SHUXUE ZIXI YU FUDAO

数学
自习与辅导

高中代数
（第一册）

刘永贞　陈绍实
袁灿甫　刘汉标　编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

高中代数

（第 一 册）

刘永贞 陈绍实
袁灿甫 刘汉标 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导
高中代数
（第一册）
刘永贞　陈绍实
袁灿甫　刘汉标　编
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张8.25　字数183,000
1987年4月第1版　1987年4月第1次印刷
印数1—96,000

统一书号：13119·1326　　定价：1.10元

出版说明

《数学自习与辅导》是配合各类中学学生和自学青年进行文化课学习的课外读物。高中部分共六个分册。

本书的出版，旨在指导读者通过自习的方式，加深理解数学概念，熟练掌握基本解题思路和方法，进而使读者在把握知识重点、难点、关键和提高综合运用知识的能力等方面，都有所得益。

本书为高中代数第一册，由四位编者分工撰写，最后由刘永贞同志审定。

由于时间仓促，疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

本章从初中学过的一些数、式、点、形出发，引入集合的概念和初步知识，由于集合概念的引入，数学研究的对象就更广泛了．而对应是数学研究最有力的工具，没有它一切研究（如"数"数、列表、绘图等）都无法进行．学习了集合和对应的初步知识后，在思想方法和基本能力上会有一定的提高，这对学习近代的一些数学知识创造了有利的条件．

映射和逆映射是一种特殊的对应，函数和反函数的概念就是建立在集合和映射的基础上的．本章的重点就是学习这些重要的基本概念，并在此基础上研究幂函数、指数函数和对数函数的图象与性质．

本章的概念多，初学时会感到抽象难懂，但只要能确切理解各基本概念的含义、相互联系和区别，并注意结合直观图形（如文氏图、对应关系示意图以及函数图象），就能取得较好的学习效果．

一、集　合

1·1　集合

【学习指导和例题】

1．集合是原始概念，任意一组对象的全体都可以组成集

合．例如：

“同一电源三只电灯的连接方法”、“小敏的布娃娃”、以及“一枚硬币抛掷一次得到的结果”等，都可以组成集合，在这些集合中研究的对象不再局限于“数、式、点、形”了．有时集合本身也能作为对象（元素），如在集合：$\{N, R, Q\}$ 中的三个元素就都是集合．

2．集合中的元素必具备以下三个特征：

(1) 确定性　对于任意元素 x 和集合 A，$x\in A$ 或 $x\notin A$ 两者必居其一．例如：

“非常小的正数全体”，“年龄大的教师”等，由于它们描述的对象没有上述确定性．所以不能构成集合．

(2) 互异性　相同的元素不能同时作为同一集合的两个元素．例如：$\{1, 1, 2\}$ 不是集合的正确表示．

(3) 无序性　在集合里不考虑元素排列的次序．例如：$\{1, 2\}$ 和 $\{2, 1\}$ 只能表示同一个集合．

3．集合的表示方法有两种：列举法和描述法．数集、点集、解集等经常用 $\{\alpha|P\}$ 的形式来描述．α 表示此集合的代表元素，P 表示元素的公共属性．如：

$$\{x|0<x<5\},\ \{(x, y)|y=x^2,\ x\in R\},$$

$\{(x, y, z)|x+y+z=0\}$ 分别表示数集、点集和方程的解集．

例 1　“高个儿运动员”、“不等式 $x^2<0$ 的实数解”，“一件上衣”能否组成集合？如能，这些集合的元素是什么？

解：“高个运动员”描述的对象不明确，不能组成集合．而“不等式 $x^2<0$ 的实数解”属性明确，能组成集合，但由于这个集合中不存在任何元素，所以是一个空集．“一件上衣”能构成集合，这集合中元素只有一个，就是这件上衣．

例 2　若 $A=\{a+\sqrt{2}b|a、b\in Z\}$，$x$、$y$ 是 A 的两个元

素，那么 $x+y$、$x-y$、$x\cdot y$、x/y 是否仍是集合 A 的元素？

解： 若 $x\in A$，则 $x=a_1+\sqrt{2}\,b_1$ $(a_1、b_1\in Z)$，

$y\in A$，则 $y=a_2+\sqrt{2}\,b_2$ $(a_2、b_2\in Z)$，

从而 $x\pm y=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}$，而 $a_1\pm a_2$，$b_1\pm b_2$ 仍是整数，$\therefore x\pm y\in A$.

