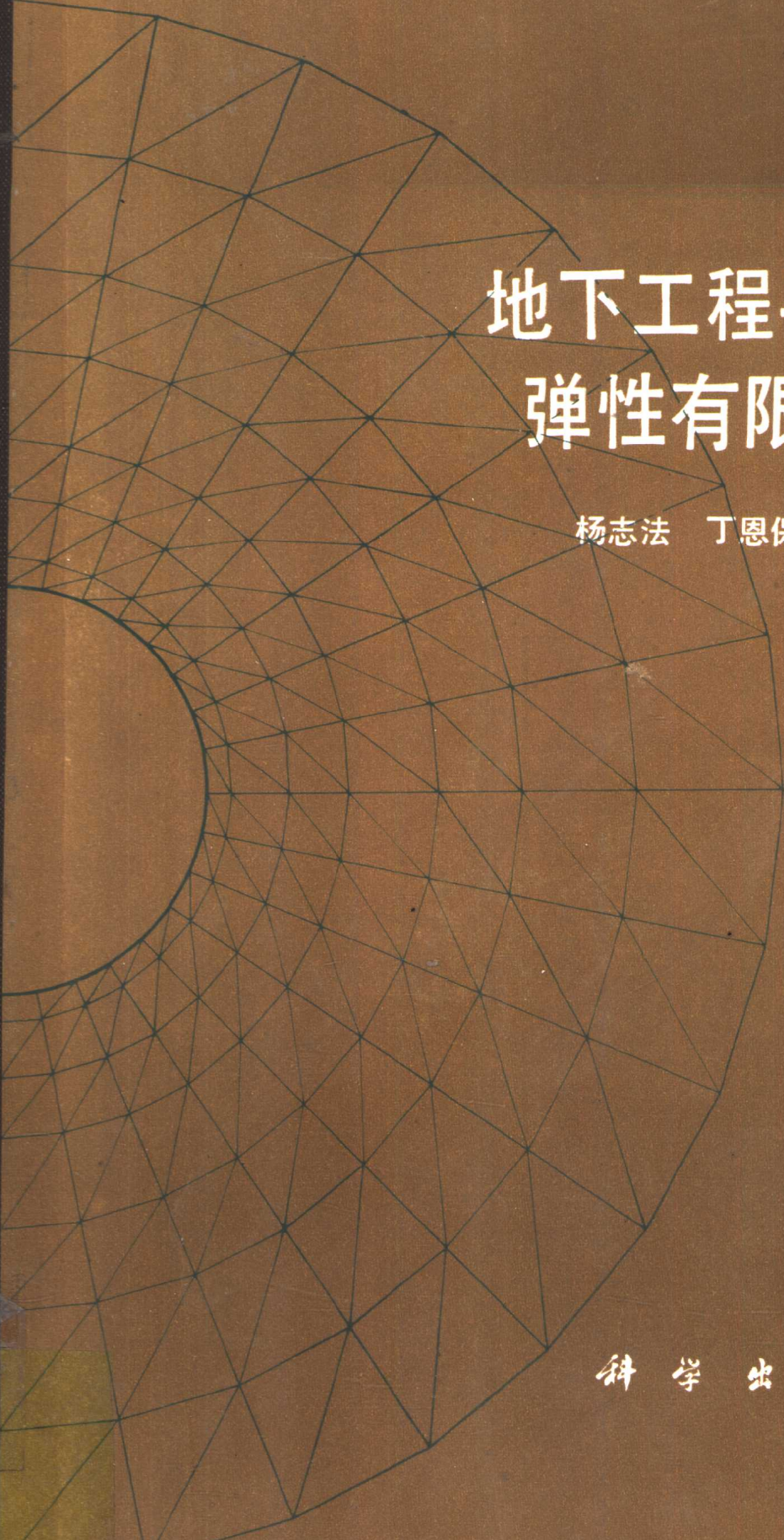




地下工程平面问题 弹性有限元图谱

杨志法 丁恩保 张三旗 著

科学出版社

地下工程平面问题 弹性有限元图谱

杨志法 丁恩保 张三旗 著

科学出版社

1989

内 容 简 介

本图谱是一本工具书。作者采用弹性理论和弹性有限单元法,编制了不同比例的十二种圆拱直墙、一种圆洞和一种三心拱曲墙等十四种标准洞形的图谱,并简单介绍了编制本图谱的理论根据、编制方法和使用说明。

这些图谱是根据对矿山、水利水电、铁道和军工等部门的地下工程进行调查的基础上编制的。利用这些图谱,可以直接在现场对与上述标准洞洞形相似或基本上相似的实际工程毛洞进行平面问题的应力和位移分析,而且使用简便、快速,化费极少。

本图谱适合从事地下工程设计和施工的科技人员使用,也可供从事地下工程研究的科研人员和有关院校的师生参考。

地下工程平面问题 弹性有限元图谱

杨志法 丁惠保 张三旗 著

责任编辑 周文辅 吴寅泰

科学出版社出版

北京朝阳门大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1989年3月第一版 开本:787×109. 1/16

