浙 江 大 学 土 木 系
石油化学工业部第六设计院
广东省轻工业设计院

结构计算与程序设计

中国建筑工业出版社

本书是一本介绍应用电子计算机计算建筑结构的基本知识书籍。主要内容包括：矩阵代数和线性方程组的解法；有限单元法的柔度矩阵法、刚度矩阵法、刚度集合法以及在平面问题、薄板弯曲、壳体中的应用；电子计算机的一般介绍；DJS-21机（简称121机）的ALGOL 60算法语言和手编程序；工程实例等。

本书可供建筑结构设计人员参考。

结构计算与程序设计

浙 江 大 学 土 木 系
石油化学工业部第六设计院
广 东 省 轻 工 业 设 计 院

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/16　印张：19　插页：3　字数：460千字
1977年10月第一版　1977年10月第一次印刷
印数：1—26,480册　定价：1.55 元
统一书号：15040·3355

前　言

无产阶级文化大革命以来，我国电子工业蓬勃发展，电子计算机在生产建设、科学研究等方面广泛应用。建筑结构计算方面，有不少单位在工程设计和科学研究中，使用电子计算机计算各种结构，取得了显著的效果，积累了一些比较成熟的计算程序。

用电子计算机计算建筑结构，速度快，精确度高，有利于多种方案比较，可以大大节省人力，节约时间，多快好省地完成设计任务。

为了促进在建筑结构计算中使用电子计算机，向初学者提供运用电子计算机计算建筑结构的基本知识和掌握编写程序的方法，我们编写了这本《结构计算与程序设计》。

本书首先阐述矩阵代数的基本内容及用电子计算机解线性方程组的几种常用方法，着重说明解题过程并导出一些普遍式，为程序设计打下基础；其次，讲解了结构力学和弹性力学中的有限单元法，把最常用的刚度集合法（直接刚度法）作为重点，并结合讨论了有限单元法在平面问题、薄板弯曲和壳体中的应用；随后，叙述应用电子计算机的基本知识，并以DJS-21机（简称121机）为例，重点介绍ALGOL60算法语言，对手编程序也作了一般介绍；最后，列举了用121机ALGOL60算法语言编写源程序的两个工程实例。

由于我们水平不高，书中一定有不少缺点和错误，希望读者批评指正。

编　者

一九七六年七月

目　录

第一章　矩阵代数和线性方程组

在建筑结构计算中，很多问题可归结为求解线性方程组的问题。在一般情况下，线性方程组的方程数适等于未知量数，因此在理论上都是可以求解的。随着科学技术的不断发展，线性方程组的阶数愈来愈大，计算精度的要求愈来愈高，运算工作就十分繁冗，有时甚至很难用计算尺或手摇计算机精确求解。电子计算机的出现和发展，为解决这些问题创造了有利条件，以前一些被认为无法求解的问题已能得到满意的结果。由于用矩阵形式来表达数学式子，记法清晰、运算简明、便于编写程序，很适合于电子计算机，所以矩阵运算受到重视和应用。为了使读者对矩阵的概念及其基本运算有所了解，本章着重介绍矩阵的代数运算及其基本性质，同时介绍几种适用于电子计算机运算的线性方程组的解法。

1-1　矩阵的概念

一、定义

在结构力学中，不论用力法或位移法求解超静定结构，都会碰到下列线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=c_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=c_2\\
a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3n}x_n=c_3\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=c_m
\end{array}\right\}\tag{1-1}$$

其中x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）是未知量，a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$）为其系数，c_i为自由项（或称常数项）。

如果我们将式（1-1）中的$m\times n$个系数a_{ij}（$1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$）按原来次序排列在一起，并放在一个方括弧里，这样形成一个有m个横行和n个竖列的表格，如

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}\tag{1-2}$$

就称为$m\times n$矩阵。以后为了便于书写，往往用拉丁字母A，B，C……等外加方括弧（或粗体字）来表示一个矩阵，例如矩阵（1-2）可记为$[A]$，即：

$$[A]=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}\tag{1-3}$$

系数a_{ij}称为该矩阵的元素。元素的第一个下标i表示该元素所在的行数，第二个下标j表示该元素所在的列数，二者用来确定该元素在矩阵中的所在位置。有时为了强调$[A]$是一个$m\times n$矩阵，可把它记为$[A]_{m\times n}$或$[a_{ij}]_{m\times n}$。必须注意，矩阵$[A]$的记法与行列式$|A|$的记法很相近，但它们的意义却截然不同。矩阵$[A]$，根本不象行列式那样代表一个数，而只是一些数排列成的一个表格，它不能展开，但可以进行加、减、乘、除等各种运算。