又 $\because x\cdot y=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)\sqrt{2}$，$a_1a_2+2b_1b_2$ 与 $a_2b_1+a_1b_2$ 仍是整数，$\therefore x\cdot y\in A$.

而 x/y 不一定属于 A，例如：$x=\sqrt{2}$，$y=2$，则 $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{2}}{2}\notin A$.

例 3 用各种适当的方法表示下列集合：

(1) "非负偶数"；

(2) "与 2 相差 1 的数"；

(3) "100 的质因数"；

(4) 方程组 $\begin{cases}x+y=2\\xy=-3\end{cases}$ 的解集；

(5) "在第二象限内到原点距离为 1 的点"；

(6) 以坐标原点为圆心的圆；

(7) "实系数一元二次方程的全体".

解： (1) 用列举法：$\{0, 2, 4, 6, \cdots\}$.

如用描述法表示则有以下三种：

① {非负偶数}，

② $\{2n\,|\,n\geqslant 0, n\in Z\}$，

③ $\{2(n-1)\,|\,n\in N\}$，

在这三种表示法中第③种方法较简明.

(2) 用列举法：$\{1, 3\}$.

用描述法：{与 2 相差 1 的数}，

或 $\{x \mid |x-2|=1,\ x\in R\}$.

(3) 用列举法：$\{2,\ 5\}$.

用描述法：{100 的质因数}，

或 $\left\{P \,\middle|\, \frac{100}{P}\in Z,\ P\text{ 为质数}\right\}$.

(4) 用列举法：$\{(3,\ -1),\ (-1,\ 3)\}$.

用描述法：$\{(x,\ y) \mid x+y=2$, 且 $xy=-3,\ x\in R,\ y\in R\}$.

(5) 用描述法：$\{(x,\ y) \mid x^2+y^2=1,\ x<0,\ y>0\}$,

或 $\{P \mid |PO|=1,\ P\in$ 是第二象限的点$\}$.

(6) 用描述法：{以原点为圆心的同心圆}，

或 $\{$圆 $x^2+y^2=r^2 \mid r\in R^+\}$.

本题表示的是曲线集而不是点集，因此如用：

$\{(x,\ y) \mid x^2+y^2=r^2,\ r\in R^+\}$表示是错误的.

(7) 用描述法：$\{ax^2+bx+c=0 \mid a\neq 0,\ a,\ b,\ c\in R\}$,

或 {实系数一元二次方程}.

例 4 把下列集合用直观图表示出来：

(1) $\left\{x \,\middle|\, \frac{x-2}{x+1}\geqslant 0,\ x\in R\right\}$;

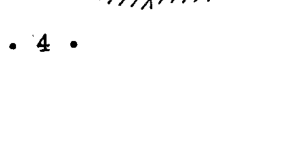
(2) $\{(x,\ y) \mid x+y<0,\ x、y\in R\}$;

(3) $\{(x,\ y) \mid x^2+y^2\leqslant 4,\ x、y\in Z\}$;

(4) $\{(x,\ y) \mid xy\leqslant 0$ 且 $y>x^2-2\}$.

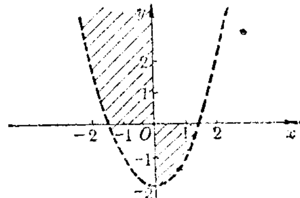
解：

(1)



(2)

(3)



(4)

说明：(1) 用列举法表示的集合一般是有限集．但如果无限集的元素有某种规律，并能利用一部分元素的顺序表示出这种规律时，那么也可用列举法表示．如自然数集可用：$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$表示．又如：$\left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \cdots\right\}$也能表示出一个由分数组成的无限集．在这里元素的顺序仅为了表示出集合中的未写出的元素，不是集合定义本身所需要的．

