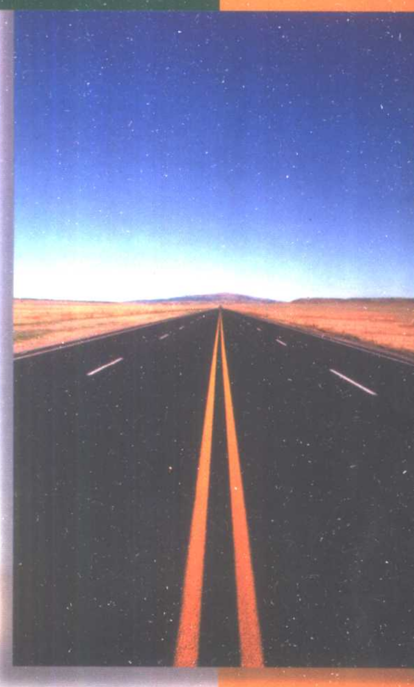
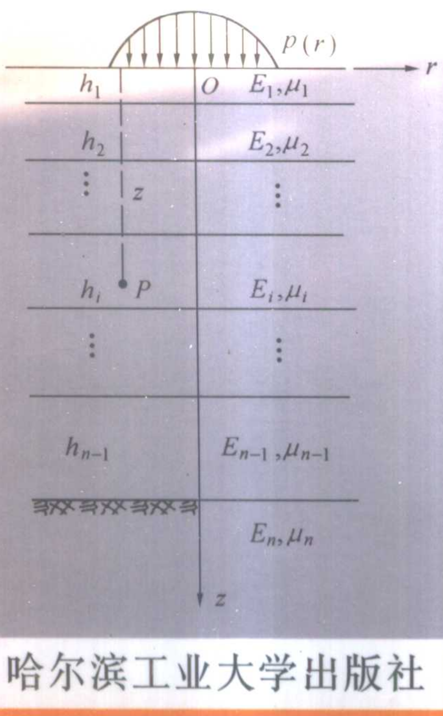
路桥结构理论与工程系列丛书

层状弹性体系力学

郭大智　冯德成　编著





哈尔滨工业大学出版社

层状弹性体系力学

郭大智　冯德成　编著

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内容提要

本书是在高等学校道路工程专业研究生使用的讲义基础上，经修改、补充而成的一本层状弹性体系力学基础理论书。本书内容主要包括：轴对称圆形荷载作用下层状弹性体系的应力与位移力学分析；非轴对称圆形荷载作用下层状弹性体系的应力与位移力学计算；多圆荷载作用下层状弹性体系的应力与位移叠加；层状弹性体系上的板体理论等。

本书可供高等学校道路工程专业高年级学生、研究生以及从事道路工程的设计、研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

层状弹性体系力学/郭大智编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2001.8

ISBN 7-5603-1616-6

Ⅰ.层…　Ⅱ.郭…　Ⅲ.层状体系-路面-弹性力学　Ⅳ.U416.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 054486 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真	0451—6414749
印　　刷	地矿部黑龙江测绘印制中心印刷厂
开　　本	787×1092　1/16　印张 19.25　字数 446 千字
版　　次	2001 年 8 月第 1 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-5603-1616-6/TU·22
印　　数	1～3 000
定　　价	32.00 元

前　言

路面力学是拟定与研究沥青路面和水泥混凝土路面设计方法的理论基础，它包括层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学两大部分。为了适应培养研究生与开展路面设计理论和方法研究的需要，上海同济大学朱照宏教授、西安长安大学王秉纲教授和哈尔滨工业大学郭大智教授撰写了《路面力学计算》，并于 1985 年 9 月由人民交通出版社正式出版。这本书主要介绍均质体、双层体系和三层体系应力与位移的分析方法，为在我国普及路面力学知识起到了较大的促进作用。近几十年来，路面力学得到极大发展，尤其是我国的道路工作者做出卓越的成绩，将路面力学向前推进一大步。

