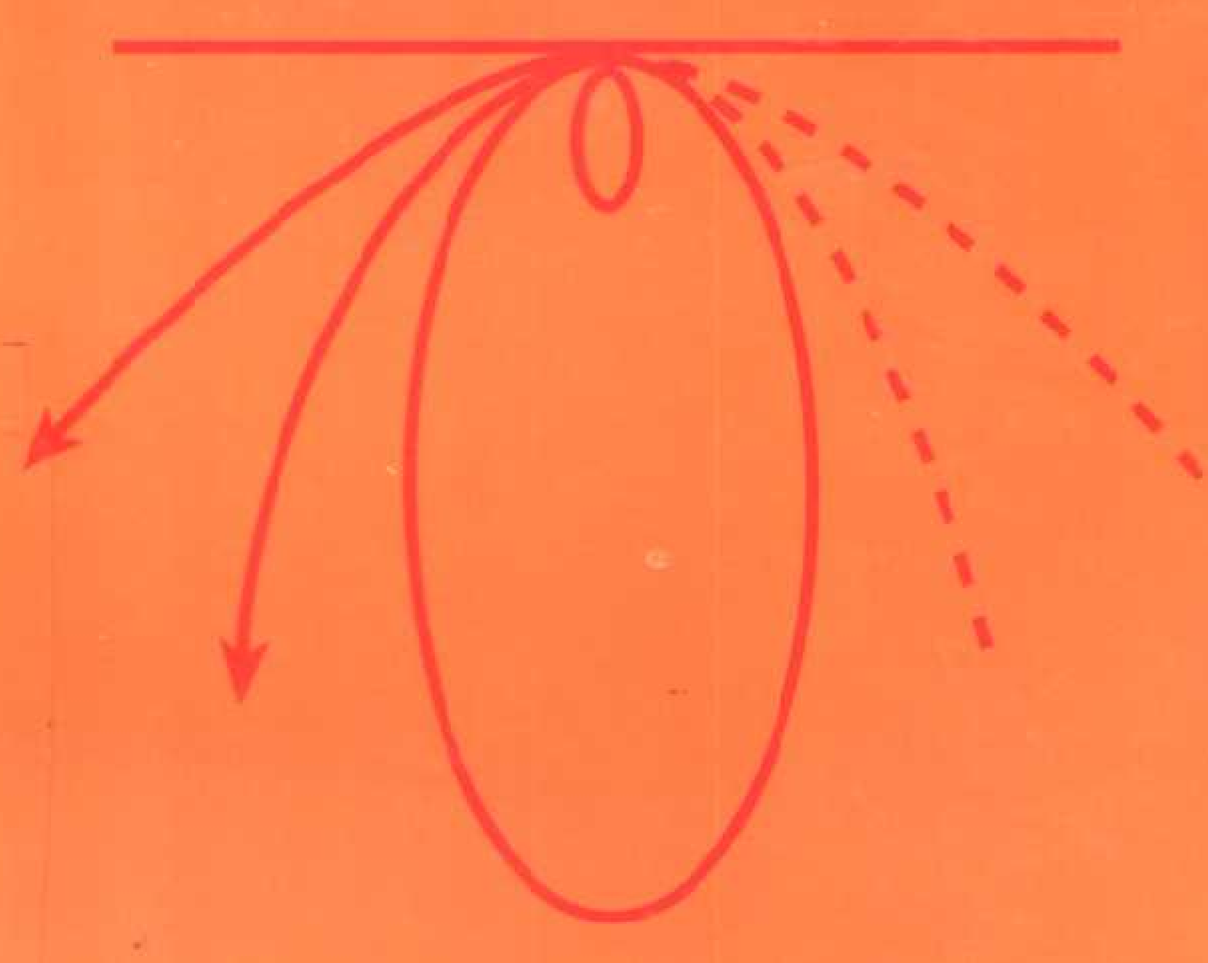
高级中学课本

平面解析几何

PING MIAN JIE XI JIHE

全一册

（必修）



人民教育出版社

（京）新登字 113 号

高级中学课本

平面解析几何

全一册

（必修）

人民教育出版社中学数学室 编

*

人民教育出版社出版

（100009 北京沙滩后街 55 号）

北京出版社重印

北京市新华书店发行

北京市房山印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 4.75　字数 95 0

1990 年 10 月第 1 版　2000 年 6 月第 10 次印刷

印数 1－74 200

ISBN 7－107－00965－6

G·2118（课）定价:3.20 元

如发现印装质量问题影响阅读请与房山印刷厂联系

电话 8932 3915

ISBN 7-107-00965-6

9 787107 009655 >

说　明

一、这套高中用的数学课本是根据国家教育委员会1986年制订的《全日制中学数学教学大纲》编写的，全书共分四册：《代数》上册，《代数》下册，《立体几何》全一册，《平面解析几何》全一册，供二年制或三年制高中选用。