(2) 用描述法表示集合时，往往方法很多，但我们应力求用最明确，最简洁的方法．

(3) 集合符号要正确使用，如空集$\emptyset$不能表示为$\{\emptyset\}$，点集$\{(3, 2)\}$不能表示成$\{3, 2\}$，{质数}不能表示成{质数集}，圆集：$\{x^2+y^2=r^2 \mid r\in R^+\}$不能表示成$\{(x, y) \mid x^2+y^2=r^2, r\in R^+\}$，点集$\{(x, y) \mid y=x^2\}$不能表示成$\{y=x^2\}$．

(4) 使用连接符号$\in$，$\notin$时，要注意它们用来连接元素和集合的，不能连接集合与集合．

如　$0\in\{0, 1, 2, 3\}$不能写成：

$\{0\}\in\{0, 1, 2, 3\}$．

基本练习题　1·1

1．在____处填上$\in$或$\notin$：

(1) a____$\{(a, b)\}$；

(2) $(1, 5)$____$\{(x, y) \mid y=5x^2\}$；

(3) π____Q; (4) -2____N;

(5) 33____$\{4n+1|n\in N\}$; (6) 3____$\left\{3n\left|\frac{n}{2}\in N\right.\right\}$.

2．在自然数集中有没有数值最小的元素？有没有数值最大的元素？在整数集或有理数集中呢？

3．除了有理数集和实数集外还有没有数集 A 能满足条件“若 $x\in A$，$y\in A(y\neq 0)$，则 $x\pm y$ 和 xy，x/y 都必定属于 A”？举例说明．

4．试用其他方法表示下列集合：

(1) $A=\{x|3(x-1)<2x-5\}$；

(2) $B=\{(x,\ y)|y=x^2,\ x+y=1,\ x、y\in R\}$；

(3) $C=\left\{\frac{m}{n}\left|n\in N,\ m\in Z\right.\right\}$；

(4) $D=\left\{z\left|z=\frac{p}{q},\ p+q=5,\ p、q\in N\right.\right\}$；

(5) $E=\{$500以下且能被4个互异的素数所整除的自然数$\}$．

5．试用各种适当的方法表示下列集合：

(1) “关于 x 和 y 的实系数二次齐次式”；

(2) “$x^2-x+1\geqslant 0$ 的实数解”；

(3) “有理数的全体”；

(4) “梯形和平行四边形的全体”；

(5) “甲、乙、丙三人排成一列的所有方法”；

(6) “到 $\triangle ABC$ 三顶点距离相等的点”；

(7) “与3互质的二位数全体”．

6．在数轴或坐标平面上表示出下列集合：

(1) $\{(x,\ y)|x^2+y^2<9,\ x\in R,\ y\in R\}$；

(2) $\left\{x\left|\frac{x^2-3x+2}{x-1}<2,\ x\in R\right.\right\}$；

(3) $\{(x,\ y)|y>x^2$ 且 $y\leqslant x+2,\ x、y\in R\}$；

(4) $\{(x,\ y)|y=\sqrt{3x^2},\ x、y\in R\}$．

1·2　子集、交集、并集、补集

【学习指导与例题】

1. 子集、真子集　若 A 的任何一个元素都是 B 的元素，即若 $x\in A\Rightarrow x\in B$，那么 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$. 如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做 B 的真子集，记作 $A\subset B$.

子集的任何元素都来自“母”集，但不能理解成子集的元素是“母”集元素的一部分，否则 $A\subseteq A$ 与 $\emptyset\subseteq A$ 就难以理解了.

子集的元素必具有母集元素的属性，但反之不然，这在推理中常有应用.

如：试证菱形对角线相互平分.

证明：$\because$ 平行四边形对角线相互平分，而

{菱形}$\subset${平行四边形}，

$\therefore$ 菱形对角线相互平分.

例 1　用“$\subseteq$”或“$\supseteq$”把下列各组集合连接起来：

(1) $\{x|x\geqslant1\}$____$\{x|x>1\}$；

(2) {2 和 3 的公倍数}____{2 的倍数}；

(3) {与 15 互质的三位数}____{与 3 互质的三位数}；

(4) $\{(x,\ y)|x>0$ 且 $y>0\}$______$\{(x,\ y)|xy>0,\ x、y\in R\}$；

(5) {过 P、M 两点的圆}____{过 P 点的圆}；

(6) {等腰梯形}____{梯形}.