1962 年前后，为了建立柔性路面设计的理论基础，国内对层状弹性体系理论积极开展研究工作。为此，1963 年本专题被列入国家十年科研规划重点课题的第 2115 项。当时，朱照宏教授利用轴对称洛甫位移函数求得双层和三层弹性体系在单圆均布垂直荷载作用下的应力与位移分量表达式；吴晋伟高级工程师根据轴对称苏斯威尔位移函数也导出双层和三层弹性体系在单圆均布垂直荷载作用下的应力和位移分量解析解。应当指出，这两种解法尽管表达式有所不同，但其计算结果却完全相同，而且是非常实用和有效的。1973 年左右，笔者采用非轴对称洛甫位移函数得到双层和三层弹性体系在单圆均布单向水平荷载作用下的应力与位移分量理论解。这些成果虽然只是学习消化国外文献的结果，但它为我国今后的研究工作打下了良好的基础。

采用位移函数法求解应力与位移分量一般解时，必须满足如下两条要求：一是必须找出应力与位移分量与位移函数的关系式；二是位移函数必须为某一微分方程的解，否则，无法利用位移函数求解。因此，笔者和钟阳教授根据拉梅方程式，采用积分变换方法，分别以不同的物理量作为基本变量求解。在笔者的方法中，采用位移分量作为基本变量求解；钟阳教授先求得体积变形的解，然后再利用体积变形和位移分量的关系式求得位移分量的一般解。这两种解法大同小异，均属位移法求解。另外，钟阳教授还根据状态方程提出传递矩阵法，导出应力与位移分量的一般解。这三种求应力与位移一般解的方法，不仅解法新颖，而且应用广泛。

随着国民经济的高速发展，高等级公路也得到迅速发展。高等级公路必须修筑高等级路面，才能适应交通量高速发展的需要。对于高等级路面，其路面层数往往超过三层，有的路面层数达到七层之多。因此，对于多层弹性体系的应力与位移如何计算，是一个急需解决的问题。在这方面，吴晋伟高级工程师提出“反力递推法”，笔者提出“系数递推法”，王凯教授提出“递推回代法”。这

三种解法均优于“矩阵解法”。

1964年，由于路面弯沉仪在我国全面推广应用，需要解决双圆和多圆荷载作用下的应力和位移分量的计算问题，笔者采用“两次坐标变换法”，导出多圆荷载作用下某点的应力和位移叠加公式。

在分析单圆均布单向水平荷载下层状弹性体系表面($z=0$)圆形周边($r=\delta$)处的应力时，发现其中某些应力值为无穷大。产生这种理论值与实际值不符的原因在于单向均布水平荷载在周边处有“突弯”。为了避免这种现象的产生，笔者提出高次抛物面荷载，只要该荷载中的荷载系数取值适当，就会解决这种现象的发生。因此，有必要将这些成果加以总结，编辑成册。由于需要添加的内容较多，故决定编写《路面力学中的工程数学》、《层状弹性体系力学》、《层状粘弹性体系力学》等三本书。

层状弹性体系力学可以分为数学层状弹性体系力学和实用层状弹性体系力学两部分。在数学层状弹性体系力学里，只采用精确的数学推演而不引用关于形变状态或应力分布的假定；在实用层状弹性体系力学中，则引用形变状态或应力分布的假定来简化数学推演，得出具有一定近似性的解答。层状弹性体系上的板体理论就属于实用层状弹性体系力学范畴。因此，本书就是围绕这两部分内容展开分析研究的。

在本书编写过程中，曾得到侯云、郭玉青、谭忆秋、王彩霞、吴思刚、冯德有、王志永、姜丽伟、胡慧红等人的大力帮助，在此深表感谢。

本书除了可供高等学校道路工程专业研究生学习使用外，还可供从事路面工程设计、研究工作的人员学习参考之用。由于编者水平有限，书中的不妥之处在所难免，敬请读者批评指正，以便进一步修正补充。

郭大智

2001年3月

作者简介

郭大智，哈尔滨工业大学教授。1936年出生于湖北武汉。1961年大学毕业。留校工作三十多年来，一直从事路面设计理论与方法的研究工作，先后进行了“柔性路面设计方法和计算参数”、“半刚性基层上沥青路面”、“柔性路面可靠度分析”等课题的理论分析工作，在层状弹性体系力学和层状粘弹性体系力学计算中独创了简捷可行的“郭大智解法”，所研制的“沥青路面设计与验算软件系统”（APDS系统），现已在全国各大公路设计研究院广泛使用。并参加1986年《公路柔性路面设计规范》和1997年《公路沥青路面设计规范》的编写工作。曾获国家科技进步二等奖，国家教委科技进步一等奖和多项省部级科技进步奖。1985年荣获建设部科技先进工作者称号，1991年获国务院颁发的政府特殊津贴。

