线性代数与空间解析几何

刘保泰　苗文利　薛方津　编

天津大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括行列式、矩阵、向量及其运算、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量、线性空间与线性变换、二次型、平面与空间直线及其方程、二次曲面及线性规划初步. 本书系统地介绍了线性代数、向量代数与空间解析几何的知识，并介绍了线性规划的基本方法. 本书可作为工科大学数学课程的教材，也可作为教学参考书，供自学或考研使用.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/刘保泰主编. —天津：天津大学出版社，2001.9

ISBN 7-5618-1494-1

Ⅰ.线… Ⅱ.刘… Ⅲ.①线性代数 ②空间几何：解析几何 Ⅳ.O151.2 O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 057118 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话 发行部：022-27403647 邮购部：022-27402742
印　　刷 河北省昌黎第一印刷厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 16
字　　数 399 千
版　　次 2001 年 9 月第 1 版
印　　次 2001 年 9 月第 1 次
印　　数 1～4 000
定　　价 22.00 元

前　言

在工科大学教育中,数学课程既是基础理论课程,又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用.知识经济社会对高素质、高智力人才的需求,对大学数学课程的改革提出了前所未有的挑战,要求数学课程在教学内容、体系上有新的突破,教学方式和方法、教学环节和手段要反映时代水平.为适应培养21世纪工程技术人才对数学的要求,我们按照原国家教委关于数学系列课程改革的精神,近些年来在数学课程教学改革方面进行了探索和研究,广泛吸取了全国重点院校的改革经验,参考和学习了有关教材,取得和积累了一定的经验.作为2000年原国家教委教学改革重点资助项目的主要研究内容之一,我们自编的《线性代数与空间解析几何》教材,在2000年级教学中加以了试用.现在此基础上我们又对该教材的内容、结构、例题、习题作了细致研究和精心修改,在今年予以正式出版.

数学是几何、代数、分析有机结合的整体.它们之间既有区别又有联系.线性代数是讨论有限维空间的线性理论的课程,由于线性问题广泛存在于科学、技术的各个领域,某些非线性问题在一定条件下也可以转化为线性问题来处理.尤其在计算机普遍应用的情况下,线性代数的概念和方法,广泛地应用在各个科技领域,成为从事自然科学和工程技术工作的不可缺少的工具.几何问题更是广泛出现和应用于日常生活及科学技术之中,电视技术的动画制作、工程中的计算机辅助设计技术、科学计算的可视化等等,它们的基本数学工具都是解析几何和线性代数.

解析几何的研究对象是用代数方法解决几何问题,而线性代数的许多基本概念和方法都有很强的几何背景,代数与几何有着密切的联系.在大学数学课程体系改革中把这两部分内容合成一门课程,目的在于通过它们之间的联系,使学生更好地掌握代数方法和几何方法去处理科学技术中的问题.本书力求做到代数方法和几何方法的结合,一方面通过矩阵方法研究和解决线性代数和解析几何中的问题,另一方面对代数方法的几何背景有更深入的了解.对一些抽象的概念通过平面或空间中的具体实例加以说明,增强了抽象概念的实际背景和几何背景.作为线性代数的应用,介绍了线性规划的初步知识.

本教材共分9章,讲授全部内容需70学时,也可根据不同专业的需要选择其中部分内容讲授.

本书第1、2、3章由刘保泰编写、第4、5、6章由苗文利编写、第7、8、9章由薛方津编写.天津大学徐绥教授、天津理工学院徐永权教授审阅了全稿,提出了宝贵的意见和建议.天津理工学院教务处、基础教育学院对于本课程体系改革及本教材的出版给予了积极的支持和帮助,在此表示感谢.

由于水平所限,不当之处在所难免,敬请读者批评指正,不吝赐教.

编　者

2001年7月于天津

目　录

第 1 章　n 阶行列式

行列式是一个重要的数学工具，在工程技术和科学研究中，有很多问题需要用到它．本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质、计算方法，以及用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则．

第 1 节　n 阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式、三元线性方程组与三阶行列式

设由两个方程式组成的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

下面讨论方程组(1)的求解公式．对(1)作加减消元得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

由于 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)就是方程组(1)的求解公式．为便于记忆，我们引进新的符号表示式(2)．

设$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$是四个数，称代数和$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$为二阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称 $a_{ij}(i,j=1,2)$为这个行列式的元素．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表示该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表示该元素位于第 j 列．

