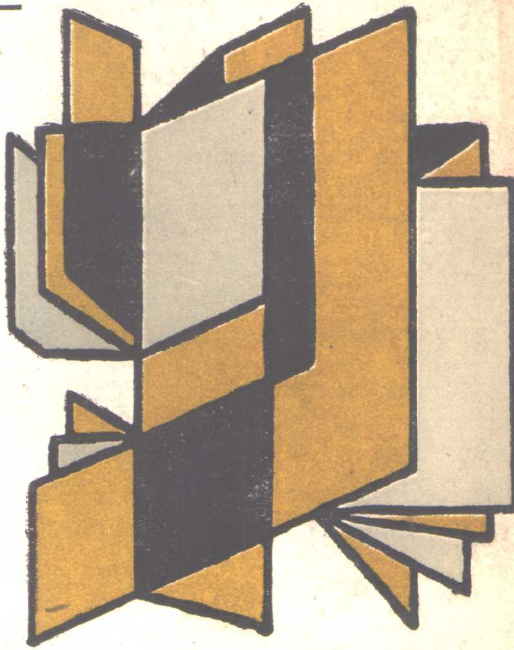
5



数学奥林匹克辅导丛书

解析几何的技巧

单墫　程龙

中国科学技术大学出版社

《数学奥林匹克辅导丛书》之五

解析几何的技巧

单 墫 程 龙

中国科学技术大学出版社

1989 · 合肥

内容简介

运用解析几何方法解决几何问题，有一定的程序可循，不需挖空心思去寻找解法，但是，如果不掌握一定的技巧，那将陷入繁琐的演算之中，令人生畏。本书列举了大量例题，其中包括一些数学竞赛题，很好地表现了解析几何的技巧。运用这些技巧，许多几何问题的求解过程变得十分简洁和优雅。可供具有高中文化程度的数学爱好者、中学生、中学数学教师及其他数学工作者阅读，也可作为培训数学竞赛选手的基本教材以及数学爱好者小组的讲座材料。

《数学奥林匹克辅导丛书》之五

解析几何的技巧

单 墫　程 龙

责任编辑：胡升华　　封面设计：罗 洪

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号）

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：787×1092/32　印张：5.875　字数：131千

1989年6月第1版　1989年6月第1次印刷

印数 1－20000册

ISBN7－312－00048－7/O·21　定价：1.70元

序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌。写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也可堪称是这方面的范本，

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色。

最近，他们编写了“数学奥林匹克辅导丛书”，我看了几本原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐之为序。

龚　昇

1988年6月28日

于中国科学技术大学

前　　言

“几何难！”

很多人有这样的感慨。

感谢笛卡尔发明了解析几何，为解决几何问题开辟了一条康庄大道。可是，仍然有不少人不乐意采用这一方法，原因之一是他们觉得解析几何“繁”。其实，真正掌握了技巧，许多问题用解析几何来解，不但不繁，而且解答井井有条，十分优雅。

这本小册子的目的就是撷取一些问题来表现解析几何的技巧。希望读者阅读此书时带着纸和笔，在看例题的解答之前，自己先演算一遍。这样才能真正掌握解题的技巧。如果您的解答更好，请告诉我们，以便今后改进。

单　墫　　程　龙

1988年12月20日

目　次

1 距离公式

点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 之间的距离是

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \tag{1.1}$$

这是大家熟悉的距离公式。它可以用来解很多几何问题。

例 1 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，则 BC 边上的中线 m_a 的平方为

$$m_a^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2. \tag{1.2}$$

解 设 BC 中点为 D，则 D 的坐标为

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}, \qquad y_D=\frac{y_B+y_C}{2} \tag{1.3}$$

（以后我们用 x_P、y_P 分别表示 P 点的横坐标与纵坐标，不一一声明）。于是由公式（1.1），

$$\begin{aligned}
m_a^2&=(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2\\
&=\left(x_A-\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y_A-\frac{y_B+y_C}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{4}[(x_A-x_B)+(x_A-x_C)]^2\\
&\quad+\frac{1}{4}[(y_A-y_B)+(y_A-y_C)]^2\\
&=\frac{1}{4}[(x_A-x_B)^2+(x_A-x_C)^2+2(x_A-x_B)(x_A-x_C)]\\
&\quad+\frac{1}{4}[(y_A-y_B)^2+(y_A-y_C)^2+2(y_A-y_B)(y_A-y_C)],
\end{aligned}$$