二、国家教育委员会1990年制订《全日制中学数学教学大纲（修订本）》后，又根据它对全套书进行了调整和修改。

三、本书内容包括：直线、圆锥曲线、*参数方程和极坐标。本书带*号的部分为选学内容。

四、本书习题共分四类：练习、习题、复习参考题及总复习参考题。

1. 练习　供课堂练习用；

2. 习题　供课内、外作业用；

3. 复习参考题与总复习参考题　复习参考题供复习本章知识时使用；总复习参考题供复习全书知识时使用。

习题及复习参考题、总复习参考题的题量多于通常所需题量，供教学时根据情况选用。

五、本书由人民教育出版社中学数学室编写。参加编写的有李慧君、鲍珑、许缦阁等，全书由孙福元校订。

1990年10月

目　　录

引　言

我们在平面几何和立体几何里，所用的研究方法是以公理为基础，直接依据图形的点、线、面的关系来研究图形的性质．在将要学习的平面解析几何里，所用的研究方法和平面几何、立体几何不同，它是在坐标系的基础上，用坐标表示点，用方程表示曲线（包括直线），通过研究方程的特征间接地来研究曲线的性质．因此可以说，解析几何是用代数方法来研究几何问题的一门数学学科．

平面解析几何研究的主要问题是：

（1）根据已知条件，求出表示平面曲线的方程；

（2）通过方程，研究平面曲线的性质．

解析几何的这种研究方法，在进一步学习数学、物理和其他科学技术中经常使用．

在十七世纪，法国数学家笛卡儿创始了解析几何．解析几何的产生对数学发展，特别是对微积分的出现起了促进作用，恩格斯对笛卡儿的这一发现给予了高度的评价．

第一章　直　　线

一　有向线段、定比分点

1.1　有向线段、两点的距离

在初中，我们学过数轴，它是规定了原点、正方向和长度单位的直线．任意一条直线，都可以规定两个相反的方向．如果把其中一个作为正方向，那么相反的方向就是负方向．规定了正方向的直线叫做**有向直线**．在图中，有向直线 l 的正方向用箭头表示（图 1-1）．例如，初中学过的直角坐标系中的 x 轴、y 轴都是有向直线．

图　1-1

图　1-2

一条线段也可以规定两个相反的方向．如图 1-2 中的线段 AB，如果以 A 为起点、B 为终点，那么，它的方向是从 A 到 B；相反，如果以 B 为起点、A 为终点，它的方向就是从 B 到 A．规定了方向，即规定了起点和终点的线段叫做**有向线段**．表示有向线段时，要将表示起点的字母写在前面，表示终点的字母写在后面．如以 A 为起点、B 为终点的有向线段记作$\overline{AB}$．图 1-2 中，点 C 是线段 AB 上的一点，$\overline{AB}$和$\overline{AC}$是方向相同的有向线段，$\overline{AB}$和$\overline{BC}$是方向相反的有向线段．

选定一条线段作为长度单位，我们可以量得一条线段

的长度，线段 AB 的长度，就是有向线段$\overline{AB}$的长度，记作 $|AB|$. 如图 1-3，设线段 e 是长度单位，那么 $|AB|=3$. 因为有向线段的长度与它的方向无关，所以 $|AB|=|BA|$.

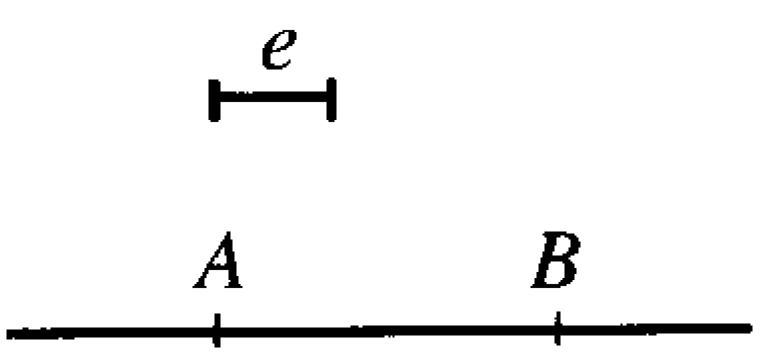


图 1-3

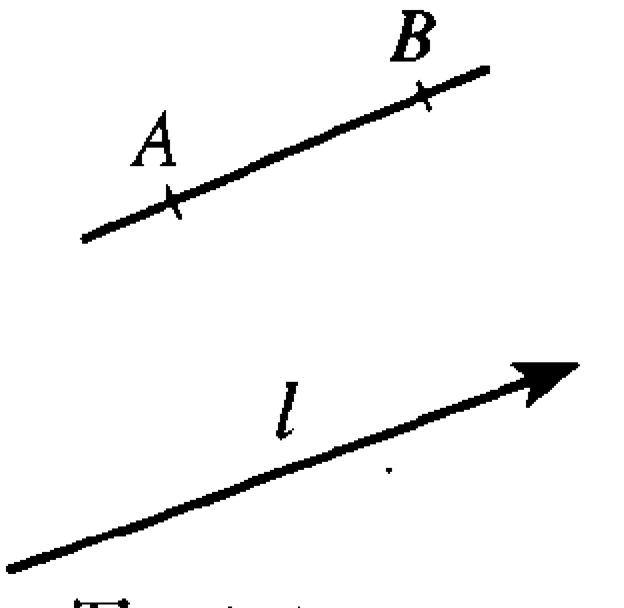


图 1-4

如果有向线段在有向直线 l 上或与 l 平行，那么，它的方向与 l 的正方向可能相同或相反. 例如图 1-4 中的$\overline{AB}$与 l 的方向相同，而$\overline{BA}$与 l 的方向相反.

