周希朗 编著

电磁场与波总复习

上海交通大学出版社

电磁场与波总复习

周希朗　编著

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本参考书与目前《电磁场与波》的教学大纲密切配合，共分七章，每章均介绍了本章的主要内容与重点、主要公式，并精选了例题、思考题及习题。

本书例题、思考题及习题选题广泛，难易适中，题解既注重概念上的分析，也注意数学上的演算，部分题给出不同解法或多解提示。本书部分例题、思考题及习题选自近几届本科生期终试题、选优考试题、硕士生入学考试题以及上海市高等教育自学考试题。

本书可供工科通信工程、电子科学与技术等专业本科生、专科生以及高职学生用作复习《电磁场与波》或《电磁场与微波技术》的教学参考书，也可供报考相关专业硕士研究生的考生或有关科技人员用作参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与波总复习/周希朗编著. —上海：上海交通大学出版社，2001

ISBN 7-313-02625-0

Ⅰ.电… Ⅱ.周… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教学参考资料 ②微波频率-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0456

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 12015 号

电磁场与波总复习

周希朗 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：张天蔚

立信会计常熟市印刷联营厂印刷 全国新华书店经销

开本：850mm×1168mm 1/32 印张：10.375 总字数：267 千字

2001 年 3 月第 1 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

印数：1～1600

ISBN 7-313-02625-0/O·137 定价：15.00 元

前　言

本书是参照“《电磁场与波》教学大纲”的基本要求，针对学生学习《电磁场与波》的实际需要编写的一本教学参考书。

《电磁场与波》是信息工程、电子科学与技术等工科电子类专业的一门十分重要的技术基础课。该课程是一门讲述“场”方面知识的课程，其内容概念抽象，公式繁多，许多学生在学习过程中兴趣不高且有畏难情绪，不少的同学反映听课尚懂，但自己做题却无从下手。因此，他们迫切希望能有一本合适的复习指导方面的书籍作为参考。根据编者多年的教学经验，学生在学习“场”方面课程时遇到的疑难问题具有一定的普遍性，编写简明的复习指导书，对学生的学习非常有益，并能减少教师的授课工作量。学生要学好“场”方面的课程，做适量的典型习题是必需的。同时，学生通过做题可进一步加深对课本知识的理解和深化，起到举一反三之功效。前些年，虽然与《电磁场与波》相关的学习指导书和习题、例题集尚有一些，但却为数不多，且这类书选题要么是针对电磁场甚至是静态场方面的，要么是选题难度较高。为此，编者针对在校的本科生、大专生、高职学生或广大参加自学考试的读者学习《电磁场与波》或《电磁场与微波技术》(部分内容)的实际需要，编写了这本教学参考书，将它奉献给大家，希望它能为广大读者排除学习“场”方面课程的心理障碍，克服学习中遇到的困难，提高学习“场”方面课程的兴趣，培养分析问题、解决问题以及创新能力，树立学习的自信心，为进一步学好后续课程或从事科研工作奠定坚实基础。

本书的章节安排及内容顺序参照黎滨洪、金荣洪、张佩玉编著的《电磁场与波》一书，同时兼顾了国内部分统编教材。考虑到非微波专业讲授《电磁场与波》的学时数(54 学时)限制，本书未收录

有关章节(如狭义相对论、圆形金属波导、谐振腔等)的内容。

本书每章内容包括:主要内容与重点、主要公式、例题、思考题以及习题。主要公式部分的编写尽可能简明扼要,便于读者复习时用较短的时间记忆公式。例题部分的选题尽可能做到:1. 注重基本概念和基本内容;2. 多数题目难度适中,少量题目较复杂或难度较高;3. 重点内容题量较多,同时兼顾一般内容;4. 部分题目提供多解,部分则给出多解提示,便于读者自行推导。思考题部分的选择主要注重概念,一般不提供计算题,这类题对学生加深理解所学内容的概念甚为重要。习题部分的选题原则大致同例题部分相同,每道习题均提供详解甚至多解。在例题和习题的解题过程中,编者力求注意点拨思路、启迪思维、揭示规律,使读者通过解题或阅读掌握基本概念、解题方法和规律,从而使读者不断提高自身求解"场"方面问题的能力。编者建议,读者应对各章习题认真分析、推演后再参考习题解答,切不可一味地阅读习题解答。