同样，也可将式（1-1）的n个未知量x_j和m个常数c_i，分别按次序排列成一个竖列，记为

$$[x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\qquad [c]=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

$[x]$称为$n\times 1$矩阵，$[c]$称为$m\times 1$矩阵。这样式（1-1）可书写成如下矩阵形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

或简写为

$$[A][x]=[c] \tag{1-6}$$

线性方程组（1-1）为什么可以写成如式（1-5）或（1-6）那样的矩阵形式，在学习了下面矩阵的乘法后就会理解。

二、几种特殊矩阵的定义

1.方阵——一个行数和列数相同的矩阵，称为方阵。方阵的最大行（列）数称为方阵的阶，如

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

是n阶方阵。为明确起见，n阶方阵有时也记为$[A]_n$。在上面矩阵中，从元素a_{11}到a_{nn}连成的直线，称为该方阵的主对角线。

2.行矩阵——凡矩阵只有一行时，称为行矩阵或行向量。书写时，各元素的第一个下标可以省略。例如，一个$1\times n$矩阵记为

$$[A]=[a_1\ \ a_2\cdots a_n]$$

3.列矩阵——凡矩阵只有一列时，称为列矩阵或列向量。书写时，各元素的第二个下标可以省略。同时，一般把列向量的书写形式用花括弧代替方括弧，以示区别。在本书的内容中采用这种记法。例如式（1-4）的两个矩阵都是列向量，记为

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{Bmatrix};\qquad \{c\}=\begin{Bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\\vdots\\c_m\end{Bmatrix}$$

4.零矩阵——矩阵中所有元素均为零时，称为零矩阵，记作$[0]$或$[0]_{m\times n}$。即：

$$[0]=[0]_{m\times n}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

5.负矩阵——矩阵中所有元素均为负数时，称为负矩阵，记作$-[A]$。即：

$$-[A]=\begin{bmatrix}-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{m1}&-a_{m2}&\cdots&-a_{mn}\end{bmatrix}$$

6.对角线矩阵——除主对角线上的元素外，其余元素均为零的矩阵，称为对角线矩阵。例如

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&8\end{bmatrix}$$

对角线矩阵必为方阵。

7.单位矩阵——主对角线上的元素均为1，其余元素均为零的n阶方阵，称为n阶单位矩阵，记作$[I]$或$[I]_n$。即：

$$[I]=[I]_n=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_n$$

8.上三角形矩阵——主对角线以下的所有元素均等于零的方阵，称为上三角形矩阵，又称右三角形矩阵。例如

$$\begin{bmatrix}7&2&1&8\\0&3&-1&5\\0&0&5&1\\0&0&0&6\end{bmatrix}$$

9.下三角形矩阵——主对角线以上的所有元素均等于零的方阵，称为下三角形矩阵，又称左三角形矩阵。例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10.对称矩阵——对称于主对角线的元素两两相等的方阵，即$a_{ij}=a_{ji}$（当 $i \neq j$ 时），称为对称矩阵。例如

$$\begin{bmatrix} 120 & 2 & -1 \\ 2 & 33 & 0 \\ -1 & 0 & 156 \end{bmatrix}$$

11.反对称矩阵——主对角线上各元素均为零，且对称于主对角线的元素两两相等，但符号相反的方阵，即 $a_{ij}=-a_{ji}$（当 $i \neq j$ 时），称为反对称矩阵。例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 10 \\ 4 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

12.对称正定矩阵——用有限单元法得到的线性代数方程组，它的系数矩阵一般都属对称正定矩阵。这里我们介绍一些有关对称正定矩阵的初步知识。

在讲对称正定矩阵以前，先介绍一下什么叫做二次型和正定二次型。

二次型的形式，可表示如下：

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \cdots x_n) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ = & \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

式中 $a_{ij}=a_{ji}$。

上式写成矩阵表达式，则为

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = [x_1 x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

$$= \{x\}^T [A] \{x\}$$

式中$[A]$称为二次型$F(x_1, x_2, \cdots x_n)$的矩阵，a_{ij}称为二次型的系数，所以每个二次型都有一个对应的对称矩阵，反之，每个对称矩阵对应于某一个二次型。

