地圖投影學

方俊著

商務印書館

地圖投影學

方俊著

地 圖 投 影 學

方 俊 著

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上海天通菴路一九〇號

㊥(24652)

1952年6月初版　1955年5月再版

印數2,001—2,500　定價一元七角五分

序

作者在1934年曾經寫了一本"地圖投影"，由前地質調查所出版。寫那本書的動機是由於當時所出的地圖多不按投影的方法，以致經緯線網多不合於標準，錯誤百出，用者困難。在那本書內，作者介紹了不少種投影的方法，並且將牠們的繪畫方法和優點也略爲說明。希望能因此引起製圖者對於這個基本問題的重視。此書出版後不久就已銷售一空。曾經接到不少讀者來信詢問再版之事。但是作者感覺那本書不過是對於地圖投影學的一般介紹，內容不夠完備。因此並不考慮再版，而希望能抽出一部分時間來重寫。十五年來，作者從事於教學和製圖工作，事務忙碌，一直沒有機會來考慮這個問題。

1943到1949年間，作者任教於同濟大學，在測量系中講授這課前後達六次之多。歷年積稿，編成講義。去年到科學院工作，公餘之暇，又將講義經過一番整理，方成此稿。

在本書開始的三章內所討論的是地圖投影的基本問題。然後再根據這個基礎分別討論各種投影。投影的分類方法仍舊仿照前書，就是將各種投影歸納於正方向，等面積和正形投影三大類。在討論每一類投影之前，作者先將牠們的共同性質用算式列出，然後再按照各別投影的其他條件一一討論之。這樣，可以使讀者明瞭同一類投影間的相互關係。凡是不能歸納於這三類以內的投影，都收集在第七章內，稱爲雜類投影。在最末一章內，作者在討論投影的應用以後，採用底索的方法解釋對於指定區域的最適宜的投影。

本書假定地球爲一球體。如此，可以使公式簡化，易於瞭解。在一般製圖的應用上，這種假定不會發生嚴重的影響。但是爲了照顧到較大的

比例尺的地圖，我們常常採用雙重投影方法，也就是先將橢球面投影在球面之上，然後再投到平面上。在第五和第六章之末加以解釋，並附有投影表可資應用。至於橢球面的投影方法則擬於另一書——“大地測量地圖投影學”中詳細討論。

