ELASTICITY

Theory and Applications

弹性力学——理论和应用

[美] H. 雷斯曼
P.S. 保利克

于天祺 译

华东化工学院出版社

弹性力学

——理论和应用

H.雷斯曼
P.S.保利克 著(美)
于天祺 译

华东化工学院出版社

内 容 简 介

本书采用张量体系编写，全面系统地阐述了弹性力学的基本理论。全书共分九章，前四章为基础理论，主要介绍笛卡儿张量、场论基础、应力张量、应变张量及弹性力学本构方程；第五章介绍弹性力学问题的经典解法；第六章为结构力学导论；第七章介绍弹性力学的变分原理，其中包括赫林格-莱斯纳(Hellinger-Reissner)变分原理；第八章为数值方法，其中包括近年内十分流行的加权余量法和有限元素法；第九章介绍初始受力固体的理论，从裴奥拉-克希霍夫(Piola-Kirchhoff)应力张量出发导出了弹性失稳理论问题的理性公式。每章后附有大量习题，可供练习。

本书可作为力学、数学、物理、机械、土木、航空、地质、工程科学等专业的研究生和大学高年级学生教材，也可作为大学教师和工程技术人员的参考书。

责任编辑：袁明辉
责任校对：巫　红

弹性力学—理论和应用
Tanxing Lixue—Lilun he Yingyong
H.雷斯曼
P.S.保利克　著
于天祺　译
华东化工学院出版社出版
(上海市梅陇路130号)
新华书店上海发行所发行
江苏句容排印厂排版
上海市群众印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 12.5 字数 336 千字
1989年6月第1版 1989年6月第1次印刷
印数 1-3000 册

ISBN 7-5628-0028-6/O·7　定价 2.95元

原　序

这是一本为初期阶段的研究生，或在特殊情况下为本科高年级大学生所用而编写的教科书。本教程适合于各种工程课程，诸如土木、机械、航空工程，或工程科学。我们相信本书也能对攻读物理和数学科学，例如地质或应用数学，希望扩大其知识面的学生有所俾益。前者可以用它锐化他们的分析工具和加深对真实世界的定量认识，而后者可以通过它完善自己，把纯数学应用到物理现象中去的能力。

对弹性理论作周密而完善的处理需要多卷著作，甚至可能要花毕生的精力去钻研。由于我们的意图是写一本篇幅不大的导论性的教程，故对课题需作精细选择。我们把选择建立在从事于工科学习的大多数学生在目前和不久将来的需要上。基本内容的处理是三维的，其中包括应力、应变、虎克(Hooke)定律以及连续介质力学中所必需的课题。我们希望这些内容的选择及处理方法将具有持久的价值。即对那些准备学习连续介质力学、波的传播、塑性理论、结构理论、粘性流体的流动等等的学生来说，在认真学习第一至第四章后可获得坚实的基础。鉴于读者在未来的工作中必须考虑弹性作用的适用范围以及与此有关的设计安全性问题，本书还涉及了某些关于(三维)失效理论的内容。有了第一至第四章场的整套基本方程，在第五章中我们专门讨论技术上有兴趣的三维和二维边值问题的"精确解"。至此，求解的方法是经典的和初等的，但它们清楚地表明了所包含的内容。我们有意省去了求解弹性理论边值问题中更复杂的方法，例如拉甫(Love)应变函数、伽辽金(Galerkin)矢量、复势、积分变换等等。这种省略决不意味着对这些方法缺乏赏识或重视。它们已被广泛地包含在大部分传统的弹性理论论著中，其中一些已列入本书所附的参考文献中。当学生掌握了第一至第五章的内容之后，应当鼓励他们逐渐熟悉一些上述的专门方法。

在第六章中我们对结构力学做了初步介绍，将之视为经典三维弹性理论的一个分支。工程类的学生在学习诸如固体力学、材料力学、结构分析和机械设计等课程的过程中已遇到过杆、梁、板等的(近似)理论。在这些课程中通常是从特定的假设出发来推导近似理论的。在第六章(以及其他地方)我们将证明如何从一般三维理论通过系统的简化得到这些熟知的数学模型。这些技巧还为建立尚为未知的其他专门理论指明了道路，这些专门理论也许是读者将来需要从事研究的。