定义：如果对于任意 n 维列向量$\{x\}$，二次型

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \geqslant 0$$

且其中等号仅当$\{x\}$为零向量时才成立，那么我们称该二次型为正定二次型。正定二次型的矩阵$[A]$，称为正定矩阵。

例如，对角线矩阵

$$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

的主对角线元素全大于零，即$d_{ii}>0$（$i=1, 2, \cdots n$），则$[D]$为正定矩阵。

因为由$[D]$对应的二次型

$$F(x_1, x_2\cdots x_n)=d_{11}x_1^2+d_{22}x_2^2+\cdots+d_{nn}x_n^2$$

只有当$\{x\}$是零向量时才等于零，否则恒大于零，所以它是正定二次型，而$[D]$为正定矩阵。

正定矩阵有很多重要性质，现列举一二。

（1）定理：n阶对称矩阵$[A]$为正定的充要条件是，它的所有主子式均大于零。即

$$a_{11}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,$$

$$\cdots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0$$

这个定理的证明从略。

（2）推论：正定矩阵$[A]$的所有主对角线元素都大于零。

按定义我们采用反证法来证明这一点。假定$a_{22}\leqslant 0$，因为$[A]$是正定矩阵，故对于任意非零向量$\{x\}$，二次型

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j>0,$$

现取

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

即$x_1=x_3=x_4=\cdots=x_n=0$，$x_2=1$，将它们代入二次型式，得

$$F(x_1, x_2, \cdots x_n)=a_{22}\leqslant 0$$

从而产生矛盾，于是这个推论得到证明。

1-2 矩阵代数的基本运算

矩阵代数的基本运算是矩阵间的加法、减法、乘法、矩阵与数的乘法以及矩阵的转置等。由于矩阵并不代表一个数，而只是一些数构成的表格，因此矩阵的运算，与数的运算

有所不同，只能按规定的法则进行。下面扼要地介绍矩阵的一些基本运算法则，并着重指出矩阵运算与数值运算相异之处。

在讨论矩阵运算之前，首先说明什么叫矩阵的相等。两个矩阵，当行数、列数相同，且对应行列中的所有元素都各各相等时，叫做矩阵相等。因此，若两个$m\times n$矩阵$[A]$和$[B]$的元素分别为a_{ij}和b_{ij}，而

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)\tag{1-8}$$

则

$$[A]=[B]$$

反之，若两矩阵相等，则其对应行列中的元素也必各各相等，例如

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

则可得

$$x_{11}=-3;$$
$$x_{12}=1;$$
$$x_{21}=2;$$
$$x_{22}=-4$$

一、矩阵加法和减法

设有三个$m\times n$矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix};\quad [B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix};$$

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

若

$$\begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}\tag{1-9}$$

亦即

$$a_{ij}\pm b_{ij}=c_{ij}$$

则矩阵$[C]$称为矩阵$[A]$与矩阵$[B]$的和或差，记为

$$[A]\pm[B]=[C]$$

于是矩阵加减的法则为：矩阵的加或减就是对应的元素相加或相减，所得结果仍为一个行列数相同的矩阵。显然，相加、减的矩阵必须具有相同的行数和列数。

例 1-1 设有矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad [B]=\begin{bmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 7 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

则

$$[A]+[B]=\begin{bmatrix} 2-6 & 1+3 & 3+21 \\ -1+7 & 3+0 & 8-40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 6 & 3 & -32 \end{bmatrix}$$

矩阵的加减法具有下列性质：

1. $[A]+([B]+[C])=([A]+[B])+[C]$ （结合律）
2. $[A]+[B]=[B]+[A]$ （交换律）

这说明数值加法的结合律和交换律对矩阵加法也完全适用。

3. $[A]\pm[0]=[A]$

这说明零矩阵在矩阵的加减法中与数“零”在数值加减法中起类似的作用。

4. $[A]+(-[A])=[0]$
5. $[A]+(-[B])=[A]-[B]$

二、矩阵与数的乘法

数 k 与矩阵$[A]$的乘积，就是把矩阵$[A]$的所有元素都乘上 k 后所得出的矩阵。即：

$$k[A]=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

亦即

$$k[a_{ij}]=[k\,a_{ij}]$$

例 1-2

$$5\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\times2 & 5\times3 \\ 5\times7 & 5\times(-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 35 & -5 \end{bmatrix}$$

数 k 乘单位矩阵，得

$$k[I]=k\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$$

主对角线上各元素相同，均为数 k，这种矩阵称为**数量矩阵**。

矩阵与数的乘法，具有下列性质：

1. $1\times[A]=[A]$
2. $0\times[A]=[0]$

注意：等式左边的“0”是数值零，而右边的$[0]$则为零矩阵。

3. $\alpha(\beta[A])=\beta(\alpha[A])=(\alpha\beta)[A]$
4. $k\times[A]=[A]\times k$ （交换律）
5. $-[A]=(-1)[A]$