作者學識淺陋，謬誤必多，倘望國內學者不吝指教是幸！

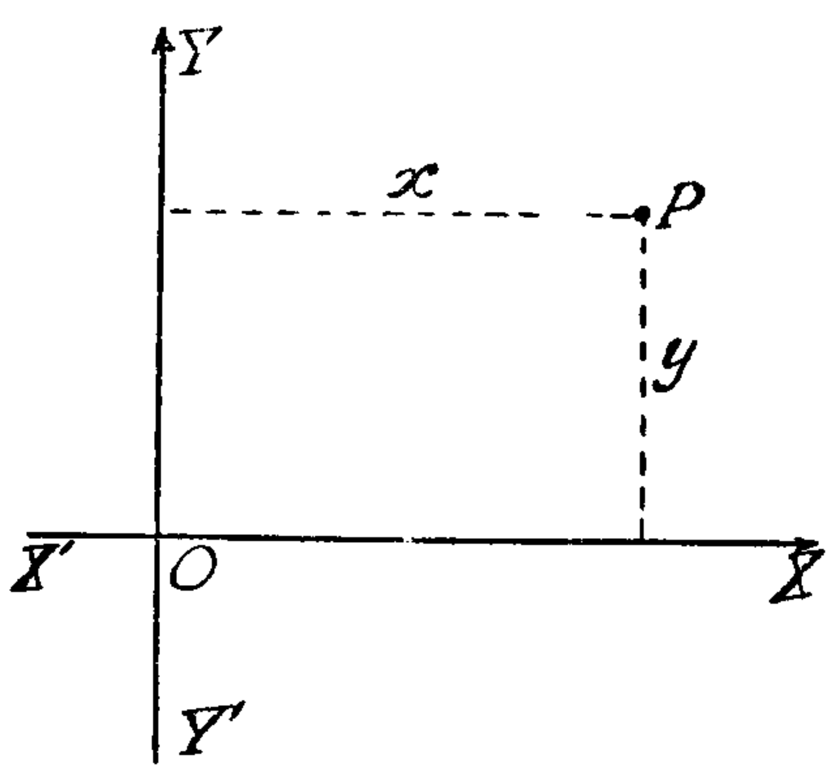
方 俊 一九五一年四月一日於北京中國科學院

目　録

第一章　總論

§1. 坐標的概念　在一條直線上任何一點的位置可以用牠距某一定點的距離來說明。所以相當於一點，我們有一個數目；而相反的，相當於某一數目，我們也可以在線上找到一個點子，我們稱這個數目爲坐標。因爲這個坐標是在直線之上，所以又稱爲直線坐標。

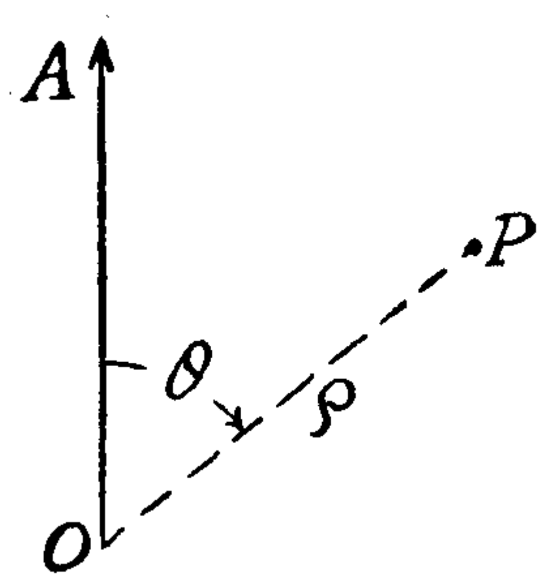
在平面上面，我們必須用兩個數目方能決定點的位置。我們有兩種不同的表示方法，就是平面直角坐標和平面極坐標。第一種方法是用兩條互相垂直的直線作爲基礎，面上的各點就用距這兩條垂直線的距離來決定。例如第一圖上，P 點的位置是用兩個垂直距離 x 和 y 來表示。我們稱這兩個距離爲平面直角坐標；x 爲橫坐標，y 爲縱坐標。而兩條垂直線則稱爲坐標軸；XOX' 爲橫軸，YOY' 爲縱軸。牠們的交點 O 則稱爲坐標的原點。在數學上的規定：橫標在原點以右的爲正，以左的爲負；縱標在原點以上的爲正，以下的爲負。所以兩條坐標軸將平面劃分爲四部分：在右上部的點子縱橫坐標都爲正；在左上部則橫坐標爲負縱坐標爲正；在左下部縱橫坐標都爲



第一圖

負；在右下部則橫坐標爲正縱坐標爲負。我們稱這四部分爲四個象限。

平面極坐標的表示方法是用一個定點和一個定方向來做基礎。任何點的位置是用距定點的距離和對定向的方向來決定。這個定點稱爲極點。例如第二圖上 O 爲極點，OA 爲定向，則任何一點 P 的位置是用距離 $\rho\ (=OP)$ 和 OP 與 OA 的交角 θ 兩個數目來表示。距離是從 0 到 ∞，而方向則從 0° 到 360°，所以在這種坐標系統以內沒有正負值之分。



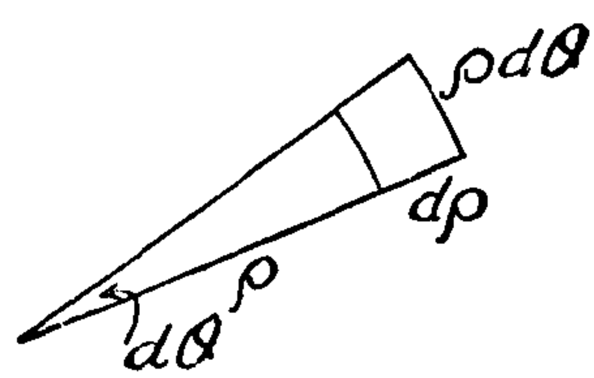
第 二 圖

嚴格說來，上述兩種坐標系統就是平面的劃分方法。平面直角坐標系統就是將平面用兩組互相垂直的平行直線劃分成正方線網。若兩組平行線都是十分接近，接近到其間的間隔爲微分數，則每一方格成一微分方格，橫寬爲 dx，縱寬爲 dy。牠們在微分的意義上是相等的，所以我們稱這種劃分方法爲等量分格。直角坐標既然是用這種方格來劃分的，所以我們稱牠爲等量坐標。在等量坐標內，每一微分方格的對角線的微分長度的平方是等於兩個坐標微分的平方的和。在直角坐標內，任何微分線段的長度 ds 是等於：