根据$\overline{AB}$与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度加上正号或负号，这样所得的数，叫做有向线段的**数量**（或**数值**）. 有向线段$\overline{AB}$的数量用 AB 表示❶. 显然

$$AB=-BA.$$

数轴 Ox 是有向直线，数轴上点 P 的坐标 x_0 实际上是以有向线段的数量来定义的. 点 P 的坐标 x_0 是以原点 O 为起点、P 为终点的有向线段$\overline{OP}$的数量，$OP=x_0$. 例如，点 A、B 的坐标分别是有向线段$\overline{OA}$、$\overline{OB}$的数量，$OA=3$、$OB=-2$（图 1-5）.

现在我们来研究，对于数轴上任意一条有向线段，怎样用它的起点坐标和终点坐标表示它的数量.

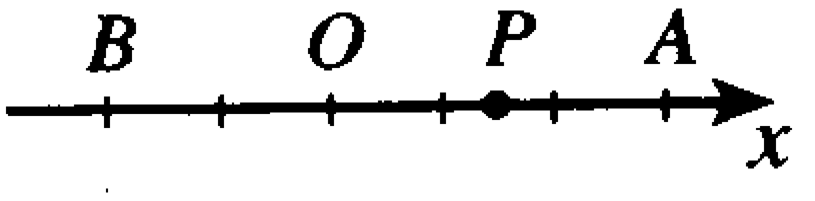


图 1-5

❶ 在引入有向直线以后，线段 AB 的长度一律用 |AB| 表示.

设$\overline{AB}$是 x 轴上的任意一条有向线段，O 是原点. 先讨论两点 A、B 与 O 都不重合的情形. 如图 1-6，它们的位置关系只可能有六种不同情形. 点 A、B 的坐标分别用 x_1 和 x_2 表示，那么 $OA=x_1$，$OB=x_2$.

在图 1-6(1)中，$AB=|AB|$，$OA=|OA|$，$OB=|OB|$，而 $|AB|=|OB|-|OA|$，

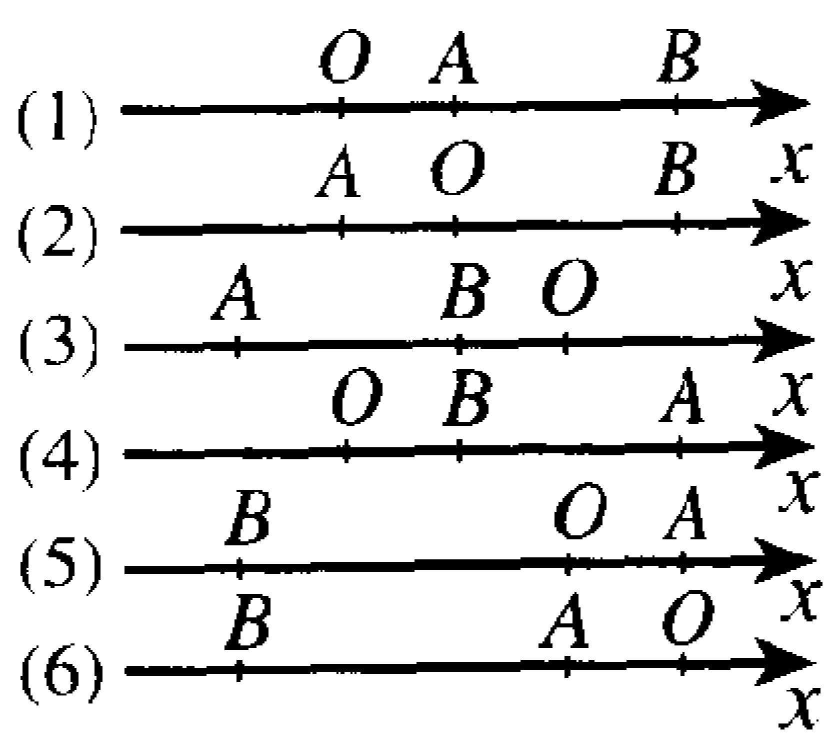


图 1-6

$\therefore\quad AB=OB-OA$，

即 $\quad AB=x_2-x_1$.

在图1-6(2)中，$AB=|AB|$，$OA=-|OA|$，$OB=|OB|$，

而 $\quad |AB|=|OA|+|OB|$，

$\therefore\quad AB=OB-OA$，

即 $\quad AB=x_2-x_1$.

同样可以证明，对于其他四种情况，这个等式也成立. 容易验证，当点 A 或点 B 与原点 O 重合时这个等式同样成立. 因此，对于数轴上任意有向线段$\overline{AB}$，它的数量 AB 和起点坐标 x_1、终点坐标 x_2 有如下关系：

$$\boxed{AB=x_2-x_1.}$$

根据这个公式可以得到，数轴上两点 A、B 的距离公式

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1}|.$$

下面，我们来求平面上任意两点的距离.

