流体力学

LIUTI LIXUE

■张亮 李云波 编

哈尔滨工程大学出版社

流体力学

张 亮
李云波 编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

流体力学/张亮,李云波编 .—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2001.3
ISBN 7-81073-095-9

Ⅰ.流...　Ⅱ.①张...②李...　Ⅲ.流体力学
Ⅳ.O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 00050 号

内 容 简 介

本书系统地讲述以水为代表的不可压缩流体力学的基本理论。全书共分十章。主要内容有:预备知识(场论),流体的物理性质及作用力,流体静力学,流体运动学,流体动力学基本定理及其应用,势流理论,水波理论,粘性流体动力学(包括层流、湍流、圆管内的湍流),相似理论,边界层理论,机翼及其气动特性。

本书各章均有一定数量的例题和习题,便于读者复习和自学。

本书可作为高等学校船舶与海洋工程专业及相近专业本科生流体力学课程的教材,也可作为从事上述专业科技人员的参考书。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328　邮编:150001
新　华　书　店　经　销
黑 龙 江 省 教 委 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787mm×1 092mm　1/16　印张 14.5 字数 329 千字
2001 年 6 月第 1 版　2001 年 6 月第 1 次印刷
印数:1~1 000 册
定价:18.00 元

前 言

本书是为船舶与海洋工程专业本科生编写的流体力学课程教材。基于专业实际需要，书中限于讨论不可压缩流体。

流体力学是船舶与海洋工程专业的一门重要专业基础课程，它在专业培养目标中起到“承上启下”的桥梁作用。“承上”指本课程联系了已经学过的基础数学、工程数学、物理学和力学等；“启下”指本课程几乎联系了所有与船舶原理及海洋结构物水动力性能有关的后续专业课程。通过本课程的学习，如果学生既能巩固或较熟练地运用基础数理知识，又能为后续专业课程的学习打下良好的流体力学基础，也就达到了本课程的学习目的。作者从多年的教学实践中了解到，学生普遍反映这门课程的内容多、概念抽象、理论性强，部分学生尤其对基本理论的应用感到困惑。因此作者深深感到，要想使学生学好流体力学这门课程，有一本深入浅出、物理概念清晰的教材是至关重要的。

本书是在作者多年使用的流体力学讲稿的基础上编写而成的。书中注重以下几个方面：基本概念突出，公式推导简洁明了，内容安排由浅入深，具有启发性。全书既保持流体力学自身的完整性和系统性，又要尽可能反映近年来流体力学发展的新概念以及在船舶与海洋工程领域的应用。书中将场论作为补充知识单列一章，以利于读者应用矢量及场论的数学知识推导或表达流体力学基本方程和公式。

本书的第 0、3、4、5 章及习题由李云波编写，第 1、2、8 章由李凤来编写，第 6、7、9 章由张亮编写，全书最后由张亮统稿。本书初稿 word 文本及部分插图由研究生张桂湘、程丽等同学完成。在本书编写过程中，清华大学贺五洲教授曾给我们以热情鼓励，在内容安排及取舍等方面提出了许多宝贵意见。另外，船舶原理与流体力学教研室的同事们曾给我们以极大的支持。作者在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，教学经验不足，加以编写时间紧迫，书中一定会有不妥之处或错误，望广大读者给以批评指正。

编 者

2001 年 3 月

目　录

第0章 预备知识(场论)

场论是流体力学的数学基础,因此,我们在本章将简明扼要地介绍流体力学中常用的场论知识,便于读者学习中应用。

0.1 标量、向量、张量及场的概念

0.1.1 标量、向量、张量及场的概念

物理量按其空间维数可分为标量、向量与张量。标量只有大小没有方向,只需一个数量及单位即可表示,如流体的温度 $T = T(\boldsymbol{r},t)$、密度 $\rho = \rho(\boldsymbol{r},t)$ 等是标量。这里 $\boldsymbol{r}$ 是空间点位置,t 是时间变量。向量也称为矢量,它既有大小又有方向,可由某一空间坐标系的三个坐标分量来表示,如流体的速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$、加速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t)$ 等是向量。本书中向量用黑体字表示。三维空间中的二阶张量必须由九个分量才能完整地表示,如流体中一点的应力 $P = P(\boldsymbol{r},t)$、变形速率 $\varepsilon = \varepsilon(\boldsymbol{r},t)$ 等是二阶张量。在三维空间中由 3^n 个分量来表示的量称为 n 阶张量,n 为阶数。从张量的概念来讲,标量是零阶张量($n = 0$),向量是一阶张量($n = 1$)。

