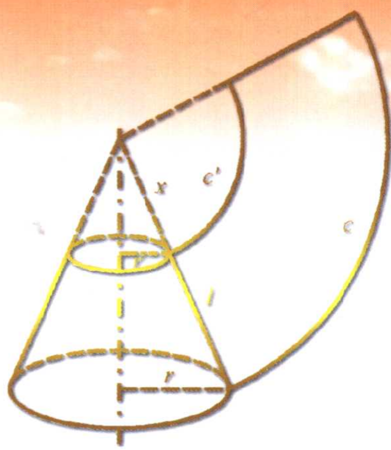
高中数学

龙门专题

多面体和旋转体

（修订版）

傅荣强 主编



龍門書局

龙门专题

多面体和旋转体

多面体和旋转体

（修订版）

主　编　傅荣强

本册主编　刘贞彦　朱　岩

聂常鹏　赵影秋

龍門書局

（修订版）

多面体和旋转体

傅荣强　主编

责任编辑　王　敏　乌　云

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京二二〇七工厂印刷

科学出版社总发行　　各地书店经销

*

2001年11月修　订　版　　开本：890×1240　A5

2002年6月第五次印刷　　印张：8 3/4

印数：90 001－120 000　　字数：324 000

ISBN 7-80160-138-6/G·174

定　价：9.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》，就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、生物四个学科共计55种，其中初中数学12种，高中数学12种，初中物理5种，高中物理7种，初中化学4种，高中化学10种，高中生物5种。

本套书在栏目设置上，主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——"基础篇"和"综合应用篇"（高中为"3+X"综合应用篇）。"基础篇"中的每节又分为"知识点精析与应用"、"视野拓展"两个栏目。其中**"知识点精析与应用"**着眼于把基础知识讲透、讲细，帮助学生捋清知识脉络，牢固掌握知识点，为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。**"视野拓展"**则是在牢固掌握基础知识的前提下，为使学生成绩"更上一层楼"而准备的。需要强调的是，这部分虽然名为"拓展"，但仍然立足于教材本身，主要针对教材中因受篇幅所限言之不详，但却是高（中）考必考内容的知识点（这类知识点，虽然不一定都很难，但却一直是学生在考试中最易丢分的内容），另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高（中）考形势，综合题与应用题越来越多，试行"3+X"高考模式以后，这一趋势更加明显。"综合应用篇"正是为顺应这种形势而设，旨在提高学生的综合能力与应用能力，使学生面对纷繁多样的试题，能够随机应变，胸有成竹。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》，有以下几个特点：

1．以"专"为先　本套书共计55种，你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2. *讲解细致完备* 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解和记忆。

3. *省时增效* 由于“专题”内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. *局限性小* 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5. *主次分明* 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2001 年 11 月 1 日

编委会（高中数学）

（修订版）

目 录

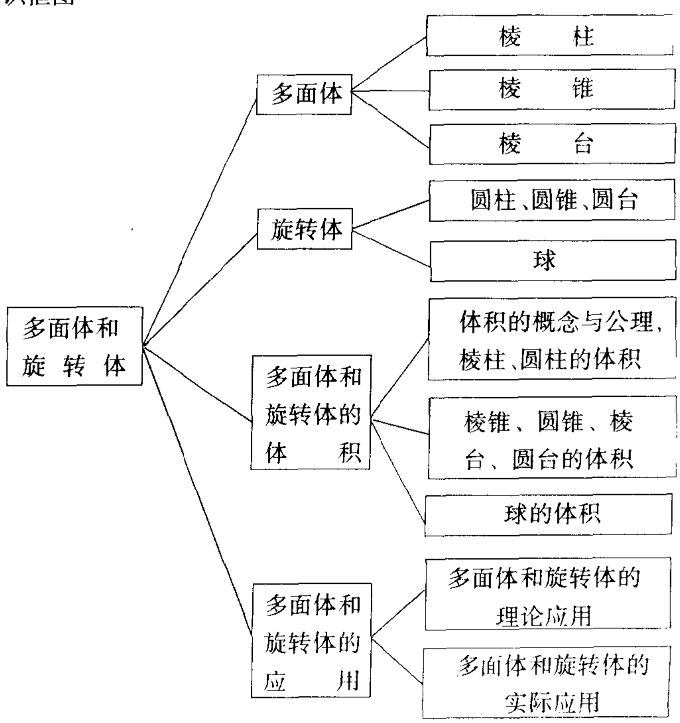
第一篇 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简说研究"数"和"形"的学科.立体几何是初等数学的一个分支,多面体和旋转体是立体几何的两大部分之一.