在直角坐标系中，已知两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$（图 1-7）. 从 P_1、P_2 分别向 x 轴和 y 轴作垂线 P_1M_1、P_1N_1 和 P_2M_2、P_2N_2，垂足分别为 $M_1(x_1,0)$、$N_1(0,y_1)$、$M_2(x_2,0)$、$N_2(0,y_2)$，其中直线 P_1N_1 和 P_2M_2 相交于点 Q.

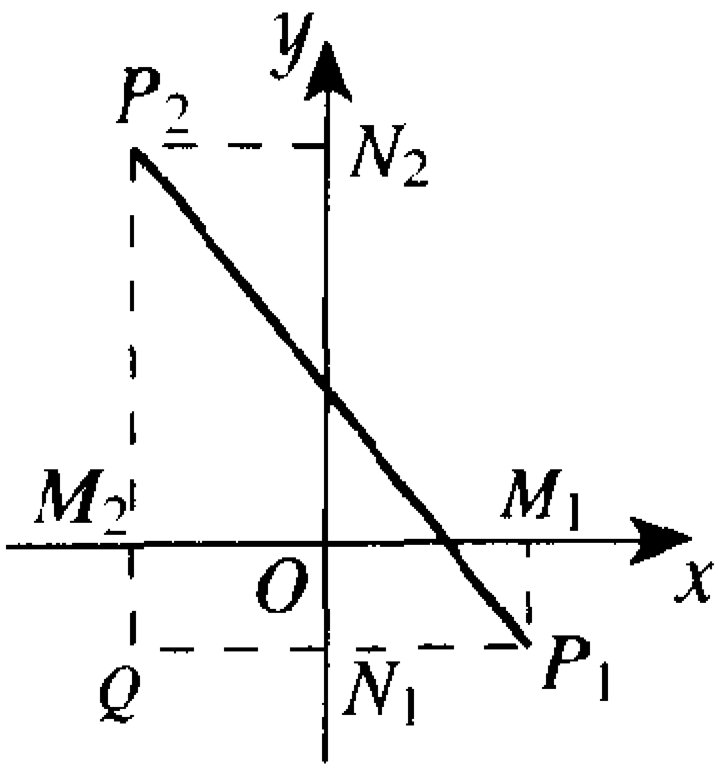


图 1-7

在 $Rt\triangle P_1QP_2$ 中，

$$|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2.$$

$\because \quad |P_1Q|=|M_1M_2|=|x_2-x_1|,$

$\quad\quad |QP_2|=|N_1N_2|=|y_2-y_1|,$

$\therefore \quad |P_1P_2|^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2.$

由此得到两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的**距离公式**：

$$\boxed{|\boldsymbol{P_1P_2}|=\sqrt{(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})^2+(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})^2}.}$$

例 1 已知数轴上三点 A、B、C 的坐标分别是 4、-2、-6. 求 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的数量和长度（图 1-8）.

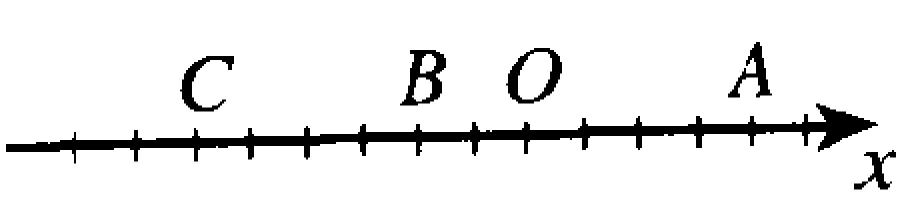


图 1-8

解： $AB=(-2)-4=-6,\quad |AB|=|-6|=6;$

$BC=-6-(-2)=-4,\quad |BC|=|-4|=4;$

$CA=4-(-6)=10,\quad |CA|=|10|=10.$

例 2 △ABC 中，AO 是 BC 边上的中线（图1-9）. 求证：

$$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$$

证明：取线段 BC 所在的直线为 x 轴，点 O 为原点建立直角坐标系. 设点 A 的坐标为 (b, c)，点 C 的坐标为 $(a, 0)$，则点 B 的坐标为 $(-a, 0)$. 可得