解：(1) $\because$ $x\in\{x|x>1\}\Rightarrow x\in\{x|x\geqslant1\}$，

$\therefore$ $\{x|x>1\}\subseteq\{x|x\geqslant1\}$.

(2) $\because$ $x\in${2 和 3 的公倍数}$\Rightarrow x\in${2 的倍数}，

$\therefore$ {2 和 3 的公倍数}$\subseteq${2 的倍数}.

(3) $\because$ $x\in${与 15 互质的三位数}$\Rightarrow x\in${与 3 互质的三位数}，

$\therefore$ {与15互质的三位数} $\subseteq$ {与3互质的三位数}.

(4) $\because$ $\{(x, y)|x>0$ 且 $y>0\}$表示第一象限内的点，而 $\{(x, y)|xy>0, x、y\in R\}$表示第一或第三象限内的点.

$\therefore$ $\{(x, y)|x>0$ 且 $y>0\} \subset \{(x, y)|xy>0, x、y\in R\}$,

(5) $\because$ 过 P、M 两点的圆必过 P 点,

$\therefore$ {过 P、M 两点的圆} $\subseteq$ {过 P 点的圆}.

(6) $\because$ 等腰梯形具有梯形属性,

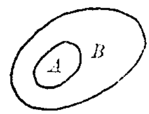
$\therefore$ {等腰梯形} $\subset$ {梯形}.

包含关系"$\subseteq$"可理解成"$\subset$"或"$=$"，若 $A\subseteq B$，则

① $B\nsubseteq A\Rightarrow A\subset B$，或

② $B\subseteq A\Rightarrow A=B$，两者必居其一.

其中①可用文氏图表示成:



例2 写出 $\{0, 1, 2\}$ 所有子集.

解: $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 2\}$, $\{0\}$, $\{2\}$, $\{1\}$, $\emptyset$.

例3 求证: (1) $\{4n-1|n\in Z\}\subset\{2n-1|n\in Z\}$;

(2) $\{4n\pm1|n\in Z\}=\{2n-1|n\in Z\}$.

证明: (1) 若 $x\in\{4n-1|n\in Z\}$，则 $x=4k-1$, $(k\in Z)$,

即 $x=2(2k)-1$, $(2k\in Z)\Rightarrow x\in\{2n-1|n\in Z\}$,

$\therefore$ $\{4n-1|n\in Z\}\subseteq\{2n-1|n\in Z\}$,

又 $\because$ $5\in\{2n-1|n\in Z\}$ 但 $5\notin\{4n-1|n\in Z\}$,

$\therefore$ $\{4n-1|n\in Z\}\subset\{2n-1|n\in Z\}$，即前者为后者的真子集.

(2) 显然 $4n\pm1$ 是奇数,

$\therefore$ $\{4n\pm1|n\in Z\}\subseteq\{2n-1|n\in Z\}$,

又若 $x=2k-1(k\in Z)$，则 $x\in\{2n-1|n\in Z\}$,

① 当 k 为偶数时，$x=2\times(2m)-1=4m-1(m\in Z)$,

② 当 k 为奇数时，$x=2\times(2m+1)-1=4m+1\ (m\in Z)$，

对于①、②均可得：$x\in\{4n\pm1|n\in Z\}$，

$\therefore\ \{2n-1|n\in Z\}\subseteq\{4n\pm1|n\in Z\}$，

综上所述可知：

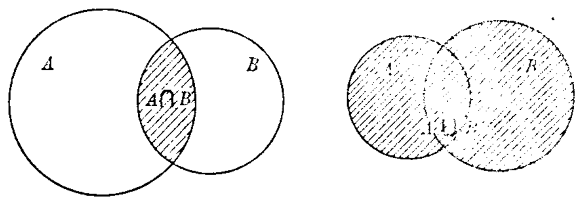
$$\{4n\pm1|n\in Z\}=\{2n-1|n\in Z\}.$$

2．交集与并集

(1) $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$，

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

它们分别用文氏图表示如下：



(2) 若 $A\subseteq B$，则有如下运算结果：

$\cap$	A	B	$\emptyset$
A	A	A	$\emptyset$
B	A	B	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\cup$	A	B	$\emptyset$
A	A	B	A
B	B	B	B
$\emptyset$	A	B	$\emptyset$

(3) 若 $f_1(x, y)=0$ 的解集为 F_1，

$f_2(x, y)=0$ 的解集为 F_2.