第七章是弹性理论能量(变分)法的基本陈述。读者将发现变分原理在若干方面是有用的：(1)它们可用于推导场的平衡方程以及与之有关的容许的边界条件；(2)它们是弹性理论问题近似解的大量分析和数值解法的基本出发点。近似分析和直接数值法及其在弹性理论问题中的应用在第八章中介绍。其中我们还简单介绍了现代广泛应用的有限元素法。鉴于有现成的数字计算机可利用，此方法对问题的数值解法的发展比其他任何方法具有更大的新动力，而数值解法直到不久前还被认为是难以对付的。最后，在第九章中我们给出了初始受力固体的理论，而此课题直接导致了弹性失稳理论中心(线性)问题的理性表示法。细读一下多数现代的弹性理论教程可以发现它们对弹性失稳(或稳定)课题是避而不谈的。此外，查对一下大多数专门讨论弹性稳定理论的书籍将会发现，基本方程通常都是用直观的或特定的方法导出的。我们已采取这样的立场，即凡涉及弹性固体在应力作用下的稳定问题一定要在正式的三维弹性理论范围内予以解答，而此观点的基本体现包含在第九章中。

关于符号，我们认为如下的解释是适宜的。着手编写弹性理论书时一开始就有一个一定要回答的基本问题：应该采用什么符号呢？我们的课程的主要对象是张量(例如应力和应变)。一般曲线张量的课题是大多数工程师和其他物理科学家所不熟悉的，而且在学生能顺利地应用这一工具之前需要单独开课。无论如何，在本书中应用一般曲线张量将会把大多数想读本书的读者排除在

外；另一方面，选用传统的(标量)符号将使本书的篇幅增加到至少是现在的三倍。我们决定取"折衷"的办法。本书的大部分章节采用笛卡儿张量。此符号容易学，并且讲解起来所花课时不多(见第一章)。借助于这些符号，可把冗长乏味的代数计算变得容易，并且常常能使公式结构简单化。这些公式当用传统的标量符号展开时看起来就很庞杂。除此之外，学会熟练应用笛卡儿张量的学生，在阅读许多现代研究文献时会显得得心应手，这一优点是不容忽视的。我们始终如一地应用了SI单位，我们深信国际单位制是将来的度量体系。它几乎为全世界所承认，它的应用虽然还没有遍及全部地区，但却与日俱增。虽然如此，我们还是给出了对于旧单位制的换算关系，因为旧单位制仍旧有人在使用。

考虑到大多数教学计划已经课程过多，我们所写的书，其内容可安排在一或两学期之内教完。虽然书中穿插了一些例题，但仍要求学生去做附在每章后面的有意义的部分习题。习题在难度上是从平凡的计算到较小的但却是有用的研究命题。通过做习题，将能检验学生对教材的理解程度，并能使学生抓住每章所包含的重要思想和概念。

本书所介绍的大部分材料是经典的，因此我们感到并不需要介绍详细的参考文献或给出详尽的参考书目。鉴于正在进行之中的深入的研究，以及许多学者已经进行过的研究，对过去五十年间详尽的和关键的参考文献加以编辑也许需要单独成书。为此，我们希望书末简短的参考目录能满足要求，至于任何重要的遗漏请读者原谅。

近代弹性理论的基础内容是大约一百五十年前由A.L.哥西(A.L.Cauchy)和L.M.H.纳维叶(L.M.H.Navier)提供的。自那之后，它便为用许多数学方法以决定固体的变形、应力和应变打下了基础。哥西(Cauchy)的工作又可以作为近代连续介质力学的一个起点。它依然是现代技术中带有开创性研究课题的建立和解答的基础。希望本书有两方面的作用：(1)使年青的工程师和物理工作者熟悉弹性理论的基本概念和技能；(2)促使初学者自