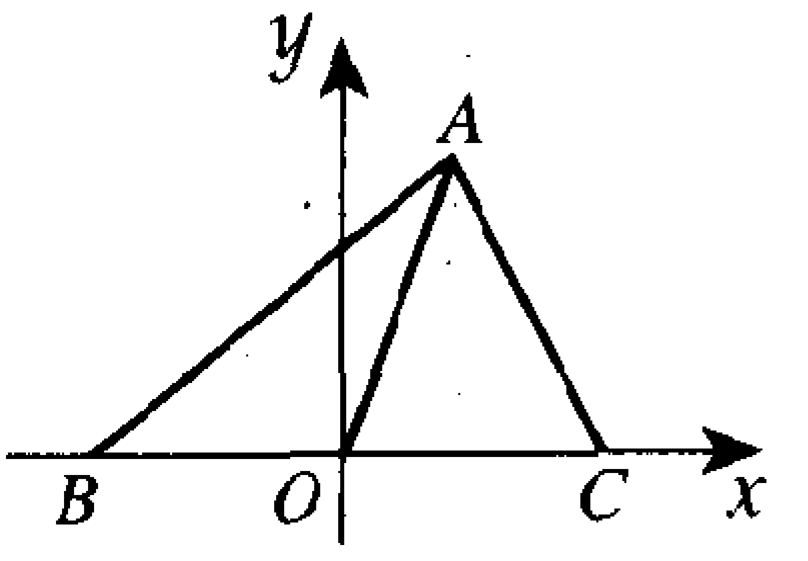


图 1-9

$$|AB|^2=(a+b)^2+c^2,\ |AC|^2=(a-b)^2+c^2,$$

$$|AO|^2=b^2+c^2,\qquad |OC|^2=a^2.$$

$$\therefore\quad |AB|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$

$$|AO|^2+|OC|^2=a^2+b^2+c^2.$$

$$\therefore\quad |AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2).$$

练　习

1. 数轴上点 A 的坐标为 2，点 B 的坐标为 −3. 验证公式 $AB=x_2-x_1$.
2. 已知数轴 x 上的点 A、B、C 的坐标分别为 1、2、3. (1) 求 $\overline{AB}$、$\overline{CB}$ 的数量；(2) 如果在 x 轴上还有两个点 D、E，且 $AD=2.5$，$CE=-3$. 求点 D、E 的坐标.
3. 求有下列坐标的两点距离：

   (1) $(6,0)$、$(-2,0)$；　(2) $(0,-4)$、$(0,-1)$；

   (3) $(6,0)$、$(0,-2)$；　(4) $(2,1)$、$(5,-1)$；

   (5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

(6) $(ab^2, 2abc)$、$(ac^2, 0)$.

4. 已知点 $A(a, -5)$ 和 $B(0, 10)$ 的距离是 17，求 a 的值.

1.2 线段的定比分点

有向直线 l 上的一点 P，把 l 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$. $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 数量的比叫做**点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比**，通常用字母 λ 来表示这个比值，

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2},$$

点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**定比分点**.

如果点 P 在线段 P_1P_2 上（图 1-10 甲），点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**内分点**. 这时，无论 l 的方向如何，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向都相同，它们的数量的符号也相同，所以 λ 为正值. 如果点 P 在线段 P_2P_1 或 P_1P_2 的延长线上（图 1-10 乙、丙），点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的**外分点**. 这时无论 l 的方向如何，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 的方向都相反，它们的数量的符号也相反，所以 λ 为负值.

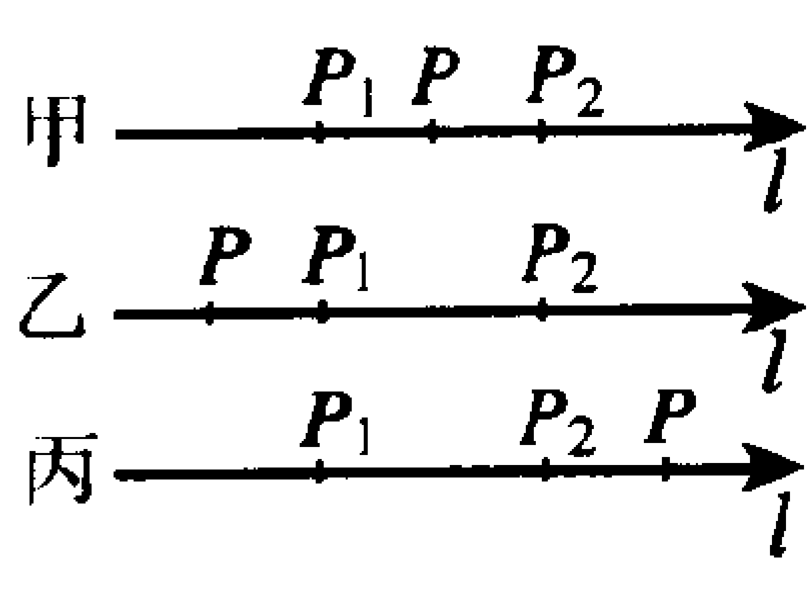


图 1-10

由于点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比与它们所在的直线 l 的方向无关，为了简便起见，在以后谈到点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比时，一般不提它所在的有向直线的方向.

设 $\overline{P_1P_2}$ 的两个端点分别为 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$，点

P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比为 $\lambda(\lambda\neq-1)$（图 1-11），求分点 P 的坐标(x,y).

