归方程参数的最小二乘估计方法，估计量的分布及回归方程的显著性检验方法，会利用线性回归方程进行预测与控制.

2．掌握多元线性回归分析参数的最小二乘估计方法，估计量的分布与性质，回归方程与回归系数的显著性检验，会利用回归方程进行预测.

八、多元分析

1．掌握多元正态分布参数的估计与假设检验方法.

2．了解距离判别方法贝叶斯判别方法和费歇尔判别方法.

3．了解主成分分析方法.

目　　录

第一章　基础知识

§1.1　多维随机变量及其分布

一、随机向量的概念

在许多随机现象中，每次试验的结果不能只用一个数来描述，而要同时用几个数来描述，例如对于研究人口问题，需要同时研究人口的寿命，人口的出生率，人口的死亡率，等等，这样对应于每个样本点，试验的结果将是一个向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，这个向量取值于n维欧氏空间R^n.

定义 1.1　若随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$定义在同一概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上，则称

$$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$$

构成一个n维随机向量，称之为n维随机变量.

定义 1.2　设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个实数，称n元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\}\qquad(1.1)$$

为随机向量$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$的联合分布函数.

n元分布函数具有下列性质：

(1) 对任一x_i是单调不减的；

(2) 对任一x_i是右连续的；

(3) 令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},\cdots,x_n)=\lim_{x_i\to-\infty}F(X_1,X_2,\cdots,X_n),$$

$$F(+\infty,\cdots,+\infty)=\lim_{\substack{x_1\to+\infty\\ \cdots\\ x_n\to+\infty}}F(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则

$$F(x_1,\cdots,x_{i-1},-\infty,x_{i+1},\cdots,x_n)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty,\cdots,+\infty)=1;$$

(4) 设$a_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n$，则

$$F(b_1,\cdots,b_n)-\sum_{i=1}^{n}F_i+\sum_{i<j}F_{ij}-\cdots+(-1)^nF(a_1,\cdots,a_n)\geqslant 0,$$

其中$F_{ij\cdots k}$是当$x_i=a_i,x_j=a_j,\cdots,x_k=a_k$而其余$x_l=b_l$时$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的值.

随机向量的分布函数也有离散型与连续型的分别.在离散型场合,概率分布集中在有限个或可列个点上.在连续型场合,存在着非负可积函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,使

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1,\cdots,\mathrm{d}y_n, \tag{1.2}$$

这里的 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为密度函数,满足条件

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \geqslant 0, \tag{1.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = 1. \tag{1.4}$$

例 1.1　做 n 次重复独立试验,每次试验的结果为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, $P(A_i)=p_i, i=1,2,\cdots,r$.且

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geqslant 0.$$

记 X_i 表示在n 次试验中事件A_i 出现的次数,则$(X_1,X_2,\cdots,X_m)^{\mathrm{T}}$是一 m 维随机向量,其分布律为

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \cdots, X_m = n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}, \tag{1.5}$$

这里 $n_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$.

公式(1.5)称为多项分布,记为 $M(n, p_1, p_2, \cdots, p_m)$.因为它是$(p_1 + p_2 + \cdots + p_m)^n$ 的展开式的一般项,而且

$$\sum_{\substack{n_i \geqslant 0 \\ n_1+n_2+\cdots+n_m=1}} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m} = 1,$$

$m=2$ 时,式(1.5)即为二项分布.显然多项分布是二项分布的推广.

例 1.2　设 G 是R^n 中的有限区域,其体积 $S>0$;则由密度函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{S}, & (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in G, \\ 0, & (x_1,x_2,\cdots,x_n) \overline{\in} G \end{cases} \tag{1.6}$$

给出的分布称为 G 上的均匀分布.

例 1.3　设 $\boldsymbol{\Sigma}=(\sigma_{ij})$是 n 阶正定对称矩阵,$|\boldsymbol{\Sigma}|$表示$\boldsymbol{\Sigma}$ 的行列式的值,$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$ 是任意实值列向量,则由密度函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(x-\mu)\right\} \tag{1.7}$$

定义的分布称为 n 元正态分布,简记为 $N(\mu,\boldsymbol{\Sigma})$.