注意到恒等式

$$
\begin{aligned}
&2(x_A-x_B)(x_A-x_C)\\
&=(x_A-x_B)^2+(x_A-x_C)^2-(x_B-x_C)^2, \qquad (1.4)\\
&2(y_A-y_B)(y_A-y_C)\\
&=(y_A-y_B)^2+(y_A-y_C)^2-(y_B-y_C)^2, \qquad (1.4')
\end{aligned}
$$

便可得出

$$
\begin{aligned}
m_a^2=&\frac{1}{4}[2(x_A-x_B)^2+2(x_A-x_C)^2-(x_B-x_C)^2]\\
&+\frac{1}{4}[2(y_A-y_B)^2+2(y_A-y_C)^2-(y_B-y_C)^2]\\
=&\frac{1}{2}[(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2]\\
&+\frac{1}{2}[(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2\\
&-\frac{1}{4}[(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2],
\end{aligned}
$$

即（1.2）式成立。

上面的推导仅是极简单的计算，没有添辅助线，没有巧妙的推理，甚至没有明确用到余弦定理，只用了距离公式（1.1）与中点的坐标（1.3）。这正是解析几何的优点所在，请读者回忆中线公式（用纯几何方法）的证明，对比一下体会更深。

注 1　上面出现的一些式子中，横坐标与纵坐标处在平等的地位。由于这种对称性，在非正式的书写中，可以只写出含 x 的部分，而将含 y 的部分用“+……”来代替（学过向量的读者将关于两个坐标的表达式改成一个用向量表示的式子，更为简单）。

注 2　上面的（1.4）与（1.4′）相加得出

$$(x_A-x_B)(x_A-x_C)+(y_A-y_B)(y_A-y_C)=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) \tag{1.5}$$

它相当于余弦定理，即（1.5）式左边就是 $bc\cos A$。这一点我们以后将会用到（熟悉向量的读者可以看出（1.5）式左边是向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 的数量积）。

例 2　求证当 P 为 $\triangle ABC$ 的重心时，P 到三个顶点的距离的平方和最小。

证　设重心为 G，则

$$x_G=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C),\qquad y_G=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C). \tag{1.6}$$

因为

$$\begin{aligned}(x_P-x_A)^2&=[(x_P-x_G)+(x_G-x_A)]^2\\&=(x_P-x_G)^2+(x_G-x_A)^2+2(x_P-x_G)(x_G-x_A),\end{aligned}$$

关于 x_B、x_C 也有类似的等式，这样的三个等式相加得

$$\begin{aligned}\sum(x_P-x_A)^2=3\cdot(x_P-x_G)^2&+\sum(x_G-x_A)^2\\&+2(x_P-x_G)\sum(x_G-x_A),\end{aligned}$$

（其中 $\sum$ 表示将字母 A、B、C 轮换后所得的三个式子相加，例如 $\sum(x_P-x_A)^2=(x_P-x_A)^2+(x_P-x_B)^2+(x_P-x_C)^2$）由于（1.6），上式右端最后一个和为零。所以

$$\sum(x_P-x_A)^2=3(x_P-x_G)^2+\sum(x_G-x_A)^2.$$

关于纵坐标也有类似的等式。于是

$$\begin{aligned}&PA^2+PB^2+PC^2\\&=3PG^2+GA^2+GB^2+GC^2\geqslant GA^2+GB^2+GC^2.\end{aligned}$$

即当且仅当点 P 与重心 G 重合时，$PA^2+PB^2+PC^2$ 取得最

小值 $GA^2+GB^2+GC^2$。

注 1　如果读者不熟悉轮换的和号，可以将式子中所有的项逐一写出。但轮换的和号是方便的，我们今后多次用到，希望不熟悉的读者渐渐熟悉它。

注 2　如果取 G 为原点，计算更简单，可参看第 8 节例 6。

例 3　证明任意四边形四条边的平方和，等于两条对角线的平方和，再加上对角线中点连线的平方的 4 倍。

证　如果不用解析几何，需要添辅助线，还要一些细致的分析，并不很容易。采用解析几何，只需要简单直接的计算，图都不必画。

设四个顶点的坐标为 $A_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$。这时对角线中点为 $B\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$，$C\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$，而

$$4\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2$$
$$=(x_1+x_3-x_2-x_4)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2$$
$$2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1)$$
$$=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2.$$