$$ds^2=dx^2+dy^2。\tag{1}$$

在極坐標內，我們用同心圓和牠們的半徑將平面劃分。若圓和圓間的間隔爲微分，而半徑和半徑間的間隔也是微分，我們也可將平面劃成無窮數的微分方格。每一方格的縱長（沿半徑的）爲 $d\rho$，而寬度（垂直於半徑方向的）則爲 $\rho d\theta$。所以任何微分線段的長度爲：

$$ds^2=d\rho^2+(\rho d\theta)^2 \tag{2}$$



第 三 圖

極坐標系統內的坐標是 ρ 和 θ, 現在(2)式所表示的既然不是兩個坐標微分平面的和，所以極坐標不是等量坐標。

在立體空間之內，我們必須用三個數目來表示一點。表示的方法很多，但比較通用的有以下三種：

應用三個垂直距離，這就是立體直角坐標。這種坐標是在平面直角坐標系統上通過原點並互直於平面豎立一第三軸，通常以 ZZ', 來表示之。所以立體直角坐標系統是將空間分爲無窮數的微分立方體，每個微分立方體的長，寬，高各爲 dx, dy 及 dz。而任何的微分線段 ds 等於：

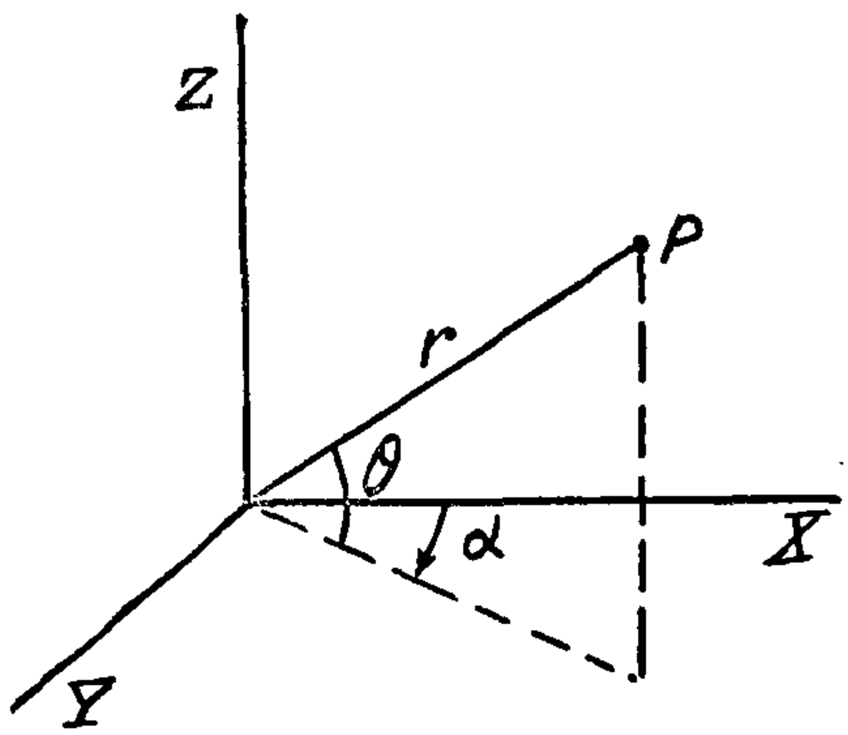
$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2。\tag{3}$$

在立體直角坐標系統內，除三個軸外還有三個基面，就是通過 x 和 y 兩軸的平面（稱爲 xy 基面），y 和 z 的平面（稱爲 yz 基面）及 z 和 x 的平面（稱爲 zx 基面），這三個基面將空間分爲八個部分。各點落於不同的部分內，三個坐標的正負各不相同。