对线性方程组(1)，记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

则式(2)可写成

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

例 1.1 解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=7,\\3x_1+7x_2=6.\end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix}2&3\\3&7\end{vmatrix}=2\times7-3\times3=5\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}7&3\\6&7\end{vmatrix}=7\times7-3\times6=31,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&7\\3&6\end{vmatrix}=2\times6-7\times3=-9.$$

所以

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{31}{5}=6\,\dfrac{1}{5},\\[2mm]x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-9}{5}=-1\,\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

类似地,对于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}\tag{3}$$

仍用加减消元法,当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq0$ 时,即可解得 x_1,x_2,x_3. 为了便于表示和记忆,我们引入三阶行列式. 称

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\tag{4}$$

为三阶行列式. 该行列式又称为方程组(3)的系数行列式.

例如

$$\begin{vmatrix}3&0&4\\1&1&2\\2&1&0\end{vmatrix}=3\times1\times0+0\times2\times2+4\times1\times1-3\times2\times1-0\times1\times0-4\times1\times2=-10.$$

利用三阶行列式,可以把三元线性方程组(3)的解表达成简洁的形式. 记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0,\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix},$$

则该方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$$

$$+1\times2\times1-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)-1\times1\times(-1)=-5\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

为将上述应用二、三阶行列式解系数行列式不等于零的二元、三元线性方程组的方法推广到解未知量更多的线性方程组，引入 n 阶行列式的概念.

由三阶行列式的定义容易看出：

(1)一个三阶行列式是一个数值，它是 3! 项的代数和；

(2)每一项都是 3 个元素的乘积，且它们恰好是所有位于不同行、不同列的 3 个元素之积；

(3)各项的正负号各占一半，其规律由对角线法则给出，即主对角线(从左上角到右下角这条线)上三元素的乘积 $a_{11}a_{22}a_{33},a_{12}a_{23}a_{31},a_{13}a_{21}a_{32}$ 取正号；副对角线(从右上角到左下角这条线)上三元素的乘积 $a_{11}a_{23}a_{32},a_{12}a_{21}a_{33},a_{13}a_{22}a_{31}$ 取负号.

为了给出 n 阶行列式的定义，下面首先介绍全排列及其逆序数.

1.1.2 全排列及其逆序数、对换

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(简称排列). n 个不同元素的排列共有 $n!$ 种.

例如，自然数 1,2,3 的排列共有六种：

1 2 3， 1 3 2， 2 1 3， 2 3 1， 3 1 2， 3 2 1.

为了方便，今后把自然数 $1,2,\cdots,n$ 视为 n 个不同的元素的代表. 用 p_i 表示这 n 个数中的一个($i=1,2,\cdots,n$)，且当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 便是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 对排列 $p_1p_2\cdots p_n$，我们把排在 p_i 前面且比 p_i 大的数的个数 t_i 称为 p_i 的逆序数，把这个排列中各数的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n$$

称为这个排列的逆序数. 记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列. 显然，排列 $12\cdots n$ 的

逆序数为 0,故它是偶排列.今后,称此排列为自然排列.

例 1.3 求 $t(23514)$、$t(32154)$、$t(4231)$.

解 在排列 23514 中,2 的逆序数是 0;3 的逆序数是 0;5 的逆序数是 0;1 的逆序数是 3;4 的逆序数是 1,故排列 23514 的逆序数

$$t(23514)=0+0+0+3+1=4.$$

在排列 32154 中,3 的逆序数是 0;2 的逆序数是 1;1 的逆序数是 2;5 的逆序数是 0;4 的逆序数是 1,有

$$t(32154)=0+1+2+0+1=4.$$

在排列 4231 中,4 的逆序数是 0;2 的逆序数是 1;3 的逆序数是 1;1 的逆序数是 3,有

$$t(4231)=0+1+1+3=5.$$

在一个排列中,将某两个数的位置对调(其他数不动)的变动叫做一个**对换**.两个相邻数的对换称为**相邻对换**.

定理 1.1 一个排列中的任意两个数对换后,排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设一个排列为 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_m$,对换 a 与 b 后,排列变为 $a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_m$.显然,经过此对换后,$a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的逆序数并不改变,而 a,b 两数的逆序数变为:当 $a<b$ 时,a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,a 的逆序数不变,而 b 的逆序数减少 1.所以,排列 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_m$ 与 $a_1a_2\cdots a_sbab_1b_2\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.对排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 做 m 次相邻对换,变成 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_mc_1\cdots c_n$,再做 $m+1$ 次相邻对换,变成 $a_1a_2\cdots a_sbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$.总之,经 $2m+1$ 次相邻对换,可以把排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_sbb_1\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$,所以,这两个排列的奇偶性相反.