如果在全部空间或部分空间的每一点都对应某物理量的一个确定值,就说在这个空间里确定了该物理量的一个"场"。也就是说,场是具有物理量的空间。如果这个物理量是标量,就称这个场为标量场,如温度场、密度场等。如果这个物理量是向量,就称为向量场,如速度场、加速度场等。如果这个物理量是张量,就称为张量场,如应力场、应变场等。

场和函数相对应。标量场对应标量函数,向量场对应向量函数,而张量场对应张量函数。场的研究方法是将物理量作为空间点位置 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t 的函数,t 作为参变量处理,即分析 t 时刻场的情况。不讨论各种场具体的物理意义,而从数学上研究场的一般规律的学科称为"场论"。

0.1.2 场的几何描述

(1) 标量场的等值面

在场中 t 时刻,由标量 $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ 数值相同的点所组成的曲面称为等值面,即

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = c(t) \quad \text{(同一等值面上为常数)} \tag{0.1.1}$$

$c(t)$ 取不同值对应于不同的等值面,如图0.1.1所示。等值面直观地表示了标量在场中的分布情况。

(2) 向量场的向量线

向量线是这样的曲线,它上面每一点处曲线都与对应于该点的向量 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ 相切。若向量线上任意一点 M 的位置用矢径 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$(即图0.1.2中 $\overline{OM}$)表示,根据向量线的定义,矢径微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$ 方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,即

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = 0 \tag{0.1.2}$$

这就是向量线的微分方程。在直角坐标系中上式表示为

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} \tag{0.1.3}$$

解此方程得向量线族。向量线族直观地描述了向量在场中的分布情况。

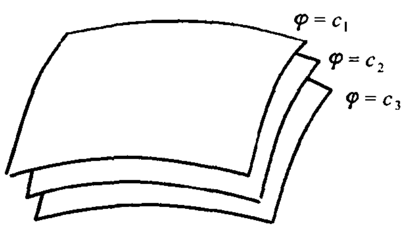

图 0.1.1　等值面

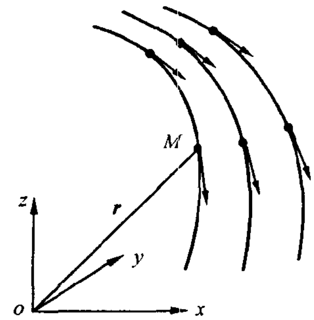

图 0.1.2　向量线

在 $\boldsymbol{a}$ 不为零的情况下，当 a_x, a_y, a_z 单值连续且有一阶连续偏导数时，向量线连续分布于向量场所在的空间，而且互不相交，如图 0.1.2 所示。如果向量 $\boldsymbol{a}$ 为流体的流速$\boldsymbol{v}$，向量线就是流线。

0.2　向量及张量的基本运算

0.2.1　向量运算符号规定

(1) 爱因斯坦(Einstein) 求和符号

在数学式子中出现的一对符号相同的指标，称为爱因斯坦求和符号，它是哑指标，表示求和。例如

$$a_i\boldsymbol{e}_i = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a} \tag{0.2.1}$$

式中 $a_i, \boldsymbol{e}_i$ 分别是向量$\boldsymbol{a}$ 在正交坐标系中的坐标轴分量和坐标轴单位向量。又如

$$k_1 a_i b_i + k_2 \boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_j = k_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + 3k_2$$

(2) 克罗内克(Kronecker)δ 符号

任意两个正交坐标轴单位向量的点积用 δ_{ij} 表示，称为克罗内克 δ，即

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1,2,3) \tag{0.2.2}$$

式中 i, j 是自由指标，δ_{ij} 可写作

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

(3) 置换符号

任意两个正交坐标轴单位向量的叉积可表示为

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{0.2.3}$$

式中 ε_{ijk} 称为置换符号,也称利奇(Ricci)符号,其数值如下

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & i,j,k \text{ 中有2个或3个自由指标值相同} \\ 1 & i,j,k = 123,231,\cdots,\text{偶次置换} \\ -1 & i,j,k = 123,321,\cdots,\text{奇次置换} \end{cases} \tag{0.2.4}$$