第二種立體坐標是用兩個垂直距離和一個方向來表示，稱爲圓柱坐標。這個坐標是用一個基本平面，和面上的一個定向以及一條垂於平面的軸爲基礎的。任何點的位置是用牠在平面上垂直投影的極坐標(距軸的距離和方向)和距平面的距離來表示的。所以這個坐標系統是將空間用無數同軸的圓柱面，經過軸的方向平面和平行於基本平面的平面分爲無窮數的微分方塊。這個劃分方法是等於在平面極坐標系統上加一軸，即在平面極坐標的極點上所作垂直於平面之直線。所以微分線段的公式爲：

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2+dz^2。\tag{4}$$

第三種立體坐標是用一個距離和兩個方向來表示，稱爲球坐標。這個系統內有一基本平面，平面上有一定點，稱爲極點，和一個定方向。任何點的位置是用牠到定點的直線距離 r, 直線和平面的傾角 θ 和直線



第四圖

在平面上的投影的方向 α 來表示（如第四圖所示）。距離是從 0 到 ∞，所以永遠爲正數；方向則從 0° 到 360°，也永遠爲正；傾角則有兩種計算方法：牠可以從基本平面起算，向上到軸的上部爲 90°，這是正傾角；又自平面向下轉到軸的下部也爲 90°，這是負傾角。或者從軸的一頭起算旋轉 180° 到軸的另一頭。

這個坐標系統是用同心的球面，經過軸的方向平面以及由等傾角線所成的圓錐面將空間分爲無窮數的小方塊。任何微分線段是用下式表示之：

$$ds^2 = dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\cos\theta\, d\alpha)^2。\tag{5}$$

式內 θ 爲微分方塊的傾角。

§2. 球面和曲面上的坐標　若上節最後所述的球坐標內的距離 r 爲一常數，則點永遠在一球面之上。此時我們可以不必將距離列入，祇要用方向 α 和傾角 θ 來決定點的位置。故坐標數目由三個減成兩個。我們稱這種表示方法爲球面坐標。所以在球面之上，微分線段的距離爲：

$$ds^2 = r^2[d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\alpha^2]。\tag{6}$$

式內 r 是球面的半徑，我們可以視爲一個常數。

從第四圖，我們得到球面上各點的立體直角坐標與球面坐標的關係如下：

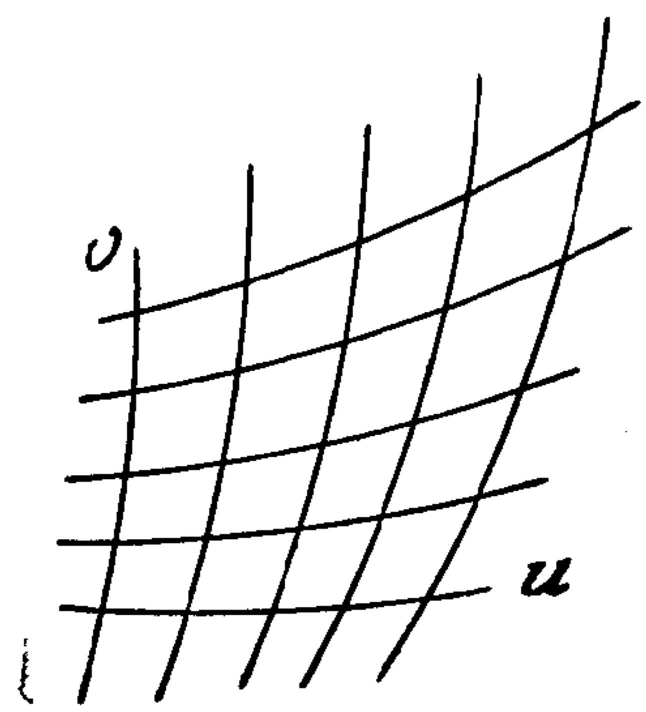
$$x=r\cos\theta\cos\alpha,\quad y=r\cos\theta\sin\alpha,\quad z=r\sin\theta。\qquad(7)$$