立体几何以"原始定义,定义,公理,定理"为公理体系,从形和数两个侧面研究空间形体的位置关系和数量关系.具体地说,立体几何的本质是研究"点,线,面,体"的"平行,垂直,成角,距离,面积,体积"等六大类问题.

多面体和旋转体理论是以平面几何、空间直线和平面理论为基础的,后继理论集中地体现在:①在几何体中延续并且发展平面几何、空间直线和平面理论;②建立几何体的侧面积与体积学说.

本书知识框图



第一讲 多 面 体

本讲知识框图

- 多面体
  - 棱柱
    - 棱柱的概念
    - 棱柱的性质
    - 棱柱的分类
    - 特殊的四棱柱
    - 长方体的三度定理
    - 棱柱的侧面积
    - 直棱柱直观图的画法
  - 棱锥
    - 棱锥的定义
    - 棱锥的性质
    - 正棱锥的侧面积
    - 棱锥的顶点在底面上的射影
    - 正棱锥的直观图的画法
  - 棱台
    - 棱台的概念
    - 特殊棱台——正棱台
    - 正棱台的性质
    - 正棱台的侧面积
    - 两个重要结论
    - 正棱台的直观图的画法

1.1 棱　　柱

重点难点归纳

重点　棱柱的概念、性质、有关面积计算,长方体的三度定理及应用.

难点　棱柱的性质的应用及有关计算和证明.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1. 棱柱的概念

有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的几何体叫做棱柱.

棱柱是多面体中最简单的一种.棱柱的概念有两个本质属性:①有两个面(底面)互相平行;②其余各面(侧面)每相邻两个面的公共边(侧棱)都互相平行.因此,棱柱有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形.但是,要注意"有两个面互相平行,其余各面都是平行四边形的几何体"不一定是棱柱,如图1-1的几何体有两个面平行,其余各面都是平行四边形,但它不满足"每相邻两个侧面的公共边互相平行",所以它不是棱柱.

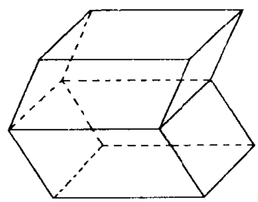


图 1-1

2. 棱柱的性质

(1)侧棱都相等,侧面是平行四边形;

(2)两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形;

(3)过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形.

对棱柱的性质可以这样理解和记忆:当你拿到一个棱柱是要看一下的,周围一看,看到侧棱和侧面;然后剖开看,横剖得到平行于底面的截面,竖剖得到过不相邻侧棱的截面.这样,三条性质尽在掌中.

3. 棱柱的分类

(1)按底面多边形的边数分类:三棱柱,四棱柱,……,n 棱柱.

(2)按侧棱与底面的位置关系分类:

$$棱柱\begin{cases}斜棱柱(侧棱与底面不垂直)\\直棱柱(侧棱垂直于底面)\begin{cases}正棱柱(底面为正多边形的直棱柱)\\其它直棱柱\end{cases}\end{cases}$$

4. 特殊的四棱柱

一些特殊的四棱柱是本节研究内容之一，为便于理解与掌握，我们把四棱柱与平行六面体及特殊的平行六面体之间的关系图示如下： 这是必须记住的！

$$\boxed{\text{四棱柱}}\xrightarrow[\text{行四边形}]{\text{底面为平}}\boxed{\text{平行六面体}}\xrightarrow[\text{于底面}]{\text{侧棱垂直}}\boxed{\text{直平行六面体}}\longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{矩形}]{\text{底面为}}\boxed{\text{长方体}}\xrightarrow[\text{正方形}]{\text{底面为}}\boxed{\text{正四棱柱}}\xrightarrow[\text{边长相等}]{\text{侧棱与底面}}\boxed{\text{正方体}}$$

5. 长方体的三度定理

定理 长方体一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱的长的平方和.