即 $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$,其余分量为零。由此可知,$\varepsilon_{ijk}$ 中任意两个自由指标对换后,对应的分量值相差一个负号,如 $\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{123}$,故 ε_{ijk} 称为置换符号。

置换符号 ε_{ijk} 和δ 符号之间有如下关系

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{0.2.5}$$

0.2.2 向量运算的常用公式

(1) $\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e}_i \pm b_i\boldsymbol{e}_i = (a_i \pm b_i)\boldsymbol{e}_i$

(2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e}_i \cdot b_j\boldsymbol{e}_j = a_ib_j\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = a_ib_j\delta_{ij} = a_ib_i$

(3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_i\boldsymbol{e}_i \times b_j\boldsymbol{e}_j = a_ib_j\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = a_ib_j\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

(4) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$

(5) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$

(6) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})$

0.2.3 向量分量的坐标转换

下面讨论某一直角坐标系旋转至一新的方位时坐标轴单位向量及向量分量之间的转换关系。因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标系无关,因此

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i = a'_i\boldsymbol{e}'_i \tag{0.2.6}$$

其中 $\boldsymbol{e}'_i, a'_i$ 和$\boldsymbol{e}_i, a_i$ 分别是新老直角坐标系中坐标轴的单位向量和坐标分量,如图 0.2.1 所示。显然有

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$(i,j = 1,2,3) \tag{0.2.7}$$

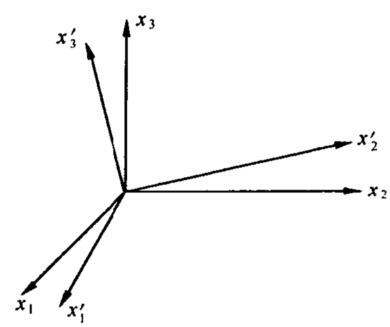

图 0.2.1 坐标系

且新老两坐标系单位向量之间存在下列关系

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= \alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{12}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{13}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 &= \alpha_{21}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{23}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 &= \alpha_{31}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_2 + \alpha_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}\right\} \tag{0.2.8a}$$

其中 $\alpha_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ 是两坐标系不同坐标轴间夹角的余弦。式(0.2.8a)可用表 0.1 直观地表示,或简写为

$$\boldsymbol{e}'_i = a_{ij}\boldsymbol{e}_j, \quad \boldsymbol{e}_i = a_{ji}\boldsymbol{e}'_j \quad (i,j = 1,2,3) \tag{0.2.8b}$$

将式(0.2.8a)或表 0.1 代入式(0.2.7),可以得到如下六个关系式

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22}+\alpha_{31}\alpha_{32}&=0\\ \alpha_{12}\alpha_{13}+\alpha_{22}\alpha_{23}+\alpha_{32}\alpha_{33}&=0\\ \alpha_{13}\alpha_{11}+\alpha_{23}\alpha_{21}+\alpha_{33}\alpha_{31}&=0\\ \alpha_{11}^2+\alpha_{21}^2+\alpha_{31}^2&=1\\ \alpha_{12}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{32}^2&=1\\ \alpha_{13}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{33}^2&=1 \end{aligned}\right\} \qquad (0.2.9)$$

表 0.1　坐标轴间方向余弦

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\boldsymbol{e}'_1$	α_{11}	α_{12}	α_{13}
$\boldsymbol{e}'_2$	α_{21}	α_{22}	α_{23}
$\boldsymbol{e}'_3$	α_{31}	α_{32}	α_{33}

或简写为

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik}=\delta_{jk} \qquad (0.2.10)$$

利用坐标系单位向量之间的转换关系式(0.2.8),可得两坐标系中向量分量之间的转换关系

$$\left.\begin{aligned} a'_i&=a_i(\boldsymbol{e}'_j\cdot\boldsymbol{e}_i)=a_i\alpha_{ji}\\ a_i&=a'_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}'_j)=a'_i\alpha_{ij} \end{aligned}\right\}\ (i,j=1,2,3) \qquad (0.2.11)$$

0.2.4　二阶张量及其基本运算

力学中最常用的张量是二阶张量。二阶张量就是两个向量的并积,可表示为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{ac}=a_i\boldsymbol{e}_ic_j\boldsymbol{e}_j=a_ic_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=b_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \quad (i,j=1,2,3) \qquad (0.2.12a)$$