所以直角坐標 x,y 和 z 都是球面坐標 θ 和 α 的函數。

一般說來，不但球面上可用兩個數目來表示點的位置，就是任何的曲面也是如此。換句話說，就是在任何的曲面上也可以建立起不同的坐標系統，用兩組不同的曲線將曲面分爲無數小格。這些小格或爲正方形，或爲平行四邊形或成其他的形狀，好像平面上的直角坐標，極坐標或其他的坐標一樣。曲面上的點就用這個坐標來表示。相當於一點有一對數目，而相反的，相當於一對數目必可找到一個點，面上各點的直角坐標各爲曲面上兩個坐標的函數，和(7)式所表示的球面坐標的關係相彷彿。今設曲面上用 u 和 v 爲坐標，則

$$x=\phi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=X(u,v)\qquad(8)$$

式內 ϕ,ψ 和 X 表示函數。這三個函數不能同時都爲常數，因爲如果都爲常數時，則 x,y,z 各爲常數，則(8)式表示曲面上的一點。其次，若三個函數之中每兩個函數互相關連，例如 ϕ 和 ψ 各爲 X 的函數，同時 ϕ 也必然爲 ψ 的函數。則(8)式表示曲面上的一條曲線。所以(8)式表示一個曲面的條件是必須至少有兩個函數不相關連。



第五圖

我們稱這種曲面上的坐標爲參數，牠們在曲面上所組成的線網則稱爲參數曲線網。例如第五圖上，當 u 爲常數之時，v 等於不同的數目所畫出的各曲線爲 u- 曲線；又當 v 爲常數之時，u 等於不同數目所畫出的各曲線爲 v- 曲線。這兩組曲線組成一參數線網，將曲面劃分爲無