二、边缘分布

设 $F(x_1,\cdots,x_n)$是 n 元分布函数,任意保留 $k(1\leqslant k\leqslant n)$个 x_i,例如 x_1, $x_2,\cdots,x_k$,而令其他的 x_j 都趋向于 $+\infty$,即

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)=\lim_{\substack{x_{k+1}\to+\infty\\ \cdots\\ x_n\to+\infty}}F(x_1,\cdots,x_n).\tag{1.8}$$

容易看出 $F(x_1,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)$是一 k 元分布函数,称为 $F(x_1,\cdots,x_n)$的 k 元边缘分布函数.由于自 $x_1,\cdots,x_n$ 中挑选 k 个 x_i 的方法共有 C_n^k 种,故共有 C_n^k 个 k 维边缘分布函数.

如果 $F(x_1,\cdots,x_n)$是连续型的,有密度函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,那么

$$\begin{aligned}&F(x_1,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)\\&=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(y_1,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_n\cdots\mathrm{d}y_k\cdots\mathrm{d}y_1,\end{aligned}$$

可见 $F(x_1,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)$也是连续型的,密度为

$$f_{1,2,\cdots,k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_{k+1}.$$

如 $F(x_1,\cdots,x_n)$是离散的,那么 $F(x_1,\cdots,x_k,+\infty,\cdots,+\infty)$也是离散型的.其边缘分布律可仿上式求得,只须把积分号改为求和号.

例 1.4 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$\begin{pmatrix}(1,1)&(2,1)&(2,2)&(3,4)\\ \dfrac{1}{3}&\dfrac{3}{24}&\dfrac{1}{24}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

求(X,Y)关于 X,关于 Y 的边缘分布律.

解 X 的可能取值构成点集(1,2,3),可得 X 的边缘分布律为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\ \dfrac{1}{3}&\dfrac{3}{24}+\dfrac{1}{24}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\ \dfrac{1}{3}&\dfrac{1}{6}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

类似地,Y 的可能取值构成点集(1,2,4),Y 的边缘分布律为

$$\begin{pmatrix}1&2&4\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{24}&\dfrac{1}{24}&\dfrac{1}{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4\\ \dfrac{11}{24}&\dfrac{1}{24}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

以上我们对保留 $x_1,\cdots,x_k$ 的情况进行了讨论,如果保留的是 $x_{i_1},\cdots,x_{i_k}$,讨论完全类似.

，边缘分布函数由分布函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$惟一决定；但反之不然，也就是说，不同的分布函数可以有一切相同的边缘分布函数.

例 1.5　设有两个二元分布函数 $F(x,y)$和 $G(x,y)$，分别有密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 若 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\left(\dfrac{1}{2}+y\right), & 若 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

容易看出，方程

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}+y\right)=x+y$$

只有根 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$，因而在正方形 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 中，只是沿两直线 $x=\frac{1}{2}$及 $y=\frac{1}{2}$上，$f(x,y)=g(x,y)$，可见 $F(x,y)$与 $G(x,y)$不恒等.然而它们的边缘密度函数相等.事实上

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y=x+\frac{1}{2},$$

$$g_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}+y\right)\mathrm{d}y=x+\frac{1}{2},$$

所以

$$f_X(x)=g_X(x),$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\mathrm{d}x=y+\frac{1}{2},$$

$$g_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}+y\right)\mathrm{d}x=y+\frac{1}{2},$$

因此 $f_Y(y)=g_Y(y)$.

例 1.6　证明：多项分布 $M(n,p_1,\cdots,p_m)$中任一个分量的边缘分布是二项分布.

证　以 X_1 为例，X_1 的可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$ 个值中任一个，由边缘分布定义可知

$$P(X_1=n_1)=\sum\sum\cdots\sum_{n_2+n_3+\cdots+n_m=n-n_1}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m},$$