由这个定理可以派生出下面的两组重要关系式.

长方体是培养空间想象能力最理想的模型，它的每一条性质都非常重要，万万不可忽视，这个定理是解答与对角线有关的计算题的"母亲题".

(1)若对角线与各棱所成的角分别为 α、β、γ，则

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$；$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

(2)若对角线与各面所成的角分别为 α、β、γ，则

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$；$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$.

6. 棱柱的侧面积

(1)**定理** 如果直棱柱的底面周长是 c，高是 h，那么它的侧面积是

$$S_{直棱柱侧}=ch.$$

(2)斜棱柱的侧面积等于它的直截面(垂直于侧棱并与每条侧棱都相交的截面)的周长与侧棱长的乘积.

7. 直棱柱直观图的画法

类比平面几何，本题是"对角线互相平分的四边形是平行四边形"的拓展

【解题方法指导】

[例 1] 求证：对角线交于一点的四棱柱是平行六面体.

分析 证明四棱柱是平行六面体，只需证明四棱柱的底面 $ABCD$ 是平行四边形即可.

如图 1-2，已知：四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 AC_1、BD_1、CA_1、DB_1 交于一点 O.

求证：四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是平行六面体.

证明 $\because$ $AC_1\cap DB_1=O$,

$\therefore$ AC_1 和 DB_1 确定一个平面 β.

$\because$ $\beta\cap$平面 $ABCD=AD$,

$\beta\cap$平面 $A_1B_1C_1D_1=B_1C_1$,

平面 $ABCD/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$.

$\therefore$ $AD/\!/B_1C_1$.

又$\because$ $B_1C_1/\!/BC$，$\therefore AD/\!/BC$.

同理 $AB/\!/CD$. $\therefore ABCD$ 是平行四边形，

又$\because$ AC_1 是四棱柱，

$\therefore$ 四棱柱 AC_1 是平行六面体.

证明用文字语言给出的数学命题，必须先用符号语言写出“已知，求证”，然后再去证明．这是规矩！

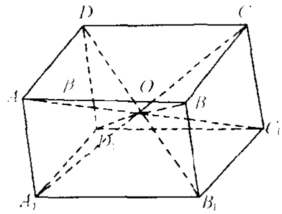


图 1-2

点评 通过平面平行的性质定理证明两直线平行，是多面体中的常见问题.

[例 2] 长方体的全面积为 11，十二条棱的长度之和为 24，则这个长方体的一条对角线长为　　三度定理的应用　　（　　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{14}$　　C. 5　　D. 6

解 设此长方体的长、宽、高分别为 x、y、z，对角线长为 l，则根据题意，有

$$\begin{cases}2(xy+yz+zx)=11, & ①\\ 4(x+y+z)=24. & ②\end{cases}$$

由②得 $x+y+z=6$,

从而根据长方体的对角线性质，得

$$l=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)}$$

$$=\sqrt{6^2-11}=5.$$

故选 C.

这是在向你介绍长方体（含正方体）这个“大家庭”中有多少个“成员”，这是重点内容！

点评 长方体有十二条棱，八个顶点，四条体对角线，六个对角面，十二条面对角线，这些是构成长方体的基本元素，必须掌握.

[例 3] 求证：对角线相等的平行六面体是长方体.

已知：在平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，对角线 $A_1C=AC_1=BD_1=B_1D$.

求证：$ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 是一个长方体.

证明 如图 1-3，连结 A_1C_1、AC.

则 对角面 A_1C_1CA 是平行四边形，

又$\because$ $A_1C=AC_1$,

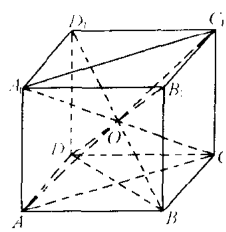


图 1-3

$\therefore$ 四边形 A_1ACC_1 是矩形，$\therefore$ $AA_1\perp AC$. 同理 $B_1B\perp BD$.

又 $\because$ $A_1A /\!/ B_1B$，$\therefore$ $A_1A \perp BD$，

$\therefore$ $A_1A \perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 此平行六面体为直平行六面体.

同理，$\left.\begin{array}{l} AB \perp \text{平面 } BCC_1 \\ BC \subset \text{平面 } BCC_1 \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp AB$，即 $ABCD$ 是矩形.