1.1.3 n 阶行列式的定义

定义 1.1 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

做表中位于不同行不同列的 n 个元素 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 的乘积,并冠以符号 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$,而得到一项

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1 至 n 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,这样的项共有 $n!$ 个.称这 $n!$ 项的代数和为与表(5)相对应的 n 阶行列式,记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中“$\sum$”是对所有 n 阶排列 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 取和.a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数(称为元素).也可把

行列式简记作 $\det(a_{ij})$.

因此,表(5)所对应的行列式是 $n!$ 项的代数和,这些项是一切可能的取自表(5)的不同行、不同列的 n 个元素的乘积,其一般项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是个奇排列时,此项取负号;当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是个偶排列时,此项取正号.

由此定义的二阶、三阶行列式,与前面的定义是一致的.当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|=a$,注意不要与绝对值记号混淆.

显然,若行列式 D 的某行(列)的元素全是零,则一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$,故此行列式为 0(参见推论 1.3).

例 1.4 证明四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

证 这是一个四阶行列式,在展开式中应有 $4!=24$ 项.但在每项乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 中,只要有一个元素等于零,乘积就是零,所以只需计算乘积中不出现零的项.由于第 4 行中元素除了 a_{44} 外都是 0,故只须取 $p_4=4$,第 3 行元素除了 a_{33}, a_{34} 外都是 0,现已取 $p_4=4$,故只须取 $p_3=3$.同理,只须取 $p_2=2$, $p_1=1$.于是这个行列式的展开式中不为 0 的乘积只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而排列 1234 的逆序数是 0,所以这一项所带的符号是正的.因此,该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$

同理可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这种主对角线以下(上)的元素都是 0 的行列式,叫做**上(下)三角行列式**.类似地

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{t(n\,n-1\,\cdots\,2\,1)}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

在行列式的定义中,为方便,我们将 n 个元素的行指标按自然次序排列.事实上,数的乘法是可交换的,因而这 n 个元素的次序是可以任意排列的.一般地,n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{6}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列. 利用定理 1.1 可以证明, n 阶行列式中, 项(6)前面的符号等于

$$(-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)+t(j_1 j_2 \cdots j_n)}.$$

特别地, 项 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 前面的符号等于 $(-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)}$. 由此可得如下定理.

定理 1.2 n 阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}. \tag{7}$$

我们定义的行列式中的元素是数, 事实上, 可以将其推广成元素是某些其他数学对象的情形. 例如, 可以同样地定义元素是多项式的行列式.

第 2 节　n 阶行列式的性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为行列式 D 的转置行列式(对应行与列对调).

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等.

证 记 $b_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1,2,\cdots,n$, 则由定理 1.2 可得

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} = D.$$

由此性质可知, 行列式中关于"行"成立的性质, 对于"列"也同样成立, 反之亦然.

性质 1.2 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

证 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 D_1 是交换 D 的 i,j 两行得到的, 即当 $k \neq i,j$ 时, $b_{kp} = a_{kp}$; 而 $b_{jp} = a_{ip}$, $b_{ip} = a_{jp}$. 于是(不妨设 $i<j$)

$$D_1 = \sum (-1)^{t(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{t(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n}$$

$$= \sum (-1)^{t(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n},$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列,由定理 1.1 知

$$(-1)^{t(p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n)} = -(-1)^{t(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)},$$

故 $$D_1 = \sum (-1)^{t(p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D.$$

推论 1.1 如果行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

证 把行列式 D 的两行互换,有 $D=-D$,故 $D=0$

性质 1.3 行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式的定义知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{i-1 p_{i-1}} (ka_{ip_i}) a_{i+1 p_{i+1}} \cdots a_{np_n}$$

$$= k \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.2 若行列式中有两行(列)元素成比例,则行列式等于零.

推论 1.3 若行列式中有零行(列)则此行列式为零.

性质 1.4 若行列式的某一行(或列)的元素都是两数之和,例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用行列式的定义,不难证明性质 1.4,请读者自证.

性质 1.5 把行列式某一行(或列)的各元素乘以同一数后加到另一行(或列)对应的元素上去,行列式不变.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用性质 1.4 及推论 1.2 可得性质 1.5 的证明.