式中 b_{ij} 是二阶张量在坐标轴单位向量为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的正交坐标系中的九个分量(也称为元素),通常用矩阵的形式可写成

$$\boldsymbol{b}_{ij}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad (0.2.12b)$$

$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ 是二阶张量的基,其分量也有九个。注意 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\neq\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i$。

若二阶张量的下标 i,j 互换后所代表的分量不变,即 $b_{ij}=b_{ji}$,称为二阶对称张量。这时各元素关于主对角线对称,因而只有六个独立的分量。若二阶张量的分量满足关系 $b_{ij}=-b_{ji}$,则称为二阶反对称张量。这时主对角线上各分量为零,因而只有三个独立的分量。任意一个二阶张量均可以唯一地分解为一个二阶对称张量和一个二阶反对称张量,即

$$b_{ij}=\frac{1}{2}(b_{ij}+b_{ji})+\frac{1}{2}(b_{ij}-b_{ji}) \qquad (0.2.12c)$$

等式右边第一项为对称张量,第二项为反对称张量。

(1) 二阶张量及其基本运算规则

① $\boldsymbol{ab}\pm\boldsymbol{cd}=(a_ib_j\pm c_id_j)\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$

② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{bc}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})$

③ $\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{cd}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{ad}=\boldsymbol{ad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})$

④ $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{ab}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$

⑤ $\boldsymbol{ab}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

(2) 二阶张量的坐标变换

按张量定义

$$B = b_{ij}e_ie_j = b'_{ij}e'_ie'_j \tag{0.2.13}$$

式中 b_{ij} 与 b'_{ij} 分别是对应于新旧两个坐标系中的张量分量。利用坐标系单位向量之间的转换关系式(0.2.8)可得对应的坐标变换关系

$$b'_{kl} = e'_k \cdot (b_{ij}e_ie_j) \cdot e'_l = b_{ij}(e'_k \cdot e_i)(e'_l \cdot e_j) = b_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{lj} \quad (k, l = 1,2,3) \tag{0.2.14}$$

$$b_{ij} = e_i \cdot (b'_{kl}e'_ke'_l) \cdot e_j = b'_{kl}(e_i \cdot e'_k)(e_j \cdot e'_l) = b'_{kl}\alpha_{ik}\alpha_{jl} \quad (i, j = 1,2,3) \tag{0.2.15}$$

例如

$$\begin{aligned} b'_{12} = {} & b_{11}\alpha_{11}\alpha_{21} + b_{12}\alpha_{21}\alpha_{22} + b_{13}\alpha_{11}\alpha_{23} + b_{21}\alpha_{12}\alpha_{21} + b_{22}\alpha_{12}\alpha_{22} + b_{23}\alpha_{12}\alpha_{23} \\ & + b_{31}\alpha_{13}\alpha_{21} + b_{32}\alpha_{13}\alpha_{22} + b_{33}\alpha_{13}\alpha_{23} \end{aligned}$$

0.3 标量场的方向导数和梯度

0.3.1 方向导数

过标量场 φ 内任一点 M_0 作一射线 l，在 l 上取一邻近 M_0 的动点 M（见图0.3.1），记 $\overline{M_0M} = \rho$，若极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{\overline{M_0M}}$ 存在，称其为标量 φ 在 M_0 点处沿方向的方向导数，记作 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{M_0}$。方向导数在直角坐标系中表示为

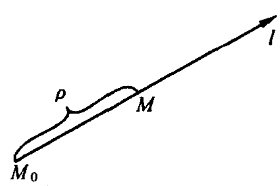

图0.3.1

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma \tag{0.3.1}$$

其中 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ 为函数 φ 在 M_0 点的偏导数，$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为射线 l 的方向余弦，相应于 l 的单位向量 $\boldsymbol{e}_l = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$。

0.3.2 梯度

(1) 梯度的定义

梯度是这样的向量，它的值为最大方向导数值，其方向为最大方向导数所对应的方向。

由式(0.3.1)知

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \cdot (\cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k})$$

令

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

则

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{e}_l = |\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{e}_l)$$

由上式可见,当 $\boldsymbol{e}_l$ 和向量$\boldsymbol{G}$ 的方向一致时,$\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{e}_l)=1$,方向导数取得最大值$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=|\boldsymbol{G}|$。可见,向量 $\boldsymbol{G}$ 就是函数 φ 在给定点的梯度,记作

$$\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\nabla\varphi \tag{0.3.2}$$