已着手从事这一领域的研究。我们也相信引入大量例题和习题能使本书适合于自学。

在此我们衷心地感谢美国空军科学研究所的帮助。在拟订本书计划的过程中，该所提供了许多研究项目。此外，作者之一(H.R.)衷心感谢纽约州立大学布法罗分校在编写本书期间给予教休。卷首插图①的荣誉归于D.梅朗(Dennis Malone)博士和P.梅莱克(Philip Malyak)先生。他们的激光全息摄影专门技术协助进行了5.4中所得理论结果的实验验证。我们还感谢P.M.库尔考夫斯基(Paul.M.Culkowski)博士和孙云康(Yuen-Kuang Sun)先生为校对手稿而进行专门协助，并感谢G.莫朗斯基(Ginger Moronski)小姐和S.A.保利克(Sally A.Pawlik)夫人完美无瑕的打字工作。

H. 雷斯曼

P.S. 保利克

于布法罗，纽约

1980年6月

①译者注：卷首插图删去。

译 者 序

自1983年起，译者用H.雷斯曼（H.Reismann）和P.S.保利克(P.S.Pawlik)合著《弹性力学—理论和应用》作为固体力学硕士生的弹性力学教材，至今已连续使用五届。本译文的原稿曾印制成讲义在教学中使用，并征求意见。不少力学教师和研究生认为本书有以下优点：第一，从编写体系上看，本书用张量体系编写，与传统的以标量体系编写的弹性力学不同，这样就大大减少了教材的篇幅。不仅如此，由于张量方程形式的不变性，它更能反映物理定律不因坐标变换而改变的实质。弹性力学中的基本量如应力、应变等本身都是张量，用张量这一工具来描述也是很自然的。第二，近代力学著作和文献，如弹性力学、塑性力学、板壳理论、连续介质力学、断裂力学等大量使用张量分析，因此，掌握了张量分析这一工具后对看懂近代力学著作和文献是大有好处的。第三，本书取材新颖，内容紧凑，系统慎密，论证严谨，并且具有通用性强，适应面广的特点。它可供许多专业和各方面的人员使用。第四，本书理论与应用并重。在介绍理论之后，列举一定数量的例题，作为应用的示范。每章末附有大量习题可供读者选作。总之，雷斯曼(Reismann)和保利克(Pawlik)合著的这一本书是具有80年代弹性力学特点的好书。目前国内用张量体系编写的弹性力学教材，已经出版的还为数甚少，为此，特翻译出来以供参考。

本书可作为力学、数学、物理、机械、土木、航空、地质、工程科学等专业的研究生和大学高年级学生的教材，也可供大学教师和工程技术人员参考。

研究生李亦为在学习期间曾仔细地校对了全部译文，并提出了许多中肯的修改意见；陆钟瑞副教授担任全书的译审工作，对本书的翻译给予热情支持，在此一并致谢。最后感谢我的女儿在誊清手稿和整理插图等方面付出的辛勤劳动。