數小格。

任何微分線段可以用參數的微分來表示。因為：

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

而自（8）式：

$$dx=\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv$$

$$dy=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv$$

$$dz=\frac{\partial\chi}{\partial u}du+\frac{\partial\chi}{\partial v}dv$$

所以

$$ds^2=e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2 \tag{9}$$

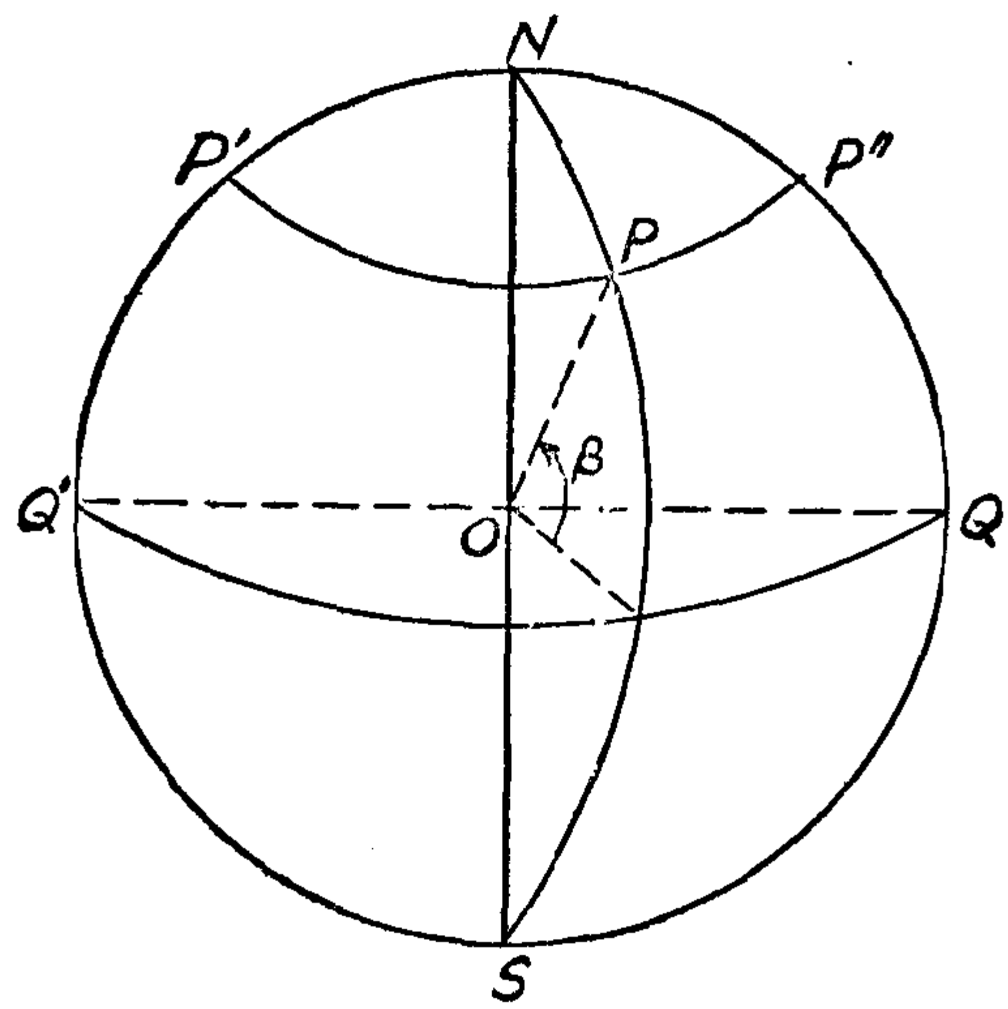
式中

$$\left.\begin{aligned}e&=\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2\\ f&=\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}\\ g&=\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

e, f, g 都是 u,v 的函數，在一點之上是一個常數，所以是位置的函數，換句話說就是祇隨點的位置變化。我們稱牠們為一次微分因數。這個基本微分係數在研究地圖投影的誤差上十分重要。我們要在第三章內再詳細討論之。

§3. 地球面上的經緯度和極坐標 地球的正確形狀是一個扁球體，但在一般問題上，我們常假定牠是一個正球。所以上節所提到的球面坐標就可以應用於地球之上。當地球自轉之時，球面上的一切點都隨了牠在轉動，祇有兩點是固定的。我們稱這兩點為地球的極點，在北者為北極，在南者為南極。連接兩極的直線為地球的自轉軸，或簡稱為地軸。垂直並平分地軸的平面與球面相交於一個大環之上，稱為赤道；而這平面則稱為赤道平面。我們若以赤道平面和地軸為基礎，並且在赤道平面之上選擇一個方向為起點，則可以在地球面上建立起一個坐標系

統。球面上任何一點 P 的坐標可以規定如下：P 點的半徑 PO 與赤道平面傾斜成一角度 β，稱爲緯度。緯度從赤道起算，由赤道上的 0° 到極點爲 90°；在赤道以北的爲正，以南的爲負。凡是緯度相等的點子都在一條曲線之上（如第六圖的 $P'PP''$）。這樣的曲線是平行於赤道平面的平面在球面上所截出來的，所以都是圓。我們稱牠爲緯線。全球面上的緯線，祇有赤道是大環，其餘的都是小環；在兩極上，緯線縮成兩點。所以地球面上用緯線來劃分成帶。



第 六 圖

經過地軸和 P 點所作的平面與球面交於一個大環 NPS，這個大環是同時經過兩極的，我們稱牠爲經線，而包含這種經線的平面則稱爲經線平面。任何兩條經線的經線平面在軸上所成的面角（也就等於這兩條經線在兩極上所成的角度）爲經距。若兩條經線之一通過上述赤道平面上的起點時，則這條經線爲中央經線；牠和另一經線間的經距則爲經度。國際上通用的經度是以通過英國格林威治天文臺的經線爲中央經線的。從這條經線起算向西從 0° 到 180° 爲西經；又向東由 0° 到