其中 $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 称为哈密尔顿(Hamilton)算子,读作 Nabla。

顺便指出,哈密尔顿算子具有微分和向量的双重运算性质,它适用于任意正交坐标系,但在不同坐标系中表达形式不同。因为推导公式或证明恒等式时常常在直角坐标系中更为简便,所以哈密尔顿算子在直角坐标系中的表达式最为常用。

(2) 梯度的性质

① 梯度 $\nabla\varphi$ 在某一方向 $\boldsymbol{e}_l$ 上的投影,等于标量?在该方向上的方向导数,即

$$\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{e}_l=\frac{\partial\varphi}{\partial l} \tag{0.3.3}$$

上式表明,由梯度可以知道物理量 φ 沿$\boldsymbol{e}_l$ 方向经过 $\mathrm{d}l$ 距离的增量,即 $\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=d\varphi$,这里 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}l\boldsymbol{e}_l$。

② 梯度 $\nabla\varphi$ 垂直于标量φ 的等值面,且指向 φ 增大的方向。若 $\boldsymbol{n}$ 表示φ 的等值面法向单位向量且指向 φ 增大的方向,$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 表示φ 沿$\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数,则有 $\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}=|\nabla\varphi|\boldsymbol{n}$。这表明由梯度可以求得等值面的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\pm\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}$。

(3) 梯度运算的基本公式

① $\nabla c=0$ (c 为常数)

② $\nabla(c\varphi)=c\nabla\varphi$ (c 为常数)

③ $\nabla(\varphi\pm\psi)=\nabla\varphi\pm\nabla\psi$

④ $\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$

⑤ $\nabla f(\varphi)=f'(\varphi)\nabla\varphi$

需要指出,当哈密尔顿算子作用于一个向量 $\boldsymbol{a}$ 时,即 ∇a,称为向量的梯度,此时它是一个二阶张量。

0.4 向量场的通量和散度

0.4.1 通量

在向量场 $\boldsymbol{a}$ 中任取一有向曲面S,$\boldsymbol{n}$ 为曲面S 的法向量,如图 0.4.1 所示,则曲面积分

$$Q=\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}s=\iint_S\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\iint_S a_n\mathrm{d}s \tag{0.4.1}$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 通过曲面S 的通量。流体力学中常用的通量是流量,这时 $\boldsymbol{a}$ 代表流速$\boldsymbol{v}$ 。

0.4.2 散度

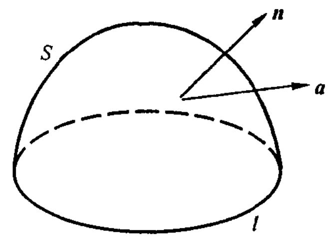

图 0.4.1 通量

在向量场 $\boldsymbol{a}$ 中任一点 M 的邻域内作一包含该点的任意封闭曲面 ΔS，设其外法向量为 $\boldsymbol{n}$，包围的空间体积为 ΔV，如图 0.4.2 所示。当 ΔS 以任意方式缩向 M 点时，若极限 $\lim\limits_{\Delta s \to M} \oiint\limits_{\Delta S} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} / \Delta V$ 存在，称其为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点的散度，记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$。散度在直角坐标系中表示为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{a} \qquad (0.4.2)$$

由定义可知，散度是一个标量，它表示单位体积内物理量通过其表面的通量。若 $\mathrm{div}\boldsymbol{a} > 0$，表示物理量在该点向外散发，称该点有源；若 $\mathrm{div}\boldsymbol{a} < 0$，表示物理量在该点向内吸收，称该点有汇。$|\mathrm{div}\boldsymbol{a}|$ 称为源或汇的强度。若物理量的散度处处为零，称该物理量的场为无源场，否则为有源场。

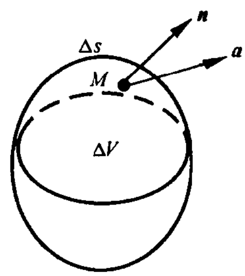

图 0.4.2 散度

0.4.3 散度的基本运算公式

① $\nabla(c\boldsymbol{a}) = c\nabla \cdot \boldsymbol{a}$ （c 为常数）

② $\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}) = \nabla \cdot \boldsymbol{a} \pm \nabla \boldsymbol{b}$

