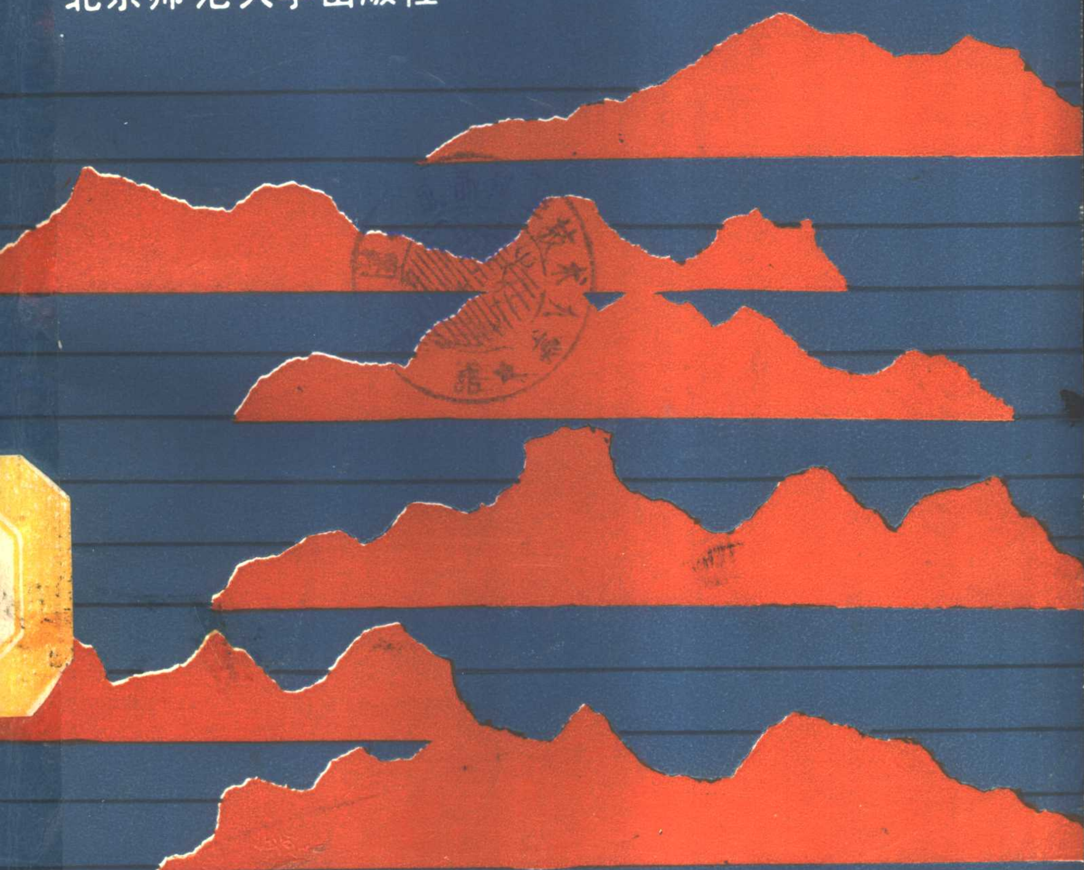
高等学校教学用书

现代地理统计分析

巢俊民

北京师范大学出版社



高等学校教学用书

现代地理统计分析

巢俊民　编著

北京师范大学出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了在现代地理学各领域研究中用到的近代数理统计分析方法的原理及其应用。全书共十一章，主要内容有：回归分析、聚类分析、判别分析、主成分分析、因子分析和典型相关分析等多元分析内容，还有属于时间序列分析的长期变化趋势分析、主要周期振动分析、动态系统各种数学模型和预测等内容，这些内容构成了现代地理学统计分析的完整体系。

本书可以作为大学地理系研究生和本科生的教材或教学参考书，还可以作为地理、环境、经济、气象、农业、生物等有关专业的教学、科研和实际工作人员的参考书。

高等学校教学用书
现代地理统计分析
巢俊民 编著
*
北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：16.125 字数：398 千
1991 年 4 月第 1 版 1991 年 4 月第 1 次印刷
印数：1—1 500