目　　录

第一篇　基本理论

第二篇　轴对称空间课题的力学分析

第三篇　非轴对称空间课题的应力与位移

第四篇　多圆荷载作用下的应力与位移分析

第一篇　基本理论

第一章　绪　　论

层状弹性体系力学，又称层状弹性体系理论，它专门研究在圆形荷载作用下层状弹性体系内产生的应力与位移。近几十年来，由于计算机的应用，层状弹性体系力学得到迅速发展。在这方面是我国道路工作者的贡献更为突出，他们不仅提出多层体系的各种独特解法，而且在推导层状弹性体系的一般解时，也找到几种有别于位移函数（或应力函数）解法的新颖方法。

层状弹性体系力学是路面设计的理论基础，各国学者都以不同的方式将其运用到路面设计中去。目前，根据层状弹性体系力学的研究成果，建立路面设计的理论法或半理论法，已成为国际公认的共同趋势。在我国，这种方法在沥青路面设计和水泥混凝土路面设计中，都较好地得到运用，并分别制定出相应的设计规范。

为了更好地学习层状弹性体系理论，本章着重介绍几个基本概念。

第一节　路基路面体系的力学模型

路面体系是支承在土基上的层状结构，在构造上比较复杂。这种路基路面结构体系有如下一些特点。

(1) 作用在路表面上的外荷载为汽车荷载，它对路表面不仅作用有垂直荷载，而且有单向水平荷载的作用，这种荷载还是多次重复的动荷载，且为随机荷载。同时，汽车轮胎的印迹近似呈椭圆形，在印迹上的压力分布也并不完全是均布荷载。

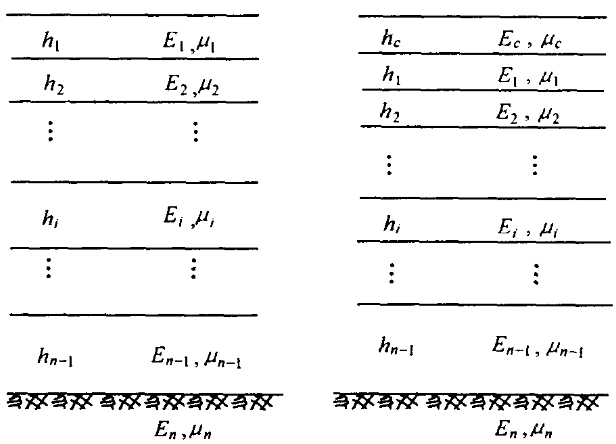
(2) 路基路面材料具有多样化的特点，这就决定其力学性能也不尽相同。除水泥混凝土路面材料比较接近线性弹性体外，其他路基路面材料往往具有弹性、粘性和塑性等力学性质，有的材料还具有各向不均匀性的特点。如高温下的沥青混凝土、松散颗粒材料和路基土等。

(3) 路基路面结构体系除承受汽车荷载作用外，还要反复经受环境因素（主要是水温状态）的影响。环境因素的作用，也会使路基路面的结构体系的力学性能和使用性能发生较大的变化。在北方季冻区，冬天因水温的影响，产生不均匀冻胀，甚至发生路面结构破坏，严重

影响使用性能;春季又会产生融化,严重时形成翻浆。由于温度的变化,沥青混凝土路面材料在低温度时呈弹性性质,而高温条件下呈粘弹性性能,甚至呈粘塑性性能;由于温差的影响,水泥混凝土路面产生过大的温度应力,以至于在构造上不得不考虑采用分块的技术措施来消减其温度应力;由于水分的影响,或使路表产生松散,或使路面结构层的强度和刚度降低,引起破坏,或使土基的强度和刚度下降,引起路表下沉,产生裂缝,甚至出现龟裂。