过点 P_1、P_2、P 分别作 x 轴的垂线 P_1M_1、P_2M_2、PM，则垂足分别为 $M_1(x_1,0)$、$M_2(x_2,0)$、$M(x,0)$. 根据平行线分线段成比例定理，得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

如果点 P 在线段P_1P_2 上，那么点 M 也在线段 M_1M_2 上；如果点 P 在线段 P_1P_2 或 P_2P_1 的延长线上，那么点 M 也在线段 M_1M_2 或 M_2M_1 的延长线上. 因此$\frac{P_1P}{PP_2}$与$\frac{M_1M}{MM_2}$的符号相同，所以

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

$\because$ $M_1M=x-x_1$,

$MM_2=x_2-x$,

$\therefore$ $\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$,

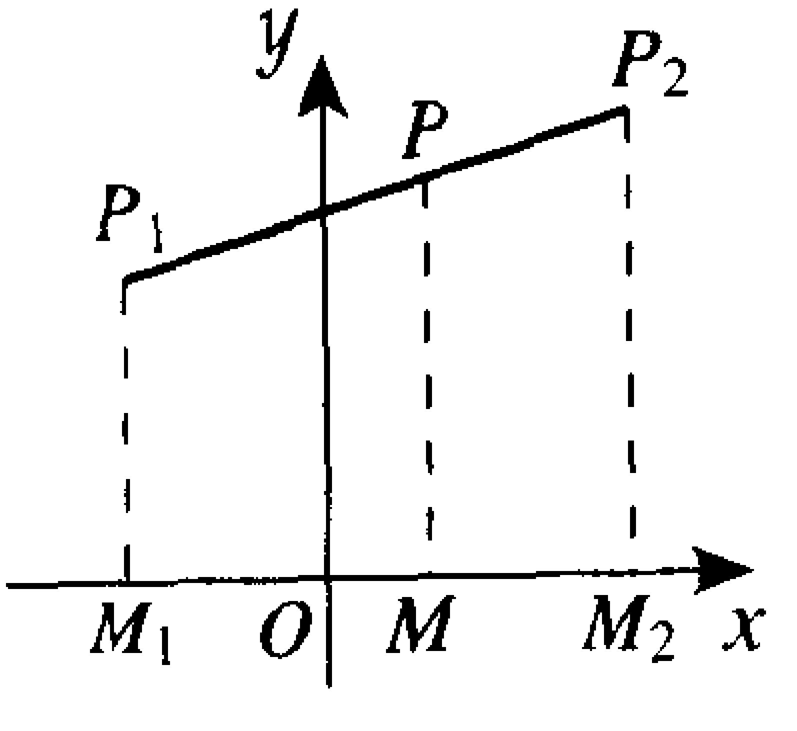


图 1-11

即$(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$，当$\lambda\neq-1$时，

得 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

同理可以求得$\lambda=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$,

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

因此，当已知两个端点为 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，点 $P(x,y)$分$\overline{P_1P_2}$所成的比为 λ 时，点 P 的坐标是

$$\boxed{x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}(\lambda\neq-1).}$$

当点 P 是线段$\overline{P_1P_2}$的中点时，有 $P_1P=PP_2$，即 $\lambda=1$.
因此线段$\overline{P_1P_2}$中点 P 的坐标是

$$\boxed{x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2}.}$$

例 1 点 P_1 和 P_2 的坐标分别是$(-1,-6)$和$(3,0)$，点 P 的横坐标为$-\frac{7}{3}$. 求点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比 λ 和点 P 的纵坐标 y.

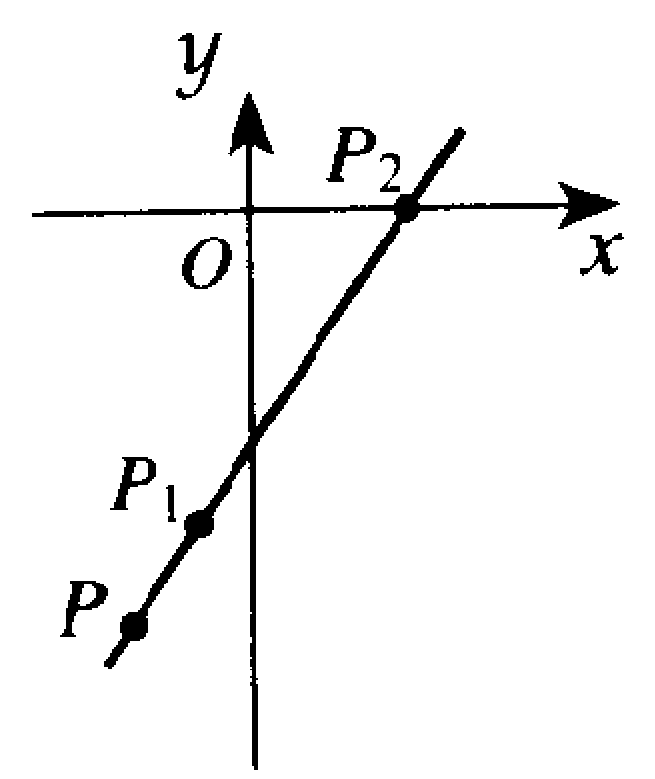


图 1-12

解：由 λ 的定义，可得

$$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{-\frac{7}{3}-(-1)}{3-\left(-\frac{7}{3}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{-6+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$=-8.$$

点 P 分$\overline{P_1P_2}$所成的比是$-\frac{1}{4}$，点 P 的纵坐标是-8(图 1-12).