则方程组：

$$\begin{cases}f_1(x, y)=0\\ f_2(x, y)=0\end{cases}$$

的解集为 $F_1\cap F_2$；而方程 $f_1(x, y)\cdot f_2(x, y)=0$ 的解集为 $F_1\cup F_2$.

例 5 $A=\{x|x>-5\}$, $B=\{x|x<2\}$, $C=\{x|x>2\}$,试求:

(1) $A\cap C$; (2) $A\cup C$; (3) $A\cap B$;

(4) $A\cup B$; (5) $B\cap C$; (6) $B\cup C$;

(7) $(A\cap B)\cup C$; (8) $(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

解: (1) $\because C\subset A$, $\therefore A\cap C=C$.

(2) $\because C\subset A$, $\therefore A\cup C=A$.

(3) $A\cap B=\{x|-5<x<2\}$.

(4) $A\cup B=R$.

(5) $B\cap C=\emptyset$.

(6) $B\cup C=\{x|x\neq 2, x\in R\}$.

(7) $(A\cap B)\cup C=\{x|-5<x<2\}\cup\{x|x>2\}$

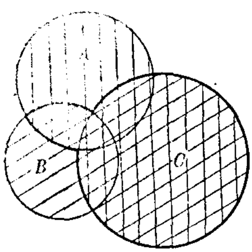
$=\{x|-5<x<2$ 或 $x>2\}$.

(8) $(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C$

$=\{x|-5<x<2$ 或 $x>2\}$.

说明: 可以利用文氏图验证:

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.



图中用粗线条勾出部分为 $(A\cap B)\cup C$, ▥ 表示 $A\cup C$, ▨ 表示 $B\cup C$, ▦ 表示 $(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

例 6 写出下列集合的交集或并集:

(1) {一次函数}$\cup${二次函数};

(2) {过点 P、Q 的圆}$\cap${过 P、M 两点的圆};

(3) $\left\{(x, y)\left|\frac{y}{x}=1\right.\right\}\cap\{(x, y)|x=0, x、y\in R\}$;

(4) $\{(x, y)|y>|x|\}\cup\{(x, y)|y>x^2+2, x、y\in R\}$;

(5) $\{(x, y)\,|\,|x|=1, x、y\in R\}\cap\{(x, y)\,|\,|y|=1, x、y\in R\}$;

(6) $\{(x, y)\,|\,x+y=0, x、y\in R\}\cup\{(x, y)\,|\,x-y=0, x、y\in R\}$.

解: (1) $\{y=ax^2+bx+c\,|\,a, b, c\in R, a^2+b^2\neq 0\}$.

(2) {过 P, Q, M 三点的圆}.

说明: 要防止把元素与属性混淆起来，交集是两个集合公共元素的集合，但不是具有共同属性的元素的集合，却相反，两个集合公共元素既有 A 集的属性也有 B 集的属性. 所以本题应理解为既过 P、Q，又过 P、M 的圆.

(3) $\emptyset$.

(4) $\{(x, y)\,|\,y>|x|\}$.

(5) 根据 (3) 可知两个方程的解集的交集是方程组的解集:

$$\begin{cases}|x|=1,\\|y|=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm 1,\\y=\pm 1.\end{cases}$$

$\therefore$ 交集为: $\{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$.

(6) 是两个方程的解集的并集，即

并集为: $\{(x, y)\,|\,(x+y)(x-y)=0\}$.

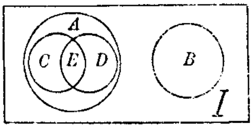
例 7 用文氏图表示下列集合间的关系，并在其中选出具有包含关系的集合，用"$\subset$"或"$\subseteq$"符号连接起来.

(1) $A=$\{平行四边形\}, $B=$\{梯形\}, $I=$\{四边形\}, $C=$\{矩形\}, $D=$\{菱形\}, $E=$\{正方形\}.