为路基路面结构体系建立力学模型,是运用科学原理来解决实际工程问题的一种有效方法。但如果试图建立一个包罗万象的力学模型来分析路基路面结构体系的内力,势必出现过于复杂甚至无法求解的局面;如果采用回避矛盾的办法,根据实际经验确定路面结构的尺寸,这将过于简单化,并具有相当大的局限性,特别是当采用新材料时就无能为力。因此,很多路面设计理论的研究人员总是力图采用某些假设,抓住主要矛盾,忽略次要因素,使路基路面结构体系的力学模型得以简化,从而获得理论解答。建立力学模型越完善,其所得理论结果就越接近实际,尽管如此,但仍然存在一定的差距。这种理论与实践的不一致性,可通过各种实验手段对理论结果加以修正,取得理论与实践的统一。实践证明,这种理论加修正的方法是解决实际工程设计问题的行之有效的办法。

当前发展比较完善的层状弹性体系理论,它与路基路面结构体系的真实情况尚有很大的差异。如果采用非线性弹性的力学、塑性力学、粘弹性理论等来分析路基路面结构问题,则在力学上和数学上还有很多难以克服的难题,甚至无法求解,即使求得理论解,又因参数过多,不能在实际中得以应用。为了解决路面设计问题,这就需要根据目前可能运用的力学和数学手段,建立尽可能符合实际的力学模型。因此,人们一般将沥青路面的力学模型归结为层状弹性体系,而水泥混凝土路面的力学模型采用层状弹性体系上的板体理论。这两种力学模型,如图 1.1 所示。



(a) 层状弹性体系　　(b) 层状弹性体系上的板

图 1.1

上图中,1 ~ (n - 1)层相当于各路面结构层,其结构参数 h_i, E_i, μ_i 分别为第 i 层的厚度(cm)、弹性模量(MPa)、泊桑比;第 n 层相当于土基,其弹性参数 E_n, μ_n 分别为弹性模量(MPa)、泊桑比;h_c, E_c, μ_c 分别为板的厚度(cm)、弹性模量(MPa)、泊桑比,这一层板相当于水泥混凝土路面。

层状弹性体系包括弹性半空间体($n = 1$)和 n 层弹性体系,其中,$n = 2,3,\cdots$ 若水平面方向和垂直向下的深度方向均为无限大的弹性体,称为弹性半空间体(或弹性均质体),它是土基的力学模型。在弹性半空间体上有 $n - 1$ 层具有有限厚度,且水平面方向均为无限大的弹性结构层,称为 n 层弹性体系。

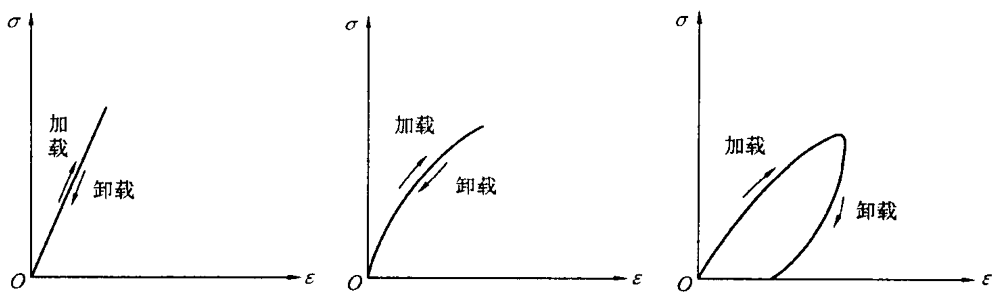
第二节　基本假设

为了从层状弹性体系力学问题中的已知量求出未知量，必须建立这些已知量与未知量的关系，以及各未知量之间的关系，从而导出一套求解的方程。在寻找方程时，可以从下述三个方面进行分析：一是力学条件，建立应力的平衡方程；二是几何条件，建立形变与位移之间的关系；三是物理条件，建立形变与应力之间的关系。

在推导方程时，如果精确考虑各方面的因素，则导出的方程将会非常复杂，甚至无法求解。因此，通常应按照研究对象的性质，联系求解问题的范围，做出若干基本假设，从而略去一些暂时不考虑的因素，使得方程易于求解。为此，对层状弹性体系做出五条基本假设。