其中 $n_2,\cdots,n_m$ 分别是$X_2,\cdots,X_m$ 的取值，都是非负整数，其和为 $n-n_1$.若令

$$p'_2=\frac{p_2}{1-p_1},\ \cdots,\ p'_m=\frac{p_m}{1-p_1},$$

则

$$p'_2+\cdots+p'_m=\frac{(p_2+\cdots+p_m)}{1-p_1}=1,$$

若把上式改写为

$$\begin{aligned}P(X_1=n_1)&=\Big(\sum_{n_2+\cdots+n_m=n-n_1}\sum\cdots\sum\frac{(n-n_1)!}{n_2!\cdots n_m!}p'^{n_1}_2p'^{n_2}_3\cdots p'^{n_m}_m\Big)\\&\quad\times\Big(\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}p_1^{n_1}(1-p_1)^{n-n_1}\Big)\\&=(p'_2+p'_3+\cdots+p'_m)^{n-n_1}\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}p_1^{n_1}(1-p_1)^{n-n_1}\\&=C_n^{n_1}p_1^{n_1}(1-p_1)^{n-n_1},\quad n_1=0,1,\cdots,n,\end{aligned}$$

这正是二项分布 $B(n,p_1)$,同理可证 $X_2\sim B(n,p_2),\cdots,X_m\sim B(n,p_m)$.

三、随机变量的独立性

定义 1.3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 n 个随机变量,若对于任意的 $x_1,\cdots,x_n$ 成立

$$P\{X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n\}=P\{X_1\leqslant x_1\}\cdots P\{X_n\leqslant x_n\},\tag{1.9}$$

则称 $X_1,\cdots,X_n$ 是相互独立的.

若 X_i 的分布函数为 $F_i(x)$,它们的联合分布函数为 $F(x_1,\cdots,x_n)$,则式(1.9)等价于对一切 $x_1,\cdots,x_n$,成立

$$F(x_1,\cdots,x_n)=F_1(x_1)\cdots F_n(x_n).\tag{1.10}$$

在这种场合,由随机变量的边缘分布函数可惟一地决定联合分布函数.

对于离散型随机变量,式(1.9)等价于对任何一组可能取的值$(x_1,\cdots,x_n)$成立

$$P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)=P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n).\tag{1.11}$$

对于连续型随机变量,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的充要条件是

$$f(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n),\tag{1.12}$$

这里 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是联合分布密度函数,而 $f_i(x)$是各随机变量的密度函数.

例 1.7 设(X,Y)服从二维正态分布 $N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$,其中 $\mu\doteq\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2&r\sigma_1\sigma_2\\r\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2\end{pmatrix}$,证明 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $r=0$.

证　我们先来求 X 和 Y 的边缘密度函数. 令 $\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}=u$, $\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}=v$, 则

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}[u^2-2ruv+v^2]\right\}\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r^2)}}\exp\left\{-\frac{r^2u^2-2ruv+v^2}{2(1-r^2)}\right\}\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-r^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{(v-ru)^2}{2(1-r^2)}}\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},
\end{aligned}$$

即 $f_1(x)$ 是 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的密度函数,同理可得

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

如果 X 与 Y 相互独立,则

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y),$$

从而在 $x=\mu_1, y=\mu_2$ 处,上式成立,即

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r_2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

亦即 $\sqrt{1-r^2}=1$, 所以 $r=0$. 反之若 $r=0$, 则

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \\
&= f_1(x)f_2(y).
\end{aligned}$$

即 X 与 Y 独立.

定理 1.1　随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立的充要条件是:对任意 n 个一维波雷耳点集 $A_1, \cdots, A_n$, 有

$$P\{X_1\in A_1,\cdots,X_n\in A_n\} = \prod_{i=1}^{n}P(X_i\in A_i).$$

因证明用到测度论的知识,证略.

系　设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立,又 $g_i(x)$ 为一元波雷耳可测函数,

$i=1,\cdots,n$,则 $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$也是独立的随机变量.

当然也可以建立 n 维随机向量 X 与 m 维随机向量 Y 相互独立的概念,这时要求成立

$$P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B),$$

其中 A,B 分别是任意一个 n 维及 m 维波雷尔点集.

显然若 X 与 Y 独立,则 X 的子向量与 Y 的子向量是独立的.

此外,注意到若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,则其中的任意 $k(2\leqslant k<n)$个随机变量也相互独立.例如证明 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$相互独立.

$$\begin{aligned}P\{X_1\leqslant x_1,\cdots,X_{n-1}\leqslant x_{n-1}\}&=P\{X_1\leqslant x_1,\cdots,X_{n-1}\leqslant x_{n-1},X_n<+\infty\}\\&=P\{X_1\leqslant x_1\}\cdots P\{X_{n-1}\leqslant x_{n-1}\}P\{X_n\leqslant+\infty\}\\&=P\{X_1\leqslant x_1\}\cdots P\{X_{n-1}\leqslant x_{n-1}\}.\end{aligned}$$

随机变量的独立性概念是概率论中最基本的概念之一,也是最重要的概念之一,关于独立随机变量的研究构成了概率论的重要课题.