ISBN 7-303-01099-8/K・35
定价：4.95 元

前　言

近20多年来，在地理学各个领域的研究中广泛吸收和应用了其它学科的近代理论、方法和工具，使地理学得到了非常显著的进步和发展，取得了很多非常有价值的成果，形成了现代地理学的各个分支。这种巨大进展的一个重要原因是由于使用了性能优良的电子计算机，在地理学各领域研究中广泛应用了现代数理统计分析方法和现代运筹学分析方法，使一直处在定性分析的地理学进入了定量分析阶段，也就是人们常说的地理学的"计量革命".本书将系统地论述在现代地理学各个领域中用到的各种现代数理统计方法的原理以及它们的应用.

本书是根据作者多年在北京师范大学地理系给研究生和本科生讲授的地理学统计分析课程而编写成的.全书共分为十一章：第一章和第二章主要介绍线性代数和随机向量理论的有关内容；第三章到第七章主要论述多元分析各种方法的原理及其在地理学各领域研究中的应用，其中包括回归分析、聚类分析、判别分析、主成分分析、因子分析、典型相关分析和趋势面分析等内容；第八章到第十一章主要论述时间序列分析的原理、方法及其应用，其中包括随机过程理论的介绍、长期变化趋势分析、主要周期振动分析、动态系统的各种数学模型和预测方法.

本书编写中主要参考的著作有，张尧庭和方开泰著《多元统计分析引论》，陈希儒等著《近代实用回归分析》，项静括等著《动态数据处理——时间序列分析》，苏炳凯著《大气科学中的统计诊断与预测》，阳含熙、卢经愚等《植物生态学的数量分类法》，王学仁著《地质数据的多变量统计分析》，黄嘉佑著《气象中的谱分析》等，还

引用了许多国内国外期刊上的文献，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中一定还有许多缺点和错误，欢迎读者批评指正。

巢俊民
于北京师范大学地理系

目　录

第一章　线性代数

§1.1　矩阵的代数运算

一、连加号 $\sum$

定义

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \triangleq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

运算规则:

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i + c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i$;

2. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + c) = \sum_{i=1}^{n} a_i + nc$;

3. $\sum_{i=1}^{n} Ka_i = K\sum_{i=1}^{n} a_i$;

4. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$;

5. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_j a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$;

6. 如果 $\sum_{i=L}^{K} a_i$ 中的 L 和 K 都是整数，当 $K < L$ 时一般约定

$$\sum_{i=L}^{K} a_i = 0 \ (K < L \text{时}).$$

二、矩阵的定义和种类

定义 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列数表，称为一个 m 行 n 列矩阵，用大写字母 A 表示

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

也常简称为 $m \times n$ 阶矩阵，记为 $\underset{m\times n}{A}$，a_{ij} 为矩阵的元素，i 为行下标，j 为列下标，表示元素 a_{ij} 在第 i 行和第 j 列的位置上，所以矩阵也可以简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$.

在地理学的分析研究中，常把收集到的各种数据排成矩阵，称为资料阵（Data Matrix），以便于输入计算机进行计算和分析.

矩阵种类：

1. 如果矩阵只有一列 $A=(a_i)_{m\times 1}$，则称为一个向量，a_i 称为向量第 i 个分量；

2. 如果矩阵的行列数相等 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，则称此矩阵为 n 阶方阵；

3. 如果一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的所有元素满足 $a_{ij}=a_{ji}$，那么称此矩阵为对称阵. 如果 A 为复数 n 阶方阵，即 a_{ij} 为复数，它的所有元素满足 $a_{ij}=a_{ji}^*$，其中 $*$ 表示复共轭运算，则称 A 为埃尔米特阵（Hermite 阵）；

4. 如果一个方阵对角线以下元素

$$\underset{(i>j)}{a_{ij}}=0,$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

那么称这个方阵为上三角阵．如果一个方阵对角线以上元素

$$\underset{(i<j)}{a_{ij}} = 0,$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