一、关于理想弹性、完全均匀和各向同性的假设

若物体在外力作用下产生变形，卸载后，物体完全恢复到原来的形状，则该物体称为弹性体；如果卸载后，物体不能恢复原状，则称为非弹性体。当弹性体的应力与形变的关系呈直线关系时，则称为线性弹性体；呈曲线关系，则称为非线性弹性体，如图 1.2 所示。



(a) 线性弹性体　(b) 非线性弹性体　(c) 非弹性体

图 1.2

在这种假设中，理想弹性是指层状弹性体系为线性弹性体，完全服从广义虎克定律，其应力与形变成正比例。反映这种比例关系的常数称为弹性参数，它不随应力或形变的大小而变化。而完全均匀是指每层由同一种材料组成，并具有相同的弹性性质。因此，其弹性参数不随位置坐标而变。所谓各向同性是指同一点所有方向上的弹性参数相同，它不随方向而变。

根据这条假设，层状弹性体系力学所研究的对象为线性弹性体，完全服从广义虎克定律，弹性参数为常数。

二、关于连续性假设

这条假设认为物质充满物体的整个空间，没有任何空隙，不考虑物质的原子结构，更不考虑物质的分子运动。这样，可以应用连续函数来描述应力、形变与位移等物理量的变化规律。实际上，一切物体均由微粒组成，都不符合这条假设，但是，只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离远远比物体本身的尺寸小，那么这条假设所引起的误差不会显著。

三、关于自然应力状态等于零的假设

按照这个假设，在施加外荷之前，假定存在于物体内的初应力等于零。换句话说，在层状弹性体系理论中所求的应力不是物体的实际应力，而仅仅是在未知初应力上的增加值。

四、关于微小形变和微小位移的假设

假定物体受力后，各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，且形变和转角都远小于 1。这样，在建立物体变形后的平衡方程时，就可用变形前的尺寸代替变形后的尺寸，而不致引起显著的误差。同时，转角和形变的二次幂或乘积都可以忽略不计。这个假设使得层状弹性体系力学中的代数方程和微分方程均可简化为线性方程。

五、关于无穷远处应力、形变和位移等于零的假设

根据这条假设，当 r 趋于无穷大时，层状弹性体系中的应力、形变和位移等于零；当 z 趋向无穷大时，其应力、形变和位移也等于零。实际上，路基路面结构体系中，在离荷载足够远处，其应力、形变和位移就等于零。这就是说，实际结构要比层状弹性体系的应力、形变和位移的收敛速度快得多。