在本书的编写过程中始终得到上海交通大学电子信息学院、电子工程系领导徐国治教授等的关心和鼓励,始终得到电磁场与微波技术教研室领导和同事李征帆教授等的关心、支持和帮助,出版社的几位老师也为该书的出版提供了无私的帮助并付出了辛勤劳动,对上述在本书编写出版工作中曾给予关心、鼓励、支持和帮助的同志,编者一并表示衷心的感谢。此外,本书中的部分例题、思考题以及习题参考或选自国内外有关的教材、参考书或本校电子工程系近几年本科生"电磁场与波"的期终考试题、选优考试题、硕士生入学考试题以及上海市高等教育自学考试题,编者同样向有关教材、参考书的编著者和有关老师致以崇高敬意。

由于编者学识水平有限和时间仓促,书中不妥之处,恳请同行及读者批评指正。

编　者

2000 年 10 月

目　录

1　矢量分析与场论

1.1　本章主要内容与重点

本章主要内容：矢量代数运算、标量场的梯度、矢量场的散度和旋度、标量场、矢量场的重要性质和定理以及正交曲线坐标系。

本章重点：与标量场的梯度、矢量场的散度和旋度有关的概念和简单运算；标量场和矢量场的重要性质以及与正交曲线坐标系有关的概念和简单计算。

1.2　主要公式

1.2.1　矢量代数运算

(1) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量：$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{A}/|\boldsymbol{A}|=\boldsymbol{A}/A$，其中 A 是 $\boldsymbol{A}$ 的模。在直角坐标系下，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z$，则

$$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_x\frac{A_x}{A}+\boldsymbol{a}_y\frac{A_y}{A}+\boldsymbol{a}_z\frac{A_z}{A} \tag{1.1}$$

而 $A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

(2) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的标量积：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta_{AB}$，其中 θ_{AB} 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 间较小的夹角（即 $\theta<180°$）。在直角坐标系下，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$。

(3) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的矢量积：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_nAB\sin\theta_{AB}$，其中 $\boldsymbol{a}_n$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 构成的平面，且 $\boldsymbol{a}_n$ 与 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足右手螺旋关系。在直角坐标系下

$$
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}
$$

(4) 三个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的三重标积公式

$$
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.2}
$$

(5) 三个矢量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的三重矢积公式

$$
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.3}
$$

1.2.2 标量场的梯度

(1) 标量场 $\phi(x,y,z)$ 在直角坐标系下的梯度公式为

$$
\mathrm{grad}\phi=\nabla\phi=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.4}
$$

显然，标量场的梯度是一个矢量场。$\nabla\phi$ 的模和方向是标量 ϕ 在某点处的最大方向导数及其方向。

(2) 梯度运算规则

$$
\nabla(\phi\pm\psi)=\nabla\phi\pm\nabla\psi \tag{1.5}
$$

$$
\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi \tag{1.6}
$$

其中 ϕ、ψ 均为标量场。

1.2.3 矢量场的通量、散度和散度定理

(1) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过场中任一曲面的通量为 $\Phi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，若曲面为闭曲面，则 $\Phi=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$。

(2) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度的定义式

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.7a}
$$

(3) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度在直角坐标系下的表达式

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.7b}
$$

显然，矢量场的散度是一个标量场。若$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为无散

场(或称无源场)。

(4) 散度运算规则

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \pm \nabla \cdot \boldsymbol{B} \tag{1.8}$$

$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) = \phi \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla \phi \tag{1.9}$$

1.2.4 矢量场的环量、旋度和斯托克斯定理

(1) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿场中任一封闭曲线的环量

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

(2) 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度在直角坐标系下的表达式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

显然,矢量场的旋度是一个矢量场。其大小是 $\boldsymbol{A}$ 在给定点处的最大环量面密度,方向是当面元的取向使环量面密度取得最大值时该面元矢量的方向。若 $\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场(或称保守场)。

(3) 旋度运算规则

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} \pm \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1.11}$$

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = \phi(\nabla \times \boldsymbol{A}) + \nabla \phi \times \boldsymbol{A} \tag{1.12}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{1.13}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1.14}$$

(4) 斯托克斯定理

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.15}$$

(5) 旋度定理

$$\int_V (\nabla \times \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = -\oint_S \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.16}$$

1.2.5 标量场、矢量场的重要性质

(1) 梯度场的旋度恒为零，即

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

(2) 旋度场的散度恒为零，即

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

1.2.6 正交曲线坐标系

(1) 正交曲线坐标系的度量因子

$$h_i = \left[\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial G_k}{\partial u_i} \right)^2 \right]^{1/2}, \qquad i = 1,2,3 \tag{1.17}$$