那么称这个方阵为下三角阵；

5. 若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的一切非对角线元素

$$\underset{(i\neq j)}{a_{ij}} = 0,$$

则称 A 为对角阵，记为 $\mathrm{diag}\ (a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn})$；

6. 若一 n 阶方阵的元素满足

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq 0, \end{cases}$$

则称此矩阵为单位阵，记为 I_n，

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

称为 n 阶单位阵，或只简记为 I。

7. 如果一个 $m\times n$ 阶矩阵所有元素都为零，则称为零矩阵，简记为 0。

三、矩阵相等、加减和乘法

1. 矩阵相等： 两个 $m\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ $B=(b_{ij})_{m\times n}$，若对于所有的 i 和 j 都有

$$a_{ij}=b_{ij}$$

则称 A 阵与 B 阵相等，记为 $A=B$。

2. 矩阵加减：若有两个 $m\times n$ 阶矩阵

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \qquad B=(b_{ij})_{m\times n}$$

则 $\quad A\pm B=C=(c_{ij})_{m\times n},$

对于所有的 i 和 j 都满足

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}.$$

运算规则:

(1) $A+B=B+A$;

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. 数与矩阵相乘

定义 λ 为一数, A 为一矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 则

$$\lambda A=A\lambda\triangleq(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

运算规则:

(1) $(\mu\lambda)A=\mu(\lambda A)$ (μ、λ 都是数);

(2) $(\mu+\lambda)A=\mu A+\lambda A$;

(3) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

4. 矩阵与矩阵相乘

定义 如果 $A=(a_{ij})_{m\times p}$, $B=(b_{ij})_{p\times n}$, 则

$$\underset{m\times p}{A}\underset{p\times n}{B}=\underset{m\times n}{C}=(C_{ij})_{m\times n},$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}.$$

运算规则:

(1) $IA=AI=A$ (I 为单位阵);

(2) $0A=A0=0$ (0 为零矩阵);

(3) $(AB)C=A(BC)$;

(4) $A(B+C)=AB+AC$;

(5) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)=AB\lambda$ (λ 为一个数);

(6) $A^k\triangleq AA\cdots A$ (k 个 A 连乘, k 为自然数),

则有

$$A^k A^l = A^{k+l},$$
$$(A^k)^\mu = A^{k\mu},$$

其中 μ、l 都是自然数；

(7) 不满足交换律，一般情况下 $AB \neq BA$，而且有时 AB 存在，而 BA 则不存在；

(8) 如果 $AB = 0$（零矩阵），不能推出 AB 两个矩阵中必定有一个矩阵为零矩阵。

5. 矩阵的分块乘法

实际中常常碰到行列数很大的矩阵相乘，为使计算简便起见常用分块乘法。用贯穿矩阵的纵线和横线把一个矩阵分割成若干块，每块都是一个行列数较小的小矩阵，这些小矩阵称为子块，分成子块的矩阵称为分块矩阵，常简记为

$$A = (A_{ij})_{P\times L}$$

其中 A_{ij} 为子块，P 为分块阵中子块的行数，称块行数，L 为分块阵中子块的列数，称块列数，A_{ij} 中的 i 和 j 表示该子块所在的块行数和块列数。

设有两个矩阵 A、B，它们满足相乘的条件，若把它们都分成子块

$$A = (A_{ik})_{P\times L} \qquad B = (B_{kj})_{L\times M},$$

分块矩阵 A 的块列数等于分块矩阵 B 的块行数，且子块 A_{ik} 的元素列数与子块 B_{kj} 的元素行数相等，则

$$AB = (A_{ik})(B_{kj}) = C = (C_{ij})_{P\times M}$$

其中 C_{ij} 为一子块，它满足

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{L} A_{ik} B_{kj}.$$

四、矩阵转置

定义 若矩阵 $A=(a_{ij})_{p\times n}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{p1} & a_{p2}\cdots a_{pn} \end{pmatrix},$$