第三节　空间坐标系

在层状弹性体系中，由于水平面方向无限大，故宜采用柱面坐标系求解。柱面坐标系也是正交坐标系，采取右手法则，且 z 轴向下，如图 1.3 所示。

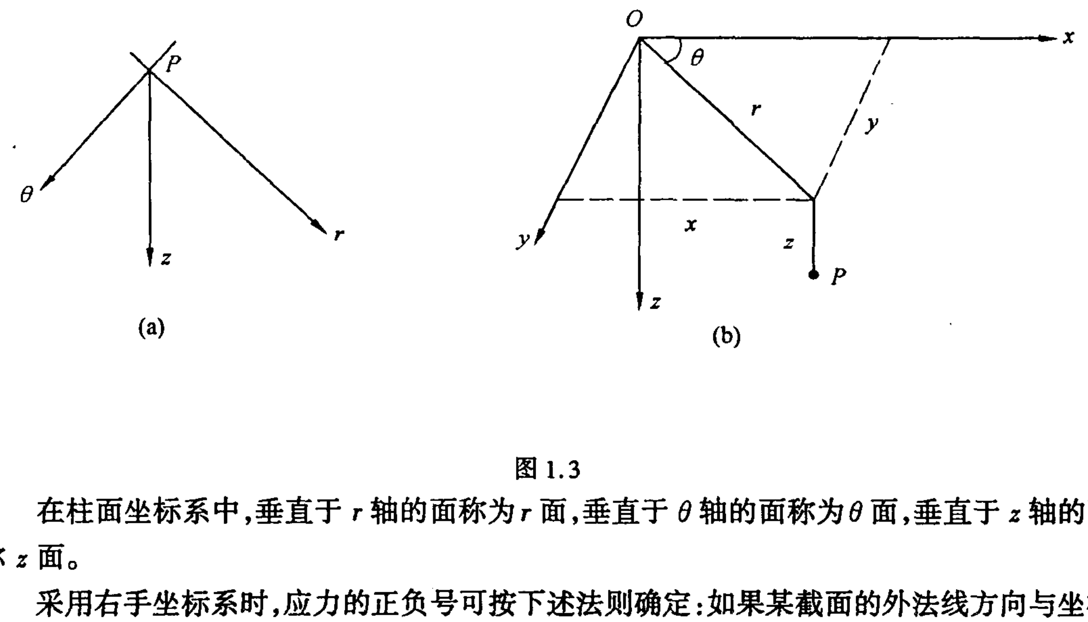


图 1.3

在柱面坐标系中，垂直于 r 轴的面称为 r 面，垂直于 θ 轴的面称为 θ 面，垂直于 z 轴的面称 z 面。

采用右手坐标系时，应力的正负号可按下述法则确定：如果某截面的外法线方向与坐标轴一致，则这个截面称为正面；而该面上的应力分量就以沿坐标轴的正方向为正，沿坐标轴的负方向为负。相反，如果某截面的外法线方向与坐标轴方向相反，则这个截面称为负面；而

该面上的应力分量就以沿坐标轴的负方向为正,沿坐标轴的正方向为负。

根据空间的解析几何可知,柱面坐标系与直角坐标系之间的坐标关系式可表示为

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{1.3.1}$$

又根据复合函数求导公式,则可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases} \tag{1.3.2}$$

二阶导数的变换式可表示为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) + \dfrac{\cos 2\theta}{2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) - \dfrac{\sin 2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\right) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) - \dfrac{\cos 2\theta}{2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) + \dfrac{\sin 2\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\right) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \dfrac{\sin 2\theta}{r}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) + \dfrac{\cos 2\theta}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\right) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \end{cases}$$

$$(1.3.3)$$

坐标及其导数的变换式,不仅在推导应力、形变与位移坐标变换式时是十分有用的数学公式,而且在演算柱面坐标系下的基本方程式时,也是不可缺少的重要工具。

第四节　轴对称课题与非轴对称课题

当采用柱面坐标系求解层状弹性体系时,根据结构和荷载的实际情况,可分为轴对称课题与非轴对称课题。若应力分量、形变分量与位移分量都只是 r 和 z 的函数,而与极角 θ 无关,则称为轴对称课题;否则,如果应力、形变与位移等分量均为坐标 r, z 和 θ 的函数,则称为非轴对称课题。

在空间问题中,提出如下三条作为判断轴对称课题或非轴对称课题的条件:(1) 结构具有对称轴;(2) 荷载也具有对称轴;(3) 结构对称轴与荷载对称轴重合。

如果上述三个判断条件均得到满足,则该问题必属轴对称课题;若其中有任何一条不能满足,则该问题定为非轴对称课题。对于层状弹性体系而言,由于其水平面无限大,因此结构必然具有对称轴。如果荷载具有对称轴,则结构对称轴必然与荷载对称轴重合,故其判断条件只需根据荷载情况而定。若荷载对称于某轴,则称为层状弹性体系轴对称课题;否则称为层状弹性体系非轴对称课题。

第五节　荷载表达式

汽车在路上行驶，不仅作用有垂直荷载，而且还作用有单向水平荷载，汽车轮胎的印迹是近乎于椭圆形，但为简化计算，一直将其视为圆形，故汽车荷载可归结为圆形轴对称垂直荷载和圆形单向水平荷载。下面将这两种荷载做进一步分析。

一、圆形轴对称垂直荷载分析

长期以来，在路面设计中，一直将汽车轮胎垂直荷载简化为圆形均布垂直荷载，其荷载表达式如下

$$p(r)=\begin{cases}p & (r<\delta)\\ 0 & (r<\delta)\end{cases} \tag{1.5.1}$$

其中，p 为荷载集度(MPa)；δ 为轮胎当量圆半径(cm)。

上述均布荷载在周边($r=\delta$)处的荷载集度发生突变，当 $r=\delta-0$ 时，则有 $p(r)=p$；当 $r=\delta+0$ 时，则得 $p(r)=0$。因此，在间断点($r=\delta$)处的荷载值等于左极限与右极限之和的一半，即 $p(\delta)=\frac{p}{2}$。这种荷载的突变，使得间断处的某些理论计算结果与实际物理现象不符，尤其是圆形单向均布水平荷载作用下表面周边处某些应力分量的理论值趋于无限大，即产生数学上的“奇点”问题。为了解决均布荷载在理论上带来的问题，国内外学者曾对圆形、半球形垂直荷载进行过研究，这种荷载的表达式为