关于纵坐标也有类似的等式，所以

$$4BC^2+A_1A_3^2+A_2A_4^2=A_1A_2^2+A_2A_3^2+A_3A_4^2+A_4A_1^2.$$

用解析法（代数方法）解几何题是本书的重点之一。本节举了三个例子，从这些例子可以看出在解某些几何题时，解析几何比纯几何或纯三角的方法优越。当然要解得好，就必须掌握一些技巧。从第 2 节到第 7 节，我们先介绍一些基本、简单的技巧。

2 平行四边形的顶点

已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标为 $A(3,2)$，$B(4,-3)$，$C(2,5)$。求D的坐标。

这个问题的解法很多。如果利用平行四边形的对边平行，可以先求出直线 AD 与 CD 的方程，再定出它们的交点D的坐标。如果利用平行四边形的对边相等，可以由D到A的距离为 BC 及D到C的距离为 AB 定出它的坐标。当然还可以利用 AD 与 BC 平行并且相等来确定D。但最简单的方法是利用平行四边形的对角线互相平分，即 AC、BD 的交点 E既是（线段）AC 中点，也是 BD 中点，所以有

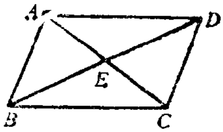


图 1

$$x_E=\frac{1}{2}(x_A+x_C)=\frac{1}{2}(x_B+x_D)$$

及

$$y_E=\frac{1}{2}(y_A+y_C)=\frac{1}{2}(y_B+y_D),$$

于是

$$\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D,\\ y_A+y_C=y_B+y_D,\end{cases}\tag{2.1}$$

(2.1)式虽然简单，却很有用处（本书中将多次用到(2.1)。

对于开始的问题，我们有

$$x_D=x_A+x_C-x_B=3+2-4=1,$$

$$y_D=y_A+y_C-y_B=2+5-(-3)=10.$$

同一个问题，往往可以从几种不同的途径入手，我们应当选用最简单的方法。

如果将平行四边形 $ABCD$ "压扁"，使 A、C 都落到 BD 上，那么便产生下面的结果：

设 B、A、C、D 为一直线上顺次四点，并且 BD 与 AC 的中点相同，则

$$x_A+x_C=x_B+x_D,$$

$$y_A+y_C=y_B+y_D.$$

这个结论，后面（如第 30 节例题 2）还要用到。

3 过已知点的平行线

例 1 直线 l 过点 $(3,2)$ 并且与已知直线 $5x-2y+4=0$ 平行，求 l 的方程。

教科书上这道题的解法是先求出直线

$$5x-2y+4=0 \tag{3.1}$$

的斜率为 $\frac{5}{2}$。由于 l 与 (3.1) 平行，所以 l 的斜率也是 $\frac{5}{2}$。再利用点斜率得出 l 的方程为

$$y-2=\frac{5}{2}(x-3)$$

即

$$5x-2y-11=0.$$

在刚开始学习解析几何时，这样按部就班地解，当然是

必要的。但在完成解析几何的初级阶段后，就应当采用下面的解法：

首先注意直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

与直线

$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

平行的充分必要条件是

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2},$$

（约定在此的后项为0时，它的前项也自动为0。所以 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{0}$ 表示 $b_1=0$）。因此在直线 l 与