则 A 的转置为将行列互换而构成的新矩阵，记为 A'

$$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

运算规则：

1. $(A')'=A$;
2. $(A+B)'=A'+B'$;
3. $(kA)'=kA'$ (k 为一个数);
4. $(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)'=A'_nA'_{n-1}\cdots A'_2A'_1$;
5. 如果分块阵 A 为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1l} \\ A_{21} & A_{22}\cdots A_{2l} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ A_{p1} & A_{p2}\cdots A_{pl} \end{pmatrix},$$

则

$$A'=\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{21}\cdots A'_{p1} \\ A'_{12} & A'_{22}\cdots A'_{p2} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ A'_{1l} & A'_{2l}\cdots A'_{pl} \end{pmatrix}.$$

例 1.1 若有一 n 维向量

$$\underset{n\times 1}{A}=(a_1a_2\cdots a_n)'$$

则

$$\underset{1\times n\, n\times 1}{A'A}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

为一个数，等于各分量的平方和，而

$$\underset{n\times 1\ 1\times n}{AA'}=\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2\cdots a_1a_n\\ a_2 & a_1a_2^2\cdots a_2a_n\\ & \cdots\cdots\cdots\\ a_na_1 & a_na_2\cdots a_n^2\end{pmatrix}$$

为一 n 阶方阵，而且是个对称阵，第 i 行第 j 列的元素等于向量 A 第 i 个分量与第 j 个分量的乘积.

例 1.2 有一 $n\times m$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，则

$$\underset{m\times n\, n\times m}{A'A}=\underset{m\times m}{C}=(C_{ij})_{m\times m},$$

乘积矩阵 C 为 m 阶实对称阵，阶数等于原矩阵 A 的列数，元素 c_{ij} 等于原矩阵 A 的第 i 列和第 j 列所有对应元素乘积的和，

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj};$$

而

$$\underset{n\times m\, m\times n}{AA'}=\underset{n\times n}{D}=(d_{ij})_{n\times n},$$

乘积矩阵 D 为 n 阶对称阵，阶数等于原矩阵 A 的行数，元素 d_{ij} 为矩阵 A 第 i 行和第 j 行所有对应元素乘积的和，

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}a_{jk}.$$

五、矩阵求逆

1. n 阶方阵的行列式

(1) 定义：若 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则它的行列式定义为

$$\det A = |A| \triangleq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \qquad (1.1.2)$$

其 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 1 到 n, n 个自然数的一个排列，t 为这个排列的逆序数，$\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 表示 n 个自然数 1 到 n 所有全排列得到的 $n!$ 个 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的和。

（2） n 阶行列式的计算

按定义计算 n 阶行列式是非常困难的，这里介绍一个逐步化简的计算法，即按行(列)元素展开法。

令 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式，它是由 n 阶行列式 $|A|$ 去掉第 i 行和第 j 列所有元素后由余下元素组成的低一阶的子行列式。例如

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix},$$

则

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

显然上例中

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}.$$

一个 n 阶行列式可以展开成它某一行(列)元素与其代数余子

式乘积的和

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

根据这个方法可以容易得到：单位矩阵的行列式值等于1；对角阵 $A = \mathrm{diag}\ (a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})$ 的行列式值等于对角线元素的乘积，即 $A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$；上(下)三角阵的行列式值也等于对角线所有元素的乘积。

一个方阵的行列式值可能等于零，也可能不等于零，如果 $|A| = 0$，则称方阵 A 为奇异阵，或者退化阵，而 $|A| \neq 0$，则称方阵 A 为非奇异阵，或者非退化阵。

(3) n 阶行列式的性质：

① $|A| = |A'|$；

② 互换两行(列)元素，行列式值变号；

③ 若有两行(列)元素对应相等，则行列式值等于零；

④ 某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k，等于用此数 k 乘这个行列式；

⑤ 若行列式某一行(列)可以分解为都是两个数的和，则该行列式可以分解成两个同阶行列式相加，这两个行列式该行(列)元素分别为分解开的两组元素，其他元素都与原行列式相同。例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

⑥ 把行列式某一行(列)的各元素乘以同一常数 k，然后加到另一行(列)对应各元素上，行列式值不变；

⑦ 如果 A、B 都是 n 阶方阵，则

$$|AB| = |A||B|.$$

2. 矩阵求逆