其中 $u_i(i=1,2,3)$是正交曲线坐标系的坐标，而 $G_1(u_1,u_2,u_3)=x$，$G_2(u_1,u_2,u_3)=y$，$G_3(u_1,u_2,u_3)=z$。

(2) 正交曲线坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,3)$与直角坐标系单位矢量间的关系

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_x \frac{1}{h_i} \frac{\partial G_1}{\partial u_i} + \boldsymbol{a}_y \frac{1}{h_i} \frac{\partial G_2}{\partial u_i} + \boldsymbol{a}_z \frac{1}{h_i} \frac{\partial G_3}{\partial u_i}, i = 1,2,3 \tag{1.18}$$

(3) 圆柱坐标系的单位矢量与直角坐标系的单位矢量间的关系

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_\varphi \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \end{bmatrix} \tag{1.19a}$$

或

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = [M]' \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} \tag{1.19b}$$

式中$[M]'$为$[M]$的转置矩阵。

(4) 圆球坐标系的单位矢量与直角坐标系的单位矢量间的关系

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_R \\ \boldsymbol{a}_\theta \\ \boldsymbol{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} \tag{1.20a}$$

或 $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_x \\ \boldsymbol{a}_y \\ \boldsymbol{a}_z \end{bmatrix} = [M]' \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_R \\ \boldsymbol{a}_\theta \\ \boldsymbol{a}_\varphi \end{bmatrix} \tag{1.20b}$$

(5) 正交曲线坐标系下梯度、散度和旋度的展开式

标量场中的梯度：$$\nabla\phi = \boldsymbol{a}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1} + \boldsymbol{a}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2} + \boldsymbol{a}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3} \tag{1.21}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right] \tag{1.22}$$

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度：$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{a}_1 & h_2\boldsymbol{a}_2 & h_3\boldsymbol{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \tag{1.23}$$

1.3 例题

例1.1 已知$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$分别为：$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y - 3\boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z$，$\boldsymbol{C} = 5\boldsymbol{a}_x - 2\boldsymbol{a}_z$，求：1)$\boldsymbol{a}_A$；2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；3)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；4)$\theta_{AB}$；5)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；6)$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；7)$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

解：1) $$\boldsymbol{a}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{a}_xA_x + \boldsymbol{a}_yA_y + \boldsymbol{a}_zA_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y - 3\boldsymbol{a}_z}{\sqrt{1 + 2^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{a}_x + 2\boldsymbol{a}_y - 3\boldsymbol{a}_z)$$

2) $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}| = |(1-0)\boldsymbol{a}_x + (2-(-4))\boldsymbol{a}_y + (-3-1)\boldsymbol{a}_z|$

$$= \sqrt{53}$$

3) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 1 \times 0 + 2 \times (-4) - (3 \times 1) = -11$

4) $\theta_{AB} = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right) = \arccos\left(\frac{-11}{\sqrt{17}\sqrt{14}}\right) = 135.48°$

5) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(4\boldsymbol{a}_x + 13\boldsymbol{a}_y + 10\boldsymbol{a}_z)$

6) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -42 = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$

7) **方法Ⅰ(直接计算):**

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -10\boldsymbol{a}_x - \boldsymbol{a}_y - 4\boldsymbol{a}_z$$

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ -10 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{a}_x - 40\boldsymbol{a}_y + 5\boldsymbol{a}_z$$

方法Ⅱ(利用三重矢积公式)

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = -\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = -[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})]$$
$$= 2\boldsymbol{A} + 11\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{a}_x - 40\boldsymbol{a}_y + 5\boldsymbol{a}_z$$

同理可得

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$$
$$= 11\boldsymbol{B} + 11\boldsymbol{C} = 55\boldsymbol{a}_x - 44\boldsymbol{a}_y - 11\boldsymbol{a}_z。$$

例 1.2 证明三重矢积公式:$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$。

证法Ⅰ:由于 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ 垂直于 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$,则有 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ 与 $\boldsymbol{B}$,

$\boldsymbol{C}$ 共面，且

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=k_1\boldsymbol{B}+k_2\boldsymbol{C} \tag{1}$$

其中 k_1,k_2 为常数，且有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]\cdot\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\\&=0\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=0\end{aligned} \tag{2}$$

及
$$(k_1\boldsymbol{B}+k_2\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=k_1(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+k_2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{3}$$

由以上三式，得

$$k_1(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})+k_2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})=0 \tag{4}$$

显然，若设 $k_1=\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$，则 $k_2=-\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$。于是，将 k_1,k_2 代入式(1)，有

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-\lambda(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{5}$$