(2) $A=$\{正偶数\}, $B=\{5x\,|\,x\in N\}$, $C=\{10^{\alpha}\,|\,\alpha\in N\}$, $D=\{5k\,|\,k$ 是正奇数\}, $E=$\{2 和 5 的公倍数\}, $I=N$.

(3) $I=\{(x, y)\,|\,x\in R, y\in R\}$, $A=\{(x, y)\,|\,xy<0, x\in R, y\in R\}$, $B=\{(x, y)\,|\,x<0$, 或 $y<0\}$, $C=\{(x, y)\,|\,x<$

0 且 $y<0\}$，$D=\{(x, y)|x^2+y^2<0\}$.



解：(1)

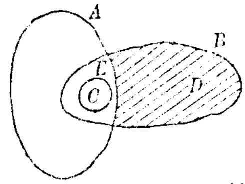
从图中可知：$B\subset I$，

$E\subset C\subset A\subset I$，

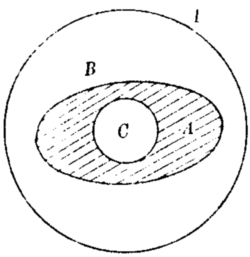
$E\subset D\subset A\subset I$.

(2) 根据题意可知：$E\subset A$，$E\subset B$. 且 $E=A\cap B$，$D\subset B$，且 $D\cap E=\emptyset$，$D\cup E=B$，$C\subset E$，

∴可画出集合关系图如右. 从图中可知：$C\subset E\subset A$，$C\subset E\subset B$，$D\subset B$.



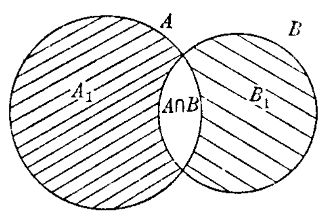
(3) 根据题意可知：I 为坐标平面上点的全体，A 为第二象限和第四象限点的全体，B 为第二、第三、第四象限内点的全体，C 为第三象限内点的全体，D 为空集(一般可不画文氏图)，由此可得集合关系图如左，从图中可知：



$D\subset C\subset B\subset I$，

$D\subset A\subset B\subset I$.

注意：如集合 A 与集合 B 有以下关系：



它们划分出三部份分别可用集合 A_1、$A\cap B$，B_1 表示，且这三个集合中元素个数分别表为 $n(A_1)$，$n(A\cap B)$，$n(B_1)$ 则

$$n(A)=n(A_1)+n(A\cap B),$$

$$n(B)=n(B_1)+n(A\cap B),$$

而 $$n(A\cup B)=n(A_1)+n(A\cap B)+n(B_1),$$

$$\therefore\quad n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

这是计算集合中元素个数的重要公式.

例 8 或是 2 的倍数或是 3 的倍数的三位数有几个？

解： 设 $A=\{$三位偶数$\}$, $B=\{$是 3 的倍数的三位数$\}$,

则 $$A\cap B=\{\text{是 6 的倍数的三位数}\},$$

$$A\cup B=\{\text{或是 2 的倍数或是 3 的倍数的三位数}\},$$

由于三位数从 100～999 总共是 900(个),

$$\therefore\quad n(A)=\frac{1}{2}\times 900=450(\text{个}),$$

$$n(B)=\frac{1}{3}\times 900=300(\text{个}),$$

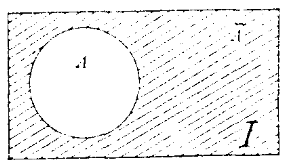
$$n(A\cap B)=\frac{1}{6}\times 900=150(\text{个}),$$

根据 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 可知:

$$n(A\cup B)=450+300-150=600(\text{个}).$$

3. 补集 在研究集合之间关系时，这些集合常常都是某一给定集合的子集，这个给定的集合叫全集，记作 I.

$\bar{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\notin A\}$ 如图:



若 $f_1(x, y)=0$ 解集为 F_1,

$f_2(x, y)=0$ 解集为 F_2,

则 $\dfrac{f_1}{f_2}=0$ 的解集为 $F_1\cap\bar{F}_2$.

例 9 指出下列文氏图中阴影部分所表示的集合.