③ $\nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi\nabla \cdot \boldsymbol{a} + \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{a}$ （φ 为标量）

0.5 向量场的环量和旋度

0.5.1 环量

在向量场 $\boldsymbol{a}$ 中任取一有向封闭曲线 l，则曲线积分

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \qquad (0.5.1)$$

称为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿曲线 l 的环量。

0.5.2 旋度

(1) 旋度的定义

首先给出环量面密度的定义。在向量场 $\boldsymbol{a}$ 中任取一点 M，过 M 点作任意方向 $\boldsymbol{n}$，再以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量作一微元面积 Δs，设其边界线为 Δl，如图0.5.1 所示。当 ΔS 以任意方式缩向 M 点时，若极限 $\lim\limits_{\Delta s \to M} \oint\limits_{\Delta l} \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} / \Delta s$ 存在，称其为向量 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 处沿 n 方向的环量面密度，记作 μ_n。由于 $\boldsymbol{n}$ 具有任意性，过 M 点有无穷多个环量面密度值。

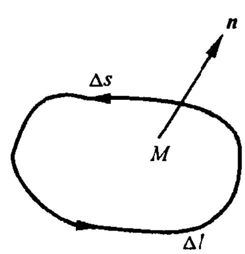

图 0.5.1 环量面密度

旋度是这样的向量,它的值为环量面密度的最大值,它的方向为最大环量面密度所对应的方向,记作 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$。依定义,有 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=\lim\limits_{\Delta s\to M}[\oint_{\Delta l}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}]/\Delta s=\mu_n$。这里 ∇l 是可缩闭曲线,它的方向与 $\boldsymbol{n}$ 满足右手螺旋法则。旋度在直角坐标系中表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{a} \tag{0.5.2}$$

(2) 无旋场的性质

若场中向量 $\boldsymbol{a}$ 的旋度处处为零,则称向量场 $\boldsymbol{a}$ 为无旋场,否则为有旋场。无旋场具有如下两个性质

① 无旋场必为有势场

无旋场 $\boldsymbol{a}$ 满足 $\nabla\times\boldsymbol{a}=0$,则必存在一个标量函数,有

$$\boldsymbol{a}=\nabla\varphi \tag{0.5.3}$$

φ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的势函数。势函数 φ 可由上式两边点乘 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$ 后积分得到

$$\varphi=\int_l\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=\int_l a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z \tag{0.5.4}$$

此积分与路径无关。反之,有势场必为无旋,即 $\nabla\varphi=\boldsymbol{a}\Rightarrow\nabla\times\boldsymbol{a}=0$。

② 无源无旋的向量场是调和场

若向量 $\boldsymbol{a}$ 处处无旋,由性质①可知存在势函数 φ,且 $\boldsymbol{a}=\nabla\varphi$。如果 $\boldsymbol{a}$ 同时无源,即 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}=0$,则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\nabla\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\nabla^2\varphi=0 \tag{0.5.5}$$

其中 $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯(Laplace)算子,读作 Laplacian。方程 $\nabla^2\varphi=0$ 叫做拉普拉斯方程。这时向量场 $\boldsymbol{a}$ 称为调和场,相应的势函数 φ 是个调和函数。满足拉普拉斯方程而且具有二阶连续偏导数的函数称为调和函数。

(3) 旋度运算基本公式

① $\nabla\times(c\boldsymbol{a})=c\nabla\times\boldsymbol{a}$　(c 为常数)

② $\nabla\times(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}\pm\nabla\times\boldsymbol{b}$

③ $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{a}$　(φ 为标量)

④ $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$

⑤ $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$

⑥ $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$

0.6 高斯公式及斯托克斯公式

0.6.1 高斯(Gauss)公式

设 V 为一封闭表面 S 所包围的体积,$\boldsymbol{n}$ 为表面 S 的单位外法线向量,如图 0.6.1 所示,若物理量 $\boldsymbol{a}$ 或 φ 在 $V+S$ 上一阶偏导数连续,则有高斯公式

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}s \tag{0.6.1}$$

将上式推广,有广义的高斯公式

$$\iiint_V \nabla \varphi \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{n}\varphi\ \mathrm{d}s \tag{0.6.2}$$

$$\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{a} \mathrm{d}V = \oiint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}\ \mathrm{d}s \tag{0.6.3}$$