$$p(r)=\begin{cases}\dfrac{3p}{2}\sqrt{1-\dfrac{r^2}{\delta^2}} & (r<\delta)\\ 0 & (r<\delta)\end{cases} \tag{1.5.2}$$

这种半球形荷载的最大的优点在于周边处荷载连续，而其缺点是荷载集度过分向圆中心处集中，使得某些点的理论值与实测相差较大。

为了解决这些矛盾，王凯教授提出“碗形”荷载公式，其一般表达式如下

$$p(r)=\begin{cases}\dfrac{m+1}{m}p[1-(\dfrac{r}{\delta})^{2m}] & (r<\delta)\\ 0 & (r>\delta)\end{cases} \tag{1.5.3}$$

碗形分布垂直荷载表达式较上述两种荷载表达式有所进步，但计算起来似乎麻烦些，且与其他荷载表达式缺乏内在联系，对此，我们提出，任意次旋转抛物面垂直荷载表达式。这种圆形轴对称垂直荷载的一般表达式为

$$p(r)=\begin{cases}mp(1-\dfrac{r^2}{\delta^2})^{m-1} & (r<\delta)\\ 0 & (r>\delta)\end{cases} \tag{1.5.4}$$

其中，m 为荷载类型系数，$m>0$；p 为均布荷载集度。

几种常见的荷载表达式都包括在这种轴对称垂直荷载的一般表达式之中，比如当 $m=1$ 时，就是圆形均布垂直荷载的表达式；当 $m=\frac{3}{2}$ 时，则为半球形垂直荷载的表达式；

在两者之间，例如，取 $m = 1.1$ 时，也许会更趋于荷载分布的实际情况；当 $m = 0.5$ 时，又相当于刚性承载板下的压力分布。有关这种圆形轴对称垂直荷载随 m 值的变化规律，如图 1.4 所示。从图 1.4 可以看出，当 $m \leqslant 1$ 时，荷载在 $r = \delta$ 处间断；当 $m > 1$ 时，荷载在 $r = \delta$ 处连续。

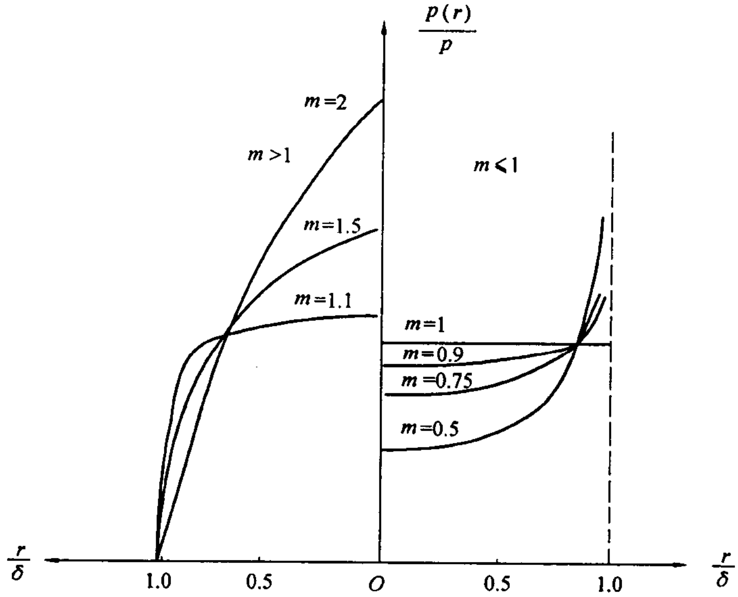


图 1.4

圆形轴对称垂直荷载的零阶亨格尔积分变换式为

$$\bar{p}(\xi) = \int_0^{\infty} rp(r)\mathrm{J}_o(\xi r)\mathrm{d}r = mp\int_0^{\delta} r\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^{m-1}\mathrm{J}_o(\xi r)\mathrm{d}r$$