$\therefore$ $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体.

[例 4] 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中：(1)设对角线 D_1B 与自 D_1 出发的三条棱分别成 α、β、γ 角，求证：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.(2)设 D_1B 与自 D_1 出发的三个面成 α、β、γ 角，求证：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

分析 需找出 D_1B 与棱所成的角和与面所成的角.

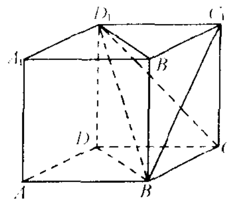


图 1-4

证明 (1)连结 BC_1，不妨设 $\angle BD_1C_1=\alpha$，如图 1-4，长方体的三条棱长分别为 a，b，c，

设 $D_1B=l$，则 $\cos^2\alpha=\dfrac{a^2}{l^2}$.

同理 $\cos^2\beta=\dfrac{b^2}{l^2}$，$\cos^2\gamma=\dfrac{c^2}{l^2}$.

$\therefore$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{l^2}=\dfrac{l^2}{l^2}=1$.

(2)连结 D_1C.

构造长方体证明其它问题经常用到这个公式

$\because$ $BC \perp$ 平面 DCC_1D_1，

$\therefore$ $\angle BD_1C$ 就是 D_1B 与平面 DCC_1D_1 所成的角.

不妨设 $\angle BD_1C=\alpha$，则 $\cos^2\alpha=\dfrac{a^2+b^2}{l^2}$，

同理 $\cos^2\beta=\dfrac{b^2+c^2}{l^2}$，$\cos^2\gamma=\dfrac{c^2+a^2}{l^2}$.

又 $l^2=a^2+b^2+c^2$，

这是长方体三度定理的直接应用，也是很有记忆价值的结论.

$\therefore$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\dfrac{2(a^2+b^2+c^2)}{l^2}=\dfrac{2l^2}{l^2}=2$.

[例 5] 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，E、F 分别是 BC、A_1D_1 的中点，

(1)求 A_1C 与 DE 所成的角；(2)求 AD 与平面 B_1ED 所成的角；(3)求平面 B_1EDF 和平面 $ABCD$ 所成的二面角的大小.

分析 (1)按照求异面直线所成的角的法则——作平行线，构成三角形.

解 (1)如图 1-5，在平面 AC 内作 $CP /\!/ DE$，交 AD 的延长线于 P，连结 A_1P、A_1C 和 CP 所成的角就是异面直线 A_1C 与 DE 所成的角.

在$\triangle A_1CP$中，$A_1C=\sqrt{3}a$，$CP=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，$A_1P=\dfrac{\sqrt{13}}{2}a$，

由余弦定理，得$\cos\angle A_1CP=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，

$\therefore$ 所求的角为$\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

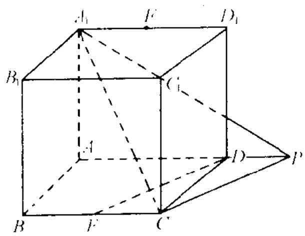


图 1-5

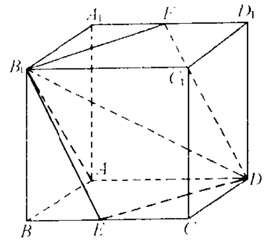


图 1-6

(2)如图 1-6，

$\because$ 正方体中，E、F分别为BC、A_1D_1的中点，

$\therefore$ $\angle ADE=\angle ADF$，AD在平面B_1EDF上的射影是$\angle EDF$的平分线.

又B_1EDF为菱形，$\therefore$ B_1D平分$\angle EDF$，故$\angle ADB_1$即为所求.

在$\mathrm{Rt}\triangle AB_1D$中，$AD=a$，$B_1D=\sqrt{3}a$，

$\therefore$ $\cos\angle ADB_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即所求角为$\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)如图 1-7，

连结EF、B_1D，交于O点，O点平分B_1D即为正方体的中心，作$OM\perp DE$于M，$OH\perp$平面AC于H，连结MH，则$MH\perp DE$，

$\therefore$ $\angle OMH$为二面角B_1-DE-A的平面角.