四、多维随机变量函数的分布

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 n 维随机向量,其密度函数为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则 $Y=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{g(X_1,\cdots,X_n)\leqslant y\}\\&=\int\cdots\int_{g(x_1,\cdots,x_n)\leqslant y}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Y 的密度函数为$f_Y(y)=F'_Y(y)$.

1. 和的分布

设二维随机变量(X,Y)的密度函数为 $f(x,y)$,则 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}&=\iint_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{1.14}$$

特别当 X 与 Y 独立时,有 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$,这里 $f_1(x)$为 X 的密度函数,$f_2(y)$为 Y 的密度函数,代入式(1.14)得

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z-x}f_1(x)f_2(y)\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{令}y=u-x}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{z}f_1(x)f_2(u-x)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(u - x) \mathrm{d}x.$$

因此 Z 的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z - x) \mathrm{d}x, \tag{1.15}$$

也可写为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z - y) f_2(y) \mathrm{d}y. \tag{1.16}$$

式(1.15)或式(1.16)称为卷积公式.

2. 商的分布

若 $Z = \dfrac{X}{Y}$,而(X, Y)的密度函数为 $f(x, y)$,则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\left\{\frac{X}{Y} \leqslant z\right\} = \iint\limits_{\frac{x}{y} \leqslant z} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{zy} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{0} \int_{zy}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{z} y f(uy, y) \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}y \int_{z}^{+\infty} y f(uy, y) \mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{z} \mathrm{d}u \int_0^{+\infty} y f(uy, y) \mathrm{d}y + \int_{z}^{+\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{0} y f(uy, y) \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

Z 的密度函数为

$$\begin{aligned} f_Z(z) = F'_Z(z) &= \int_0^{+\infty} y f(zy, y) \mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{0} y f(zy, y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, y) \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.17}$$

当 X 与 Y 独立,则(1.17)变为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_1(zy) f_2(y) \mathrm{d}y. \tag{1.18}$$

3. 随机向量变换的分布

若随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$的密度函数为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$Y_1 = g_1(X_1, \cdots, X_n), \cdots, Y_n = g_n(X_1, \cdots, X_n)$是$(X_1, \cdots, X_n)$与$(Y_1, \cdots, Y_n)$的一一对应变换,其反变换 $x_1 = x_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, x_n = x_n(y_1, \cdots, y_n)$存在且具有连续的一阶偏导数,则$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)^{\mathrm{T}}$的密度函数 $q(y_1, \cdots, y_n)$为

$$q(y_1, \cdots, y_n) = f(x_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, x_n(y_1, \cdots, y_n)) |J|, \tag{1.19}$$

其中 J 为坐标变换的雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}. \tag{1.20}$$

例 1.8 若 X 与 Y 独立,均服从 $N(0,1)$分布,试证 $\rho=\sqrt{X^2+Y^2}$ 及 $\varphi=\arctan\left(\dfrac{Y}{X}\right)$是相互独立的.

证 $(X,Y)^{\mathrm{T}}$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},$$

作极坐标,$x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,因此 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$,变换的雅可比行列式为

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,$$

故(ρ,φ)的密度函数为

$$q(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r;\ r\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

即 $\rho=\sqrt{X^2+Y^2}$的密度函数为

$$R(r)=\begin{cases}r\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}, & r\geqslant 0,\\ 0, & r<0,\end{cases}$$

这个分布称为瑞利(Rayleigh)分布. 而 $\varphi=\arctan\dfrac{Y}{X}$服从$[0,2\pi]$上的均匀分布,而且它们是相互独立的.

这个结果常被用来产生服从正态分布的随机数. 做法如下:

产生相互独立的$[0,1]$均匀分布的随机数 U_1,U_2,令

$$\begin{cases}X=(-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi U_2,\\ Y=(-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi U_2,\end{cases} \tag{1.21}$$

则 X 与 Y 是相互独立的$N(0,1)$随机数.