若令 $r = \delta\sin\theta$，则有

$$\mathrm{d}r = \delta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

当 $r = 0$ 时，$\theta = 0$；当 $r = \delta$ 时，$\theta = \frac{\pi}{2}$，故上述积分变换式可改写下式

$$\bar{p}(\xi) = mp\delta^2\int_o^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^{2m-1}\theta\ \mathrm{J}_o(\xi\delta\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

又根据第一索宁有限积分公式

$$\int_o^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{J}_\mu(x\sin\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}\mathrm{J}_{\mu+\nu+1}(x) \qquad (\mu > -1, \nu > -1)$$

当 $\mu = 0, \nu = m - 1$，则可得圆形轴对称垂直荷载的零阶亨格尔积分变换式如下

$$\bar{p}(\xi) = \frac{2^{m-1}\Gamma(m+1)p\delta}{\xi(\xi\delta)^{m-1}}\mathrm{J}_m(\xi\delta) \tag{1.5.5}$$

当 $m = 1$ 时，则式(1.5.5)可以化为圆形均布垂直荷载的零阶亨格尔积分变换式如下

$$\bar{p}(\xi) = \frac{p\delta\mathrm{J}_1(\xi\delta)}{\xi} \tag{1.5.6}$$

当 $m = \frac{3}{2}$ 时，则式(1.5.5)又可化为半球形垂直荷载的零阶亨格尔积分变换式如下

$$\bar{p}(\xi) = \frac{3\sqrt{2\pi\delta}}{4\xi^{\frac{3}{2}}} J_{\frac{3}{2}}(\xi\delta)$$

其中，$J_{\frac{3}{2}}(\xi\delta)$ 为半奇数阶贝塞尔函数，它可用初等函数表示。

根据半奇数阶贝塞尔函数理论，则有

$$J_{\frac{1}{2}}(\xi\delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi\delta}} \sin \xi\delta$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(\xi\delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi\delta}} \sin \xi\delta$$

又根据贝塞尔函数的递推公式，有

$$J_{\frac{3}{2}}(\xi\delta) = \frac{1}{\xi\delta} J_{\frac{1}{2}}(\xi\delta) - J_{-\frac{1}{2}}(\xi\delta)$$

故半球形垂直荷载的零阶亨格尔积分变换式可用初等函数表示如下

$$\bar{p}(\xi) = \frac{3p\delta}{2\xi} \cdot \frac{\sin \xi\delta - \xi\delta \cos \xi\delta}{(\xi\delta)^2} \tag{1.5.7}$$

当 $m = \frac{1}{2}$ 时，则式(1.5.5)可化为刚性承载板下的压力分布，其零阶亨格尔积分变换式可表示如下

$$\bar{p}(\xi) = \frac{\pi\xi\delta}{2\sqrt{2\xi}} \cdot p\delta J_{\frac{1}{2}}(\xi\delta)$$

若用初等函数表示，则可得

$$\bar{p}(\xi) = \frac{p\delta \sin \xi\delta}{2\xi} \tag{1.5.8}$$

总而言之，圆形轴对称垂直荷载的一般表达式，将常见的几种荷载计算公式都包含在其中。这种荷载表达式不仅表达简洁，而且各种类型荷载表达式的内在联系也更加明显。

二、圆形单向水平荷载分析

根据库伦定律，则圆形单向水平荷载可表示如下

$$s(r) = fp(r)$$

其中，f 为水平荷载系数，一般为 $0 \leqslant f \leqslant 1$；$p(r)$ 为圆形轴对称垂直荷载。

若将式(1.4.4)代入上式，则可得

$$s(r) = \begin{cases} fmp\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^{m-1} & (r < \delta) \\ 0 & (r > \delta) \end{cases} \tag{1.5.9}$$

圆形单向水平荷载的零阶亨格尔积分变换式可表示为

$$\bar{s}(\xi) = \frac{2^{m-1}\Gamma(m+1) + p\delta}{\xi(\xi\delta)^{m-1}} J_m(\xi\delta) \tag{1.5.10}$$

有关圆形单向水平荷载及其零阶亨格尔积分变换式的进一步分析，完全同于圆形轴对