这说明某矩阵的负矩阵等于（-1）乘原矩阵。

6. $k([A]+[B])=k[A]+k[B]$ （分配律）
7. $(\alpha+\beta)[A]=\alpha[A]+\beta[A]$

三、矩阵乘法

设有一个$m\times n$矩阵$[A]$和一个$n\times p$矩阵$[B]$，即：

$$
[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

$$
[B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{np} \end{bmatrix}
$$

那么，当有另一个$m\times p$矩阵$[C]$，即：

$$
[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}
$$

而其中

$$
c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \qquad (1\text{-}10)
$$

$$
(\ 1\leqslant i\leqslant m,\ \ 1\leqslant j\leqslant p\ )
$$

$[C]$称为$[A]$与$[B]$的乘积，即矩阵$[C]$的第i行第j列上的元素，等于矩阵$[A]$的第i行各元素与矩阵$[B]$的第j列各对应元素，逐对相乘所得的乘积之和。这就是矩阵乘法的定义。按先$[A]$后$[B]$的次序，记为

$$
[A]\times[B]=[C]
$$

更明确些，或记为

$$
[A]_{m\times n}\times[B]_{n\times p}=[C]_{m\times p}
$$

注意：两个矩阵$[A]$和$[B]$，只有当第一个矩阵$[A]$的列数等于第二个矩阵$[B]$的行数时，才可以相乘，也就是说，此时它们的乘积$[A]\times[B]$才有意义。同时，我们可以看到，两个矩阵的乘积仍然是一个矩阵，其行数等于第一个矩阵$[A]$的行数，其列数等于第二个矩阵$[B]$的列数。

在矩阵乘法运算时，为了清晰起见，可排成如下形式。

$$
\begin{array}{rl}
 & [B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nj} & \end{bmatrix} \\
[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}\cdots\cdots & \begin{bmatrix} & & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & c_{ij} & \\ & & & & \end{bmatrix}=[C]
\end{array}
$$

式中矩阵[C]的元素c_{ij}，是矩阵[A]的第i行各元素乘上矩阵[B]的第j列各对应元素之代数和，其位置在矩阵[A]的第i行和矩阵[B]的第j列投影线的交点上。

例 1-3 设矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{bmatrix};\qquad [B]=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

则

$$[C]=[A]\times[B]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times0+0\times1+(-1)\times3+2\times(-1) & 1\times3+0\times2+(-1)\times1+2\times2 & 1\times4+0\times1+(-1)\times(-1)+2\times1\\ (-1)\times0+1\times1+3\times3+0\times(-1) & (-1)\times3+1\times2+3\times1+0\times2 & (-1)\times4+1\times1+3\times(-1)+0\times1\\ 0\times0+5\times1+(-1)\times3+4\times(-1) & 0\times3+5\times2+(-1)\times1+4\times2 & 0\times4+5\times1+(-1)\times(-1)+4\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & 6 & 7\\ 10 & 2 & -6\\ -2 & 17 & 10\end{bmatrix}$$

我们可以看到，乘积矩阵[C]各元素的位置为

$$[B]=\begin{bmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{bmatrix};\qquad \begin{bmatrix}-5 & 6 & 7\\ 10 & 2 & -6\\ -2 & 17 & 10\end{bmatrix}=[C]$$

由矩阵乘法的定义，即可看出，线性方程组（1-1）可以写成矩阵形式（1-5）。

关于矩阵的乘法，具有下列性质：

1. $\lambda([A][B])=(\lambda[A])[B]=[A](\lambda[B])$
2. $([A][B])[C]=[A]([B][C])$

这说明，数值乘法的结合律也适用于矩阵乘法。

3. $([A]+[B])[C]=[A][C]+[B][C]$

   $[C]([A]+[B])=[C][A]+[C][B]$

以上二式说明，数值乘法的分配律也适用于矩阵乘法。

4. $[A][I]=[A]$；$[I][B]=[B]$

这里的[I]是单位矩阵，[A]和[B]不必一定是方阵，但[A]的列数必须等于[I]的阶数，[B]的行数也必须等于[I]的阶数。由以上二式可见，单位矩阵[I]在矩阵乘法中所起的作用，相似于数“1”在数值乘法中所起的作用。

下列三个性质是矩阵运算与数的运算相异之处，要注意。

5. 矩阵的乘法，交换律一般不成立，也就是[A]×[B]一般并不等于[B]×[A]。

例如已知

$$[A]=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\quad ; \qquad [B]=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