原书在印刷方面存在的个别错误已经予以改正。译文虽经多次使用和修改，但限于译者水平，错误和不当之处仍属难免，殷切希望同行和读者予以指正。

译者 1988年4月

目　　录

1　数学基础 ………………………………………… 1

1.1　求和约定 ………………………………………… 1

1.2　符号δ_{ij}和e_{ijk} ………………………………… 3

1.3　行列式 ………………………………………… 5

1.4　标量和矢量 ………………………………………… 8

1.5　坐标旋转 ………………………………………… 12

1.6　笛卡儿张量 ………………………………………… 15

1.7　张量代数 ………………………………………… 17

1.8　商定律 ………………………………………… 18

1.9　标量场和矢量场 ………………………………………… 19

1.10　正交曲线坐标 ………………………………………… 22

1.11　散度定理 ………………………………………… 31

2　应力 ………………………………………… 41

2.1　应力矢量的概念 ………………………………………… 41

2.2　平衡 ………………………………………… 42

2.3　应力张量的概念 ………………………………………… 46

2.4　主轴和主应力 ………………………………………… 47

2.5　例题 ………………………………………… 52

2.6　主剪应力 ………………………………………… 53

2.7　莫尔(Mohr)圆 ………………………………………… 55

2.8　八面体剪应力 ………………………………………… 61

2.9　应力偏量 ………………………………………… 63

2.10　曲线坐标 ………………………………………… 66

3　变形和应变 ………………………………………… 77

3.1　变形固体运动学 ………………………………………… 77

3.2　应变张量的概念 ………………………………………… 79

3.3　变形几何 ………………………………………… 84

3.4　微小应变 ………………………………………… 88

3.5　线性应变 ………………………………………… 92

3.6 刚体运动 …… 97
3.7 线性应变场的相容性 …… 99
3.8 曲线坐标 …… 103
4 弹性理论及其界限 …… 118
4.1 虎克 (Hooke) 定律和弹性张量 …… 118
4.2 各向同性 …… 119
4.3 弹性常数的物理解释 …… 123
4.4 拉伸试验 …… 126
4.5 屈服准则 …… 128
4.6 例题 …… 134
5 某些线弹性力学问题的描述和“精确”解 …… 141
5.1 在内压和外压作用下的球壳 …… 142
5.2 承受内压和外压的圆筒形壳(平面应变解) …… 145
5.3 棱柱形杆的扭转 …… 147
5.4 梁的纯弯曲 …… 162
5.5 横向载荷作用下的悬臂梁 …… 164
5.6 二维问题 …… 172
6 结构力学 …… 193
6.1 杆的拉伸或压缩 …… 194
6.2 杆的扭转 …… 198
6.3 铁木辛柯 (Timoshenko) 梁 …… 203
6.4 欧拉-伯努利 (Euler-Bernoulli) 梁 …… 211
6.5 平板理论 …… 214
6.6 经典平板理论 …… 223
7 能量原理 …… 236
7.1 应变能的概念 …… 236
7.2 功率方程 …… 242
7.3 梁和板中的应变能 …… 244
7.4 虚功原理 …… 247
7.5 虚功原理的应用 …… 249
7.6 最小势能定理 …… 255
7.7 余能的概念 …… 256
7.8 余虚功原理 …… 259

7.9 最小余能定理 …… 263
7.10 卡斯提里安诺 (Castigliano) 定理 …… 264
7.11 贝蒂 (Betti) 和瑞利 (Rayleigh) 互换定理 …… 267
7.12 克希霍夫 (Kirchhoff) 唯一性定理 …… 270
7.13 赫林格 (Hellinger) 和莱斯纳 (Reissner) 变分原理 …… 273
8 数值方法 …… 283
8.1 李兹(Ritz)法 …… 284
8.2 李兹(Ritz)法的应用 …… 287
8.3 康托洛维奇 (Kantorovich) 法 …… 301
8.4 加权余量法 …… 302
8.5 有限差分法 …… 307
8.6 有限元素法 …… 314
9 初始受力的固体-弹性失稳 …… 351
9.1 应变和变形 …… 352
9.2 应力和平衡 …… 354
9.3 初应力问题 …… 358
9.4 能量的研究 …… 360
9.5 初应力梁 …… 362
9.6 初应力板 …… 369
参考文献 (REFERENCES) …… 385

1 数学基础

为了便于简单明了地叙述弹性理论，我们将经常地使用在研究文献中通用的简写或缩写符号。此符号已被引入许多(但非全部)本科大学生的工程课程和纯理论以及应用科学课程。学习和掌握双角标符号和它的某些非常重要的结果所花费的时间，将在后面一般理论的推导过程中加倍地得到补偿。此符号表示法可提供一种洞察力和理解力，这对没有学过的人来说，得来并不是很容易的；符号表示法还可以导致节省篇幅，并且还有助于非数值性计算。本章连同后面的习题，其目的是使读者熟悉这种符号。此外，本章还包括笛卡儿张量理论初步和矢量代数、矢量分析及曲线坐标等方面的主要回顾和总结，所有这些内容在后续各章中是很有用的。

1.1 求和约定

我们经常遇到包含三个未知量的三个线性方程组，如

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz&=a,\\ Dx+Ey+Fz&=b,\\ Gx+Hy+Iz&=c。\end{aligned}\right\} \tag{1.1a}$$

其中x,y,z是未知量，而$A,B,\cdots,a,b,\cdots$是已知常数。读者将逐渐体会到有种种显而易见的理由，对(1.1a)采用一种更系统化的符号，将是方便的。为此，可以令$x=x_1,y=x_2,z=x_3,A=a_{11},B=a_{12}$，以此类推，并令$a=b_1,b=b_2,c=b_3$，因此(1.1a)可化为如下形式：