因上式对任何 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均成立，不失一般性，取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_y,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_y,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}_z$，则代入式(5)，有

$$\boldsymbol{a}_y\times(\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_z)=\lambda(\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_z)\boldsymbol{a}_y-\lambda(\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_y)\boldsymbol{a}_z$$

即 $\boldsymbol{a}_y\times\boldsymbol{a}_x=-\lambda\boldsymbol{a}_z$，可得 $\lambda=1$，从而式(5)变为

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

证法Ⅱ：设 $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{a}_x+b_1\boldsymbol{a}_y+c_1\boldsymbol{a}_z,\boldsymbol{B}=a_2\boldsymbol{a}_x+b_2\boldsymbol{a}_y+c_2\boldsymbol{a}_z,\boldsymbol{C}=a_3\boldsymbol{a}_x+b_3\boldsymbol{a}_y+c_3\boldsymbol{a}_z$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$。于是

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\\&=(a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3)(a_2\boldsymbol{a}_x+b_2\boldsymbol{a}_y+c_2\boldsymbol{a}_z)\\&\quad-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)(a_3\boldsymbol{a}_x+b_3\boldsymbol{a}_y+c_3\boldsymbol{a}_z)\\&=\begin{vmatrix} b_1 & c_1\\ -\begin{vmatrix} a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_x-\begin{vmatrix} a_1 & c_1\\ \begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_y\\&\quad+\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ \begin{vmatrix} b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & c_2\\ a_3 & c_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}\boldsymbol{a}_z\end{aligned}$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \tag{6}$$

又由于 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{a}_x-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{a}_y+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{a}_z$，则

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \tag{7}$$

比较式(6)、(7)，即得证。

例 1.3 已知 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量，c 为常数，证明：1) $\nabla \mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$；2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$；3) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=c\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

证：设 $\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{a}_x+k_y\boldsymbol{a}_y+k_z\boldsymbol{a}_z$，其中 k_x,k_y,k_z 为常数；$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{a}_x+y\boldsymbol{a}_y+z\boldsymbol{a}_z$，则

$$1)\ \nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)[\mathrm{e}^{c(k_xx+k_yy+k_zz)}]$$
$$=c(k_x\boldsymbol{a}_x+k_y\boldsymbol{a}_y+k_z\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{c(k_xx+k_yy+k_zz)}=c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$2)\ \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$
$$=\boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

其中，因 $\boldsymbol{A}$ 为常矢量，故 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$。

$$3)\ \nabla\times(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}+\nabla\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{A}$$
$$=c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{A}=(c\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

其中 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$。

例 1.4 已知矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_xx^2+\boldsymbol{a}_y(xy)^2+\boldsymbol{a}_z(24x^2y^2z^3)$，1)求 $\boldsymbol{A}$ 的散度；2)求 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的体积分；3)求 $\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的面积分，并验证散度定理。

解:1)由于$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$,所以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=2x+2x^2y+72x^2y^2z^2$$

2) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 对中心在坐标原点的单位立方体的体积分为

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{24}\tag{1}$$

③ 为求 $\boldsymbol{A}$ 对单位立方体表面的面积分,设 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6 分别为此立方体的上、下、前、后、左、右表面的面积,则

$$\begin{aligned}\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\int_S x^2\mathrm{d}S_{yz}+(xy)^2\mathrm{d}S_{zx}+(24x^2y^2z^3)\mathrm{d}S_{xy}\\&=\int_{S_1}(24x^2y^2z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{S_2}(24x^2y^2z^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{S_3}(xy)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\int_{S_4}(xy)^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{S_5}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\int_{S_6}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=2\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(3x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{24}\end{aligned}\tag{2}$$

由(1)、(2)两式可见

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{24}$$

例 1.5 一标量函数 $V=\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{3}\right)\mathrm{e}^{-z}$,求:1)在 $p(1,2,3)$处 V 的速率增加最快的方向及大小;2)求 p 点向坐标原点增加率(方向导数)的大小。

解:1)因标量函数 V 在其梯度方向增加率最快,而

$$\begin{aligned}\nabla V&=\boldsymbol{a}_x\frac{\partial V}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial V}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial V}{\partial z}\\&=\boldsymbol{a}_x\left[\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{3}\right)\mathrm{e}^{-z}\right]\\&\quad+\boldsymbol{a}_y\left[\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{3}\right)\mathrm{e}^{-z}\right]-\boldsymbol{a}_z\left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{3}\right)\mathrm{e}^{-z}\right]\end{aligned}$$