(广义)高斯公式将体积分和面积分联系起来,可实现体积分和面积分之间的相互转换,在流体力学中有广泛的应用。

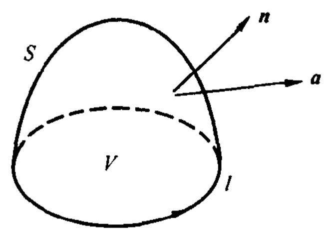

图 0.6.1

0.6.2 斯托克斯(Stokes)公式

若 l 为曲面 S 的边界线,且为可缩曲线,向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $S+l$ 上一阶偏导数连续,则

$$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \oint_l \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{0.6.4}$$

称为斯托克公式。式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量,方向与积分周线 l 的方向符合右手螺旋法则,如图 0.6.1 所示。可见,斯托克公式可以实现面积分和线积分之间的相互转换。

0.7 哈密尔顿算子、梯度、散度、旋度和调和量在正交曲线坐标系中的表示式

梯度、散度、旋度及调和量的定义与坐标系无关。前面已给出了它们在直角坐标系中的表示形式,但是在许多问题中往往选择正交曲线坐标系中求解更为方便,下面它们在正交曲线系中的表示形式。

0.7.1 正交曲线坐标系

在曲线坐标系(q_1,q_2,q_3)中,若空间任意一点 M 处的坐标曲线都相互正交(即各坐标曲线在该点的切线相互正交),相应地各坐标曲面也相互正交(即各坐标曲面在该点的法线相互正交),如图 0.7.1 所示,这种坐标系称为正交曲线坐标系。柱坐标系和球坐标系是常见的正交

曲线坐标系。

在正交曲线坐标系中任意向量表示为

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \tag{0.7.1}$$

其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为坐标轴单位向量，a_1,a_2,a_3 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 方向上的坐标轴分量。

这里要注意 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 和直角坐标系坐标轴单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 之间的区别。$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 随点 M 的变化而变化的，它是曲线坐标 (q_1,q_2,q_3) 的函数，即 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1(q_1,q_2,q_3)$，$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2(q_1,q_2,q_3)$，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3(q_1,q_2,q_3)$，而 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是常矢。

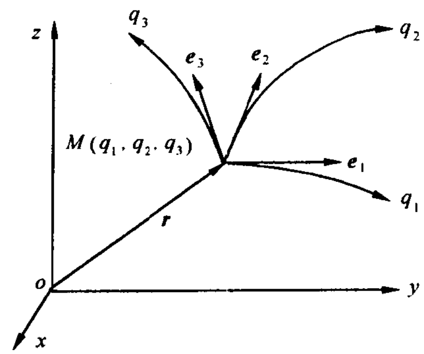

图 0.7.1　正交曲线坐标系

0.7.2　正交曲线坐标系中的弧微分和拉梅系数

我们知道，直角坐标系中任意空间曲线的弧微分 ds 为

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{0.7.2}$$

若曲线坐标 (q_1,q_2,q_3) 和直角坐标 (x,y,z) 之间的函数为

$$q_1 = q_1(x,y,z),\ q_2 = q_2(x,y,z),\ q_3 = q_3(x,y,z)$$

反函数

$$x = x(q_1,q_2,q_3),\ y = y(q_1,q_2,q_3),\ z = z(q_1,q_2,q_3)$$

则

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3 \tag{0.7.3a}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3 \tag{0.7.3b}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \tag{0.7.3c}$$

将(0.7.3)式代入(0.7.2)式可得由曲线坐标 (q_1,q_2,q_3) 表示的弧微分 ds。

特别地，当 ds 为坐标曲线 q_1 上的微分弧长 ds_1 时，因坐标曲线 q_1 上只有 q_1 变化，而 q_2，q_3 不变，即 $dq_2 = dq_3 = 0$，这时式(0.7.3)简化为

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1,\ dy = \frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1,\ dz = \frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1 \tag{0.7.4}$$

将(0.7.4)式代入(0.7.2)式得坐标曲线 q_1 上的微分弧长 ds_1

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\,dq_1 \tag{0.7.5a}$$

类似地，得坐标曲线 q_2,q_3 上的微分弧长 ds_2,ds_3 为

$$ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}\,dq_2 \tag{0.7.5b}$$

$$ds_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}\,dq_3 \tag{0.7.5c}$$