180° 爲東經。一般習慣以西經爲正，東經爲負。經線都是大環，隨處和緯線相交成直角。這兩組曲線（經線和緯線）將地球面劃分爲無數方格。

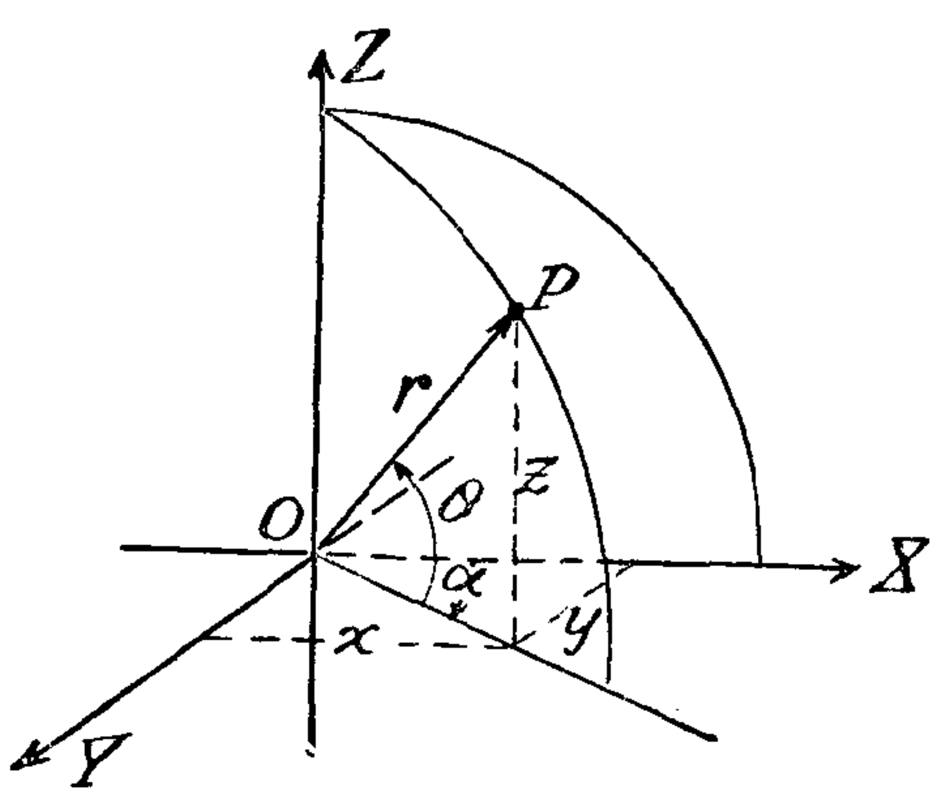
我們若以球心爲直角坐標的原點，以地軸爲 Z 軸，以赤道平面與中央經線平面的交線爲 X 軸，以及垂直的方向爲 Y 軸，則直角坐標和經緯度的關係爲：

$$x=r\cos\beta\cos\lambda,\quad y=r\cos\beta\sin\lambda,\quad z=r\sin\beta \tag{11}$$

式內的 r 爲地球半徑，λ 爲經度，β 爲緯度。

經緯度是一種絕對的坐標系統，因爲這是以赤道和一規定的中央經線爲基礎的。

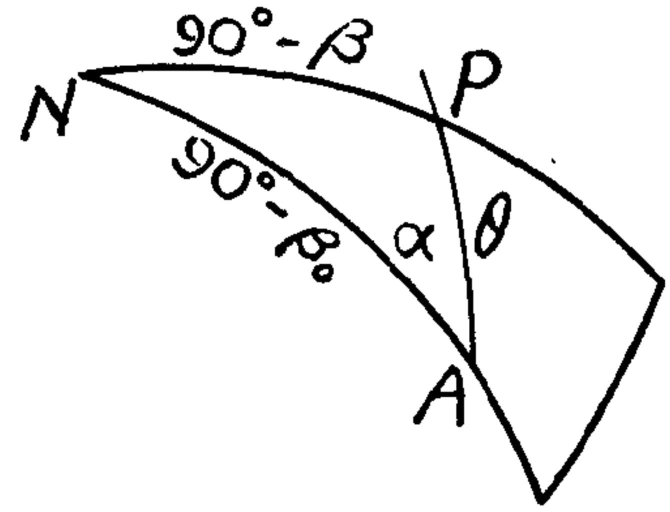
在研究地球的問題時，我們常採用另一種相對的坐標系統。我們選擇地球面上的一個定點爲極點，通過這極點的某大環爲定方向。球面上的各點即以離極點的距離（球面距離，也就是這點的半徑和極點的半徑在球心的交角）和與定方向的傾角來表示，與平面上的極坐標表示方法完全一樣。我們稱距離爲極距和定向的傾角爲方向。如第七圖上 P



第 七 圖

點的極距為 θ, 方向為 α。我們稱這種坐標為球面極坐標。

和平面極坐標相同，球面極坐標用方向線（大環）和等距離線（小環）將球面劃分成方格。牠的形式和經緯線網完全相同，不過極點不在地極之上，而在球面上的另一定點之上。因為極點是任意選擇的，所以這種坐標是相對的。假設極坐標的極點的經緯度為 (λ_0, β_0)，則任何點的極坐標和經緯度的關係可以從球面三角上的基本公式求之。