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3。\end{aligned}\right\}\tag{1.1b}$$

方程(1.1b)还可以写成如下形式：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i,\qquad i=1,2,3\tag{1.1c}$$

我们注意到(1.1b) 中的三个方程可以从 (1.1c) 规定其中的指标(下 标) i 之 值为 1， 2 和 3 而得到。进一步的符号压缩可 以 把(1.1c)写成：

$$\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_j=b_i,\qquad i=1,2,3\tag{1.1d}$$

其中符号 $\sum\limits_{j=1}^{3}$ 表示对重复的指标 j 求和。最后的符号简化是省去(1.1d)中的求和符号，而将其写成如下的形式：

$$a_{ij}x_j=b_i。\tag{1.1e}$$

我们注意到i在(1.1e)的每一项中只出现一次。i 称为自由 指 标。j是重复的，这种重复意味着在式(1.1e)中对 j 求和。 (1.1e)中的指标 j 称为求和指标。

求和约定的一般规则可表述如下：当一指标（下标）在 形 如 A_iB_i，C_{ii}或$\partial f_k/\partial x_k\equiv f_{k,k}$的表示式中重复出现时，此指标称为求和指标，而此表达式是三项之和，可通过在范围(1，2，3)内求和而得到。因此，我们有

$$\left.\begin{aligned}A_iB_i&\equiv A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3,\\C_{ii}&\equiv C_{11}+C_{22}+C_{33},\\\frac{\partial f_k}{\partial x_k}&\equiv\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\\&\equiv f_{k,k}\equiv f_{1,1}+f_{2,2}+f_{3,3}。\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

类似地，如果我们给出(1.1e)，则可将之对于(重复的)求和指标j展开，即，$a_{ij}x_j\equiv a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i$。逐次规定方程中的自由

指标 $i=1,2,3$ 可得到(1.1b),即它的完全展开形式。

求和约定只可用于式(1.2)中的三种形式。它不能应用到形如 (A_i+B_i) 的表示式中。还应指出，相同的求和指标在任何一个表示式中出现不能超过两次。因此，$A_iB_iC_i$ 这样的形式在我们的约定范围内是没有意义的。还要指出，在重复指标的情况下，应用的实际符号是无关紧要的。例如

$$A_iB_i\equiv A_kB_k\equiv A_jB_j,$$

$$C_{ii}\equiv C_{kk}\equiv C_{jj},$$

$$f_{i,i}\equiv f_{k,k}\equiv f_{j,j}。$$

从分析的角度看，常常是清楚的，下标 i,j 和 k 的范围，譬如是(1,2,3)。求和约定是A.爱因斯坦(A.Einstein)(1879～1955)引进的。此符号连同将要在1.6中讨论的张量概念一起，具有深远的影响而不仅是局限于求和上的方便。

1.2 符号 δ_{ij} 和 e_{ijk}

我们现在介绍一种符号工具，它使1.1中描述的重复下标求和约定更加方便。此工具称为克罗内克(Kronecker) delta(Leopold Kronecker,1823～1891)，其定义为

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 如果 i=j,\\ 0 & 如果 i\neq j。\end{cases}\tag{1.3a}$$

克罗内克(Kronecker)delta符号可以用如下的矩阵方程代替：

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}。\tag{1.3b}$$

今考虑表示式

$$\delta_{ij}A_i=\delta_{1j}A_1+\delta_{2j}A_2+\delta_{3j}A_3。$$

按照(1.3)，我们有

$$\delta_{ij}A_i=A_1\qquad 对于j=1,$$
$$\delta_{ij}A_i=A_2\qquad 对于j=2,$$
$$\delta_{ij}A_i=A_3\qquad 对于j=3。$$

由此可得结论：

$$\delta_{ij}A_i=A_j, \tag{1.4}$$

即，以δ_{ij}乘A_i和对重复下标i求和，结果是将A_i中的下标i被下标j取代。因此，δ_{ij}常称为代换算子。我们还注意到，根据求和约定，$\delta_{ii}=\delta_{11}+\delta_{22}+\delta_{33}=3$，而根据代换性质，$\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$。