则

$$[A][B]=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}$$

而

$$[B][A]=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$$

可见

$$[A][B]\neq[B][A]$$

因此，必须注意：在等式 $[A]=[C]$ 的两边乘上某矩阵 $[B]$ 时，应区分“左乘”或“右乘”，不能任意调换位置。

当两边左乘矩阵 $[B]$ 时，为

$$[B][A]=[B][C]$$

当两边右乘矩阵 $[B]$ 时，为

$$[A][B]=[C][B]$$

6.等式 $[A][B]=[0]$，一般不能断言必有 $[A]=[0]$ 或者 $[B]=[0]$。例如

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

这说明，虽然乘积是零矩阵，但相乘的两个矩阵都不是零矩阵。

7.等式 $[A][B]=[A][C]$，一般不能断言 $[B]=[C]$。例如

$$[A]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix};\quad [B]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix};\quad [C]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

则

$$[A][B]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$[A][C]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

由此可见，虽然 $[A][B]=[A][C]$，但 $[B]\neq[C]$。

8.在有限单元法中，常用虚功原理导出一些公式，在推导过程中要用到下面的一个定理：

设有 $m\times n$ 矩阵 $[A]$ 及两个 $n\times p$ 矩阵 $[B]$ 与 $[C]$，当 $[A]$ 的元素取任意数值时，等式

$$[A][B]=[A][C] \tag{1-11}$$

恒成立，则可断定 $[B]=[C]$。

必须注意，这里说[B]与[C]相等，是基于[A]的任意性。如果[A]并不是任意的（即它的元素并不能任意取值），就不能断定[B]=[C]。

四、矩阵的转置

把矩阵[A]的行与列依次互换，所得到的矩阵称为[A]的转置矩阵。更确切的定义如下：

设有$m\times n$矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

所谓[A]的转置，就是把[A]的行与列互换位置（保持行与列的元素次序不变）而得到的$n\times m$矩阵，记作$[A]^T$。即：

$$[A]^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-12}$$

或 $$[a_{ij}]^T=[a_{ji}]$$

转置矩阵的记号也有用$[A]'$表示的。

例 1-4 矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的转置矩阵为

$$[A]^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的转置，具有如下性质：

1.一个矩阵经两次转置，仍为原矩阵。即：

$$([A]^T)^T=[A] \tag{1-13}$$

2.对称方阵的转置矩阵，仍为原来的方阵。即：

$$[A]^T=[A] \tag{1-14}$$

3.反对称方阵的转置矩阵，为原矩阵的负矩阵。即：

$$[A]^T=-[A] \tag{1-15}$$

4.行矩阵的转置矩阵就是列矩阵；列矩阵的转置矩阵就是行矩阵。

5.若k为一个数，则

$$(k[A])^T=k[A]^T$$

6.任意两个矩阵之和的转置，等于各矩阵转置后之和。即：

$$([A]+[B])^T=[A]^T+[B]^T$$

7.两个给定的矩阵，它们乘积的转置矩阵，等于各转置矩阵的乘积，但先后次序相

反。即：

$$([A][B])^T=[B]^T[A]^T \tag{1-16}$$

推广成普遍式为：

$$([A][B][C]\cdots[Y][Z])^T=[Z]^T[Y]^T\cdots[C]^T[B]^T[A]^T \tag{1-17}$$

五、几种常用代数式的矩阵表达法

1.两因子乘积的代数和

$$c=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \tag{1-18}$$

的矩阵表达式为：

如取

$$[A]=[a_1\ a_2\cdots a_n] \qquad \text{（行矩阵形式）}$$

$$\{B\}=\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{Bmatrix} \qquad \text{（列矩阵形式）}$$

根据矩阵乘法可得

$$\underset{(1\times n)}{[A]}\underset{(n\times 1)}{\{B\}}=[a_1\ a_2\ \cdots a_n]\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{Bmatrix}=\underset{(1\times 1)}{[a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n]}=[C]$$

即式(1-18)写成矩阵表达式时，为

$$[C]=[a_1a_2\cdots a_n]\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{Bmatrix} \tag{1-19}$$

因此，两因子乘积代数和的矩阵表达式，总是以一个行矩阵右乘一个列矩阵来表示。为了便于记忆，可记作“行×列”。若所取矩阵形式不符合上述要求时，则将其形式变换一下以后再相乘。例如，若两个矩阵的形式都取列矩阵时，即

$$\{A\}=\begin{Bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{Bmatrix};\quad \{B\}=\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{Bmatrix}$$

将式（1-18）写成矩阵表达式，此时应写成

$$[C]=\{A\}^T\{B\}$$

或

$$[C]=\{B\}^T\{A\}$$

上述表达式，在计算外力作功时要用到。例如，某弹性体上作用着静荷载P_1，P_2，…