例 2 已知三角形顶点是 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$. 求$\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标(x,y)(图 1-13).

解：设 BC 边的中点为 D，则点 D 的坐标是

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

又因为 AD 是中线，且 $\frac{AG}{GD}=2$，所以点 G 的坐标是

$$x=\frac{x_1+2\times\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2},$$

$$y=\frac{y_1+2\times\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2},$$

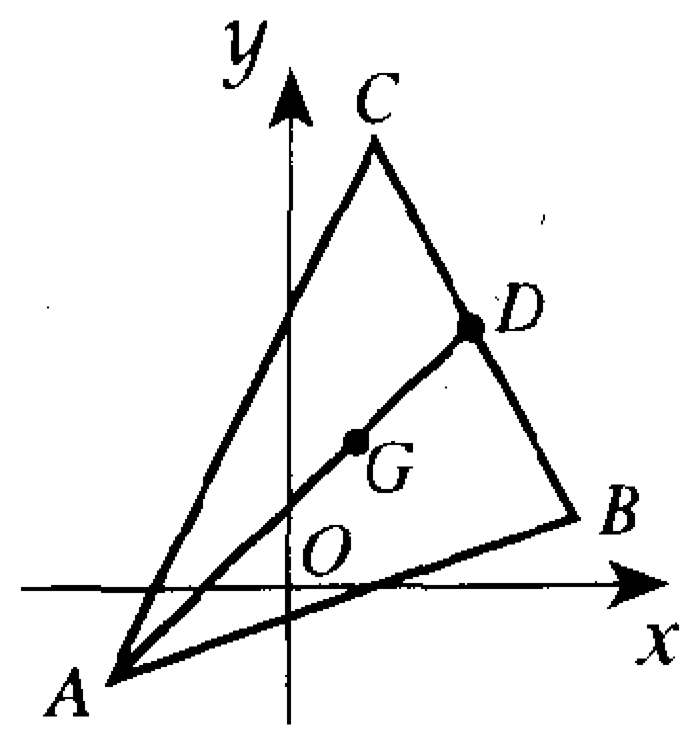


图 1-13

整理后得重心 G 的坐标

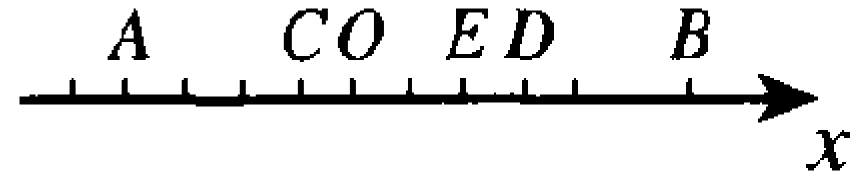
$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

练　习

1. 已知两点 $P_1(3,-2)$、$P_2(-9,4)$. 求点 $P(x,0)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比 λ 及 x 的值.
2. 点 M 分有向线段 $\overline{M_1M_2}$ 的比为 λ，求点 M 的坐标 (x,y)：
   (1) 已知：$M_1(1,5)$、$M_2(2,3)$，$\lambda=\frac{1}{3}$；
   (2) 已知：$M_1(1,5)$、$M_2(2,3)$，$\lambda=-2$；
   (3) 已知：$M_1(1,5)$、$M_2(2,-3)$，$\lambda=-2$.
3. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(2,3)$、$B(8,-4)$ 和重心 $G(2,-1)$. 求点 C 的坐标 (x,y).

习　题　一

1. 如图，数轴上每一格等于一个长度单位，说出有向线段 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 和 $\overline{EA}$ 的长度和数量.



（第 1 题）

2. 已知数轴上 A、B 两点的坐标 x_1、x_2 分别是：

(1) $x_1=8, x_2=6$;　　(2) $x_1=5, x_2=-3$;

(3) $x_1=-4, x_2=0$;　　(4) $x_1=-9, x_2=-11$;

(5) $x_1=2a-b, x_2=a-2b$;

(6) $x_1=2+\sqrt{3}, x_2=3+\sqrt{2}$.

求$\overline{AB}$和$\overline{BA}$的数量.

3. A、B是数轴上两点，点B的坐标是x_2. 根据下列条件，求点A的坐标x_1：

(1) $x_2=3, AB=5$;　　(2) $x_2=-5, BA=-3$;

(3) $x_2=0, |AB|=2$;　　(4) $x_2=-5, |AB|=2$.

4. 已知某零件一个面上有3个孔，孔中心的坐标分别为：$A(-10,30)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$. 求每两孔中心的距离.

5. 已知点$P(x,2)$、$Q(-2,-3)$、$M(1,1)$，且$|PQ|=|PM|$. 求x.

6. (1) 求在x轴上与点$A(5,12)$的距离为13的点的坐标；

(2) 已知点P的横坐标是7，点P到点$N(-1,5)$的距离等于10，求点P的纵坐标.