在$\mathrm{Rt}\triangle EOD$中，

$OE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$OD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，斜边$DE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，

$\therefore OM=\dfrac{OE\cdot OD}{DE}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}a$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OHM$中，$\sin\angle OMH=\dfrac{OH}{OM}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

即所求二面角为$\arcsin\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，或$\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

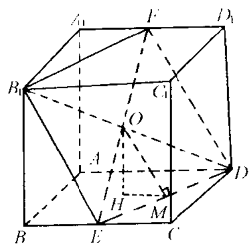


图 1-7

[例 6]　斜三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 5 的正三角形，侧棱长为 4，侧棱 AA_1 和底面两边 A_1B_1、A_1C_1 都成 60°角，求这个棱柱的侧面积.

立体几何里有称为求"三大角"的计算，即：异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角．本题以正方体为背景，将三大角综合到一个题中，很有研究价值．

分析　考虑到公式 $S_{侧}=C_{直截面}\cdot l$，因而只需过 B_1 作出侧棱 AA_1 的直截面，或者由 $S_{侧}$ = 各侧面面积之和，而四边形 AA_1B_1B、AA_1C_1C 的面积可直接求出，故只需考虑如何求四边形 BB_1C_1C 的面积．因为 AA_1 与 A_1C_1、A_1B_1 成等角．所以可证 A_1 在底面 $A_1B_1C_1$ 上的射影在 $\angle B_1A_1C_1$ 的角平分线上，从而得到 $AA_1\perp B_1C_1$，故四边形 BB_1C_1C 为矩形，其面积即可求出．

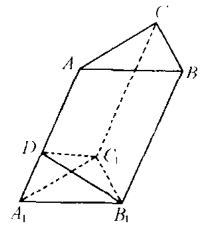


图 1-8

解法一　如图 1-8，作 $B_1D\perp AA_1$，垂足为 D. 连结 C_1D

$\because$　$A_1B_1=A_1C_1, A_1D=A_1D, \angle DA_1B_1=\angle DA_1C_1$，

$\therefore$　$\triangle A_1B_1D\cong\triangle A_1C_1D$，$\therefore$　$B_1D=C_1D$.

$\angle A_1DB_1=\angle A_1DC_1=90°$，$\therefore$　$C_1D\perp AA_1$.

又 $\because$　$B_1D\perp AA_1$，

$\therefore$　$AA_1\perp$ 面 B_1DC_1.

$\therefore$　面 DB_1C_1 是斜三棱柱的直截面.

$\therefore$　$S_{侧}=AA_1(B_1D+C_1D+B_1C_1)$.　　侧面三个矩形面积的和．

$Rt\triangle A_1DB_1$ 中，$B_1D=A_1B_1\sin60°=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore$　$S_{侧}=4(2\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{2}+5)=20(1+\sqrt{3})$.

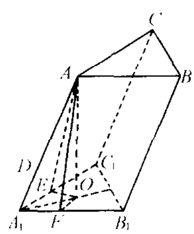


图 1-9

解法二　如图 1-9，作 $AO\perp$ 面 $A_1B_1C_1$，O 为垂足，在面 $A_1B_1C_1$ 上作 $OE\perp A_1C_1$ 于 E，$OF\perp A_1B_1$ 于 F. 连结 AE，AF，由三垂线定理，得 $AE\perp A_1C_1$，$AF\perp A_1B_1$.

又 $\because$　$\angle AA_1E=\angle AA_1F, AA_1=AA_1$，

$\therefore$　$\triangle A_1AF\cong\triangle A_1AE$，

$\therefore$　$A_1E=A_1F$，$\therefore$　$Rt\triangle A_1EO\cong Rt\triangle A_1FO$，

$\therefore$　$OE=OF$，

又 $\because$　$OE\perp A_1C_1, OF\perp A_1B_1$，

$\therefore$　O 点在 $\angle B_1A_1C_1$ 的平分线上，

即 A_1O 是 $\angle B_1A_1C_1$ 的平分线.

这个结论很重要，内容是：到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上．

又 $\because$　$\triangle A_1B_1C_1$ 是正三角形，$\therefore$　$A_1O\perp B_1C_1$.

又 $\because$　A_1O 是斜线 AA_1 在面 $A_1B_1C_1$ 上的射影，