第八圖

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\sin\beta\sin\beta_0+\cos\beta\cos\beta_0\cos(\lambda-\lambda_0)\\ \sin\alpha\sin\theta&=\cos\beta\sin(\lambda-\lambda_0)\\ \cos\alpha\sin\theta&=\sin\beta\cos\beta_0-\cos\beta\sin\beta_0\cos(\lambda-\lambda_0)\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

〔例一〕 若定點的緯度為 $\beta_0=40°$，經度為 $\lambda_0=0°$，求緯度 $\beta=80°$，經度 $\lambda=105°$ 的一點對於定點的方向 α 和球面距離 θ。

自公式(12)的第一式：

$$\begin{array}{ll}\log\sin 40°: & 9.808067-10\\ \log\sin 80\ : & \underline{9.993351-10}\\ & 9.801418-10\\ & \\ & 0.633020\\ & \underline{-0.034429}\\ & 0.598591=\cos\theta\end{array}\qquad\begin{array}{ll}\log\cos 40°: & 9.884254\quad -10\\ \log\cos 80\ : & 9.239670\quad -10\\ \log\cos 105: & \underline{9.412996\,n-10}\\ & 8.536920\,n-10\\ & \\ & -0.034429\end{array}$$

$$\therefore\quad \theta=\underline{\underline{53°\ 13'\ 51''}}$$

又自公式(12)的第二式：

$$\begin{array}{rl}\log\cos 80°: & 9.239670-10\\ \log\sin 105: & 9.984944-10\\ \mathrm{colog}\sin\ \theta\ : & \underline{0.096339\qquad\quad}\\ \log\sin\alpha = & 9.320953-10\end{array}$$

$$\therefore\quad \alpha=\underline{\underline{12°\ 5'\ 12''}}$$

〔例二〕 若定點的經緯度爲 $\lambda_0=0°$，$\beta_0=5°$，求經緯度爲 $\lambda=15°$，$\beta=-40°$ 點的方向和距離。

$$
\begin{array}{lll}
\log\sin 5° & : & 8.940296\ \ -10 \\
\log\sin(-40°) & : & \underline{9.808067\,n-10} \\
 & & 8.748363\,n-10 \\
 & & -0.056023 \\
 & & \underline{\ \ 0.737127} \\
 & & \ \ 0.681104=\cos\theta
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\log\cos\ 5° & : & 9.998344-10 \\
\log\cos(-40°) & : & 9.884254-10 \\
\log\cos\ 15° & : & \underline{9.984944-10} \\
 & & 9.867542-10 \\
 & & 0.737127
\end{array}
$$

$\therefore\quad \theta=\underline{\underline{47°\,4'\,13''}}$

$$
\begin{array}{lll}
\log\cos(-40°) & : & 9.884254-10 \\
\log\sin\ 15° & : & 9.412996-10 \\
\operatorname{colog}\sin\ \theta & : & \underline{0.135377} \\
\log\sin\ \alpha'= & & 9.432627-10
\end{array}
$$

$\therefore\quad \alpha'=15°\,42'\,39''$

這個角度顯然不是計算點的方向，因爲從題目來看計算點必在定點的東南。我們若用公式(12)的第三式來計算，就可以得到正確的方向。

從第三式：

$$
\begin{array}{lll}
\log\sin{-40°} & : & 9.808067\ \ -10 \\
\log\cos\ 5° & : & 9.998344\ \ -10 \\
\operatorname{colog}\sin\ \theta & : & \underline{0.135377} \\
 & & 9.941788\,n-10 \\
 & & -0.874557 \\
 & & \underline{-0.088079} \\
 & & -0.962636=\cos\alpha
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\log\cos(-40°) & : & 9.884254-10 \\
\log\sin\ 5° & : & 8.940296-10 \\
\log\cos\ 15° & : & 9.984944-10 \\
\operatorname{colog}\sin\ \theta & : & \underline{0.135377} \\
 & & 8.944871 \\
 & & 0.088079
\end{array}
$$

$\therefore\quad \alpha=180°-15°\,42'\,39''=\underline{\underline{164°\,17'\,41''}}$

從第八圖的極三角形 NAP，我們可以得到(12)式的反關係如下：