7. 设线段P_1P_2长5 cm，写出点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比λ:

(1) 点P在P_1P_2上，$|P_1P|=1$ cm；

(2) 点P在P_1P_2的延长线上，$|P_2P|=10$ cm；

(3) 点P在P_2P_1的延长线上，$|PP_1|=1$ cm.

8. 求连结下列两点的线段的长度和中点坐标：

(1) $A(7,4)$、$B(3,2)$；(2) $P_1(6,-4)$、$P_2(-2,-2)$；

(3) $M(3,1)$、$N(2,1)$；

(4) $E(-2.8,6.4)$、$F(-2.8,7.2)$.

9. 一条线段的两个端点 P_1、P_2 的坐标及点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比如下，求分点 P 的坐标：

(1) (2,1)、(3,−9)，$\lambda=4$；

(2) (5,−2)、(5,3)，$\lambda=-\frac{2}{3}$；

(3) (−4,1)、(5,4)，$\lambda=\frac{5}{2}$；

(4) (8,5)、(−13,−2)，$\lambda=-\frac{4}{3}$.

10. (1) 一条线段的两个端点坐标如下，求这条线段的两个三等分点的坐标：(i)(−1,2)、(−10,−1)；(ii)(7,8)、(1,−6).

(2) 已知点 $A(1,-1)$、$B(-4,5)$. 将线段 AB 延长至 C，使 $|AC|=3|AB|$. 求点 C 的坐标.

11. 三角形的三个顶点是 $A(2,1)$、$B(-2,3)$、$C(0,-1)$. 求三条中线的长度.

12. 已知点 P_1 和 P_2 的坐标分别是(4,−3)和(−2,6)，求适合下列条件的点 P 的坐标：

(1) $\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=2$，点 P 在线段 P_1P_2 上；

(2) $\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=4$，点 P 在线段 P_1P_2 的延长线上；

(3) $\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{4}{5}$，点 P 在线段 P_2P_1 的延长线上.

13. (1) 已知三点 $A(x,5)$、$B(-2,y)$、$C(1,1)$，且点 C 平分线段 AB. 求 x、y.

(2) 已知两点 $A(3,-1)$、$B(2,1)$，求点 A 关于点 B 的对称点的坐标.

14. 已知三点 $A(1,-1)$、$B(3,3)$、$C(4,5)$. 求证：三点在一条直线上.

15. (1) 证明：直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等.

(2) 证明：三角形中位线等于底边的一半.

二 直线的方程

1.3 一次函数的图象与直线的方程

初中研究一次函数时，在直角坐标系中，画出的一次函数图象是一条直线. 例如函数 $y=2x+1$ 的图象是直线 l（图 1-14）. 这时，满足函数式 $y=2x+1$ 的每一对 x、y 的值都是直线 l 上的点的坐标，如数对 $(0,1)$ 满足函数式，在直线 l 上就有一点 A，它的坐标是 $(0,1)$；而直线 l 上每一点的坐标都满足函数式，如直线 l 上点 P 的坐标是 $(1,3)$，数对 $(1,3)$ 就满足函数式.

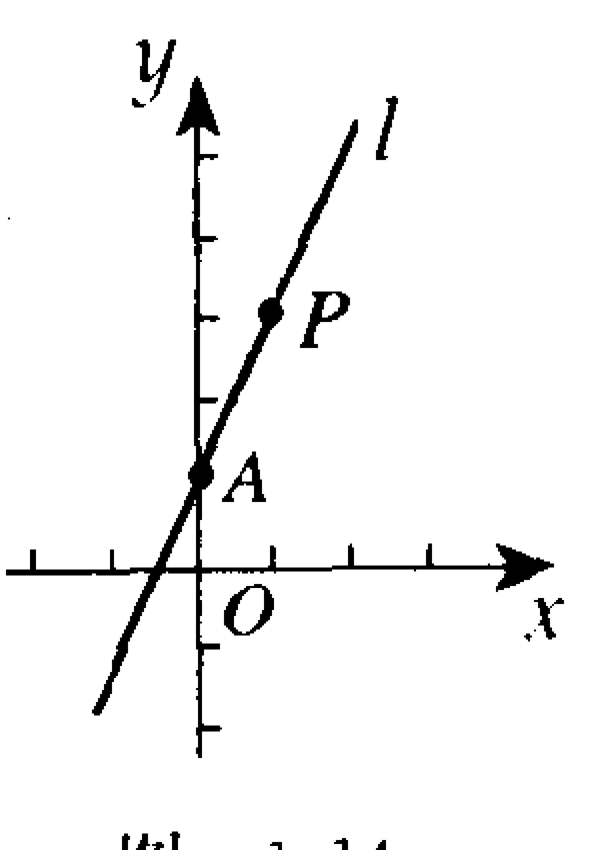


图 1-14

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条直线，它是以满足 $y=kx+b$ 的每一对 x、y 的值为坐标的点构成的. 由于函数 $y=kx+b$ 也可以看作二元一次方程，因此，我们也可以说，这个方程的解和直线上的点也存在这样的一一对应关系.

以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点；反之，这条直线上点的坐标都是这个方程的解，这时，这个方程就叫做这条**直线的方程**，这条直线叫做这个**方程的直线**.