另一个有用的工具是交错符号，其定义为

$$\left.\begin{aligned}&e_{ijk}=\frac{1}{2}(j-k)(k-i)(i-j),\\&i,j,k\text{不求和。}\end{aligned}\right\}\quad i,j,k=1,2,3。 \tag{1.5a}$$

在(1.5a)中用直接代入容易证明

$$e_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{如果}(i\ j\ k)=(1\ 2\ 3),(3\ 1\ 2),(2\ 3\ 1),\\ -1 & \text{如果}(i\ j\ k)=(3\ 2\ 1),(1\ 3\ 2),(2\ 1\ 3),\\ 0 & \text{如果二个或二个以上的下标相等。}\end{cases} \tag{1.5b}$$

鉴于(1.5b)常将e_{ijk}称为排列符号，因为只有(ijk)是(1 2 3)的排列，交错符号才不为零。交错符号也可以按如下方法表示成克罗内克(Kronecker)delta数组的行列式：

$$e_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_{i1}&\delta_{i2}&\delta_{i3}\\\delta_{j1}&\delta_{j2}&\delta_{j3}\\\delta_{k1}&\delta_{k2}&\delta_{k3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\delta_{i1}&\delta_{j1}&\delta_{k1}\\\delta_{i2}&\delta_{j2}&\delta_{k2}\\\delta_{i3}&\delta_{j3}&\delta_{k3}\end{vmatrix}。 \tag{1.6}$$

(1.5)和(1.6)的等价性，可以将(1.6)中的行列式展开而迅速得到证实(见习题(1-8))。例如，在$(ijk)=(3\ 1\ 2)$的情况下，

$$e_{312}=1=\begin{vmatrix}\delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\\\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1。$$

关于排列符号和克罗内克(Kronecker)delta之间，一个方便

而有用的恒等式，可以将(1.6)应用于下列乘积而得到：

$$e_{ijk}\,e_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\delta_{p1} & \delta_{q1} & \delta_{r1}\\ \delta_{p2} & \delta_{q2} & \delta_{r2}\\ \delta_{p3} & \delta_{q3} & \delta_{r3}\end{vmatrix}。$$

如果按通常的行和列相乘，并注意到(1.4)，则

$\delta_{i1}\delta_{p1}+\delta_{i2}\delta_{p2}+\delta_{i3}\delta_{p3}=\delta_{il}\delta_{pl}=\delta_{ip}$，以此类推，我们得到

$$e_{ijk}\,e_{pqr}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr}\end{vmatrix}。\qquad (1.7)$$

如果将行列式的任何两行或两列交换，则其符号将变号。因此，参照(1.6)，可以看出

$$e_{ijk}=-e_{jik}=-e_{ikj}=-e_{kji}。\qquad (1.8a)$$

行与列的第二次交换，将使符号再一次变号，应用(1.8a)我们得到

$$e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}。\qquad (1.8b)$$

根据(1.8a)，我们可以说e_{ijk}对于任何两个下标的交换是反对称的。如果我们令(1.7)中的$k=p$，且将得到的行列式展开，则借助于(1.4)容易证明

$$e_{ijk}\,e_{kqr}=\begin{vmatrix}\delta_{iq} & \delta_{ir}\\ \delta_{jq} & \delta_{jr}\end{vmatrix}=\delta_{iq}\delta_{jr}-\delta_{ir}\delta_{jq}。\qquad (1.9)$$

另一个有用的恒等式，可以令(1.9)中的$q=j$，并依次进行求和运算而得到。其结果是$e_{ijk}e_{kjr}=-2\,\delta_{ir}$，或应用(1.8)，有

$$e_{ijk}\,e_{rjk}=2\,\delta_{ir}。\qquad (1.10)$$

最后，如果令(1.10)中的$r=i$，并进行所需的求和运算，我们得到

$$e_{ijk}\,e_{ijk}=6。\qquad (1.11)$$

1.3 行列式

为了论证克罗内克 (Kronecker) delta和交错符号连同求和