利用这些性质可以简化行列式的计算.为清楚起见,交换行列式 i,j 两行(列),记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;行列式第 i 行(列)乘 k,记作 $r_i\times k(c_i\times k)$;行列式第 i 行(列)提出公因子 k,记作 $r_i\div k(c_i\div k)$;以数 k 乘行列式第 i 行(列)加到第 j 行(列)上,记作 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

例 1.5 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{r_2+(-2)r_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3+1\times r_1]{r_4+(-1)r_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+1\times r_2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=1\times(-1)\times 2\times 5=-10.$$

例 1.6 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

例 1.7 已知

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=a,\begin{vmatrix}a_1'&c_1&b_1\\a_2'&c_2&b_2\\a_3'&c_3&b_3\end{vmatrix}=b.$$

计算
$$D=\begin{vmatrix}a_1+2a_1'&a_2+2a_2'&a_3+2a_3'\\b_1&b_2&b_3\\c_1+3b_1&c_2+3b_2&c_3+3b_3\end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal{r_3+(-3)r_2}\begin{vmatrix}a_1+2a_1'&a_2+2a_2'&a_3+2a_3'\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 }1.4}\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2a_1'&2a_2'&2a_3'\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 }1.3}\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}a_1'&a_2'&a_3'\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 }1.1}\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_3\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}a_1'&b_1&c_1\\a_2'&b_2&c_2\\a_3'&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 }1.2}\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}a_1'&c_1&b_1\\a_2'&c_2&b_2\\a_3'&c_3&b_3\end{vmatrix}$$

$$=a-2b.$$

例 1.8 计算 $D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\end{vmatrix}$,其中 $ab\neq0$.

解 $$D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1-a&1&1\\1&1&1+b&1\\1&1&1&1-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\-a&-a&0&0\\-a&0&b&0\\-a&0&0&-b\end{vmatrix}$$

$$=a^2b^2\begin{vmatrix} \frac{1+a}{a} & \frac{-1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{-1}{b} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2\begin{vmatrix} 1 & \frac{-1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{-1}{b} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2.$$

上述例题都是把行列式化为三角形行列式,这是一种非常重要而且常用的方法.但是,当阶数比较大的时候,计算量就很大.下节将介绍利用行列式展开的方法简化行列式的计算.

第3节　行列式的计算

一般地,阶数低的行列式比阶数高的行列式计算简便.因此我们考虑用 $n-1$ 阶行列式来表示 n 阶行列式的方法.为此,引入行列式的余子式和代数余子式的概念.

在给定的 n 阶行列式中,把 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划去,余下的元素按原来的排法构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},且记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如,行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

下面讨论将 n 阶行列式转化为 $n-1$ 阶行列式计算的问题.

引理 1.1　如果 n 阶行列式 D 中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都是零,那么 D 等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证　先证 a_{ij} 位于第 n 行第 n 列处的情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

由于只有 $p_n=n$ 时,a_{np_n} 才可能不为0,于是

$$\begin{aligned} D &= \sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_{n-1}n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1p_{n-1}}a_{nn} \\ &= a_{nn}\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_{n-1})}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{n-1p_{n-1}} \\ &= a_{nn}M_{nn}=a_{nn}A_{nn}. \end{aligned}$$

再证一般情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_{i+1}\leftrightarrow r_{i+2}\\ \vdots \\ r_{n-1}\leftrightarrow r_n}]{r_i\leftrightarrow r_{i+1}} (-1)^{(n-i)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_{j+1}\leftrightarrow c_{j+2}\\ \vdots \\ c_{n-1}\leftrightarrow c_n}]{c_j\leftrightarrow c_{j+1}} (-1)^{(n-i)+(n-j)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij} \end{vmatrix}$$

$$=a_{ij}[(-1)^{(n-i)+(n-j)}M_{ij}]=a_{ij}[(-1)^{i+j}M_{ij}]=a_{ij}A_{ij}.$$

定理 1.3 (拉普拉斯 Laplace 定理)行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

证

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots 0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

同理可证

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

定理 1.3 叫做行列式按行(列)展开法则.

例 1.9 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

解 将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{n-1}=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

例 1.10 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解 $$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=a_{33}A_{33}=a_{33}M_{33}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}=a_{13}A_{13}=a_{13}M_{13}=\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}=40.$$

例 1.11 计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解 **方法一** 用行列式性质,把 D 化成上三角形行列式.

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times(-3)\times3=-9.$$

方法二 用 D 中 $a_{13}=1$ 把第 3 列中其余元素化为 0 后,再按第 3 列展开,从而把 D