$$5x-2y+4=0$$

平行时，l 的方程应当呈

$$5x-2y+c=0$$

的形式。由于点（3,2）在直线 l 上，所以

$$c=-(5\times3-2\times2)=-11,$$

即 l 的方程为

$$5x-2y-11=0$$

以上过程均可用心算完成（凡是能用心算完成的，决不要用笔算。凡是能一步完成的运算，决不要分成几步去完成）。

例 2 直线 l 与直线 $2x-3y+12=0$ 平行，并且经过点（2，-1），求 l 的方程。

解 l 的方程为

$$2x-3y-7=0.$$

其中“头” $2x-3y$ 与直线 $2x-3y+12=0$ 相同，可以立即写出。而“尾”（常数项）-7 则是 $2x-3y$ 在点（2，-1）

处的值的相反数，可以通过心算得出，所以 l 的方程能够也应当直接写出．在这里，任何过程都是多余的．

一般地，过点（x_0，y_0）且与直线 $ax+by+c=0$ 平行的直线是

$$ax+by-(ax_0+by_0)=0.$$

4　过已知点的垂线

例 1　直线 l 过点$(-1,3)$，并且与直线 $3x+2y-1=0$ 垂直，求 l 的方程．

解　由于两条直线垂直时，它们的斜率的乘积为 -1，所以直线

$$ax+by+c=0 \tag{4.1}$$

的垂线为

$$bx-ay+c'=0 \tag{4.2}$$

因而直线 l 的"头"是 $2x-3y$，而它的"尾"则是 $2x-3y$ 在（$-1,3$）的值的相反数 11．即 l 的方程为

$$2x-3y+11=0.$$

和上节一样，熟练之后可以把答案直接写出（一个好的学生应当自觉地减少那些不必要的过程，删去那些"花枪"，"一招破敌"）．

例 2　直线 l 过点（$3,-2$）并且与直线 $3x+4y-7=0$ 垂直，求 l 的方程．

解　l 的方程为

$$4x-3y-18=0.$$

一般地，过点 (x_0, y_0) 且与直线 $ax+by+c=0$ 垂直的直线是

$$bx-ay-(bx_0-ay_0)=0. \qquad (4.3)$$

关于垂直，我们顺便再说几句话：要证明直线 AB 与 CD 垂直，通常是用这两条直线的斜率之积为 -1，即

$$\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=-1, \qquad (4.4)$$

但用等价的、形式整齐的条件（参看（1.5））

$$(x_A-x_B)(x_C-x_D)+(y_A-y_B)(y_C-y_D)=0 \qquad (4.5)$$

更好．以后我们就采用（4.5）（它还可以用向量的数量积来解释）．不要忽视这种小技巧．请注意，如果每个环节都能省这样一小步，解题速度就大大加快了．

5 同 心 圆

如果圆的圆心为 (c, d)，那么它的方程可写成（请参看第18节）

$$x^2+y^2-2cx-2dy+f=0 \qquad (5.1)$$

的形状．所以两个同心圆的方程具有相同的"头" $x^2+y^2-2cx-2dy$．

例 1 圆 C 与圆 $x^2+y^2-\frac{3}{2}x+\sqrt{2}y+109.5=0$ 同心，并且通过点（1,0），求圆 C 的方程．

解 圆 C 的方程为

$$x^2+y^2-\frac{3}{2}x+\sqrt{2}\ y+\frac{1}{2}=0,$$

其中“尾”（常数项）$\frac{1}{2}$是$x^2+y^2-\frac{3}{2}x+\sqrt{2}y$在$(1,0)$的点的相反数。

一般地，与（5.1）同心并且过点（x_0,y_0）的圆的方程为

$$x^2+y^2-2cx-2dy=x_0^2+y_0^2-2cx_0-2dy_0$$

这当然也可以写成

$$x^2+y^2-2cx-2dy+f=x_0^2+y_0^2-2cx_0-2dy_0+f, \tag{5.2}$$

（5.2）式右端称为点（x_0,y_0）关于圆（5.1）的幂（参看第21节）。当（x_0,y_0）在圆外时，它就是点（x_0,y_0）向圆所引的切线的平方（因为（5.1）的圆心为（c,d），半径的平方是c^2+d^2-f，点(x_0,y_0)到圆心的距离是$(x_0-c)^2+(y_0-d)^2$，所以由勾股定理，切线平方为$(x_0-c)^2+(y_0-d)^2-(c^2+d^2-f)=x_0^2+y_0^2-2cx_0-2dy_0+f$）。

例 2 点P到圆

$$x^2+y^2+4x-4y-1=0 \tag{5.3}$$

的切线的长为3。求与(5.3)同心并且过点P的圆的方程。

解 根据（5.2）所求的方程是

$$x^2+y^2+4x-4y-1=3^2,$$

即

$$x^2+y^2+4x-4y-10=0$$

例2中的两步可以并作一步，即利用心算直接写出答案。

这几节介绍的都是极基本、极简单的技巧，似乎不足