1989年3月第一次印刷 印张:58 1/2

印数:0001—5000 字数:1,377,000

ISBN 7-03-000602-X/P·102

定价:60.30元

前 言

由于生产活动的需要,地下工程建设在全世界范围内都得到了迅速的发展,几乎遍及采矿、水利、铁道、城市建设、军工等各部门。70年代以来,水封油库、地下厂房、防护工程、地下商店得到了广泛的发展。特别是随着能源开发和合理利用的需要,诸如抽水蓄能、超导蓄能、高压蓄能以及核废料的地下封存等工程的相继出现,又为地下工程开辟了新的应用范围。

地下工程围岩稳定性涉及工程安全、造价和建设周期,所以,它是地下工程设计和施工的核心问题。而要解决这个问题,必须抓住地质勘测、各种试验、稳定分析、工程设计、施工以及监控等重要环节。

通常,地下工程设计和稳定分析的重要任务之一,是对其应力分布和开挖位移作出合理的估计。关于应力-位移的分析方法很多,其中有限单元法得到了普遍的采用。人们可以借助于有限单元法对工程岩体进行线弹性、弹塑性、粘弹性以及粘弹塑性等多种稳定分析。应该指出,线弹性分析是最基本的分析方法。考虑到已知参数的精度、岩体结构模型和力学模型的选择以及计算经费等方面原因,对于一般工程来说,采用得最多的还是线弹性分析。显然,在地质条件、地形条件和工程条件不断变化的情况下,先用线弹性进行初步的、带普查性的分析,再在此基础上作必要的和少量的复杂分析(例如弹塑性分析)是可取的。因此,线弹性分析是稳定分析的基础工作。本图谱的适用范围就是在地下工程中运用得最普遍的线弹性分析。

实际上,即使最简单的线弹性的有限单元法分析也需要一定容量的电子计算机、需要经过一定训练的技术人员才能进行,而且还要花较长的上机数据准备时间和较贵的计算费用。所以,对于地处山区的线路工程和中小型工程来说,一方面,由于地质条件等的复杂多变性,必须进行足够数量的分析;另一方面,由于工作量和费用方面的原因又难以进行大量的带普查性的分析。特别是在位移反分析法和考虑应力场的块体稳定性分析法等提出来之后,这一矛盾就更显突出。除此以外,通常的线弹性有限元分析也难以及时地满足工程现场(尤其是以快速施工为特点的喷锚工程)快速分析的需要。为了解决上述的矛盾,作者在弹性有限单元法原理和相似理论的基础上提出了地下工程有限单元图谱法。

所谓地下工程弹性有限单元图谱法,就是根据弹性条件下工程围岩的应力、位移与各种荷载、弹性模量、尺寸等因素的关系,由图谱(也就是标准问题的有限单元法的计算结果)推算实际地下工程毛洞的应力和位移的方法。因该法可以把一个十分复杂的问题转化为简单的四则运算,所以只要具备有关图谱,我们就可以在没有电子计算机的条件下,以相当好的精度(与通常的线弹性有限单元分析结果对比)快速地完成实际工程围岩的应力、位移分析。

图谱法至少可以帮助我们解决下列问题:

- (1) 在现场对地下工程作快速的应力和位移分析(均质、弹性条件下)。
- (2) 在应力分析的基础上,再根据岩体的抗拉强度和抗剪强度可初步地估计出围岩

可能首先破坏的部位——突破口(杨志法、刘竹华,1979)。突破观点对喷锚支护设计和位移监测系统的建立具有一定的指导作用。

(3) 可与坐标投影作图法(杨志法,1980)结合起来,评价由软弱结构面切割的块体稳定性(刘竹华、杨志法,1980)。

(4) 为在现场进行平面的和三维的弹性位移反分析提供分析工具 (Yang Zhifa *et al.*, 1983)。

(5) 可对有压隧洞进行应力、位移分析。

上述这些应用,我们准备在下面将提到的地下工程弹性有限元图谱应用的参考例子中加以详细的说明。

实际应用表明,与通常的线弹性有限单元法相比,地下工程弹性有限元图谱法具有下列优点:

(1) 只需随身携带的计算器就可直接在现场进行应力、位移分析,而不需电子计算机。这样,可望把该法推广到设计、施工和地质勘探部门的基层单位。

(2) 由于图谱法中的公式仅限于四则运算,故初中文化程度以上的人员均能胜任,不需要专门技术人员。

(3) 通常的有限元法需要较长的上机准备时间,而用图谱法分析一个单元的应力或一个点的位移,一般情况下只需十多分钟。对于需要紧跟工作面的现场工程师和工程地质工作者,对于到实地考察的专家,这种在现场随时随地能进行快速估算的方法将带来极大的方便。

(4) 在具备有关图谱后就可以进行大量分析而不再需要任何经费。换言之,图谱,特别是空间图谱的利用,可节省大量的计算经费。所以可以预料,如果图谱法能在水利水电、矿山、铁道、军工等需要开拓地下工程的部门推广,其经济效益将是很可观的。

本书是作者多年来关于平面应变问题的地下工程有限元图谱研究成果的总结。考虑到本书篇幅不能太大,故有关空间问题的图谱将另外奉献给读者。书中搜集的十四种关于平面应变问题的图谱是作者在分析了煤炭、水利水电、铁道和军工等部门的多种洞形的基础上编制的。我们相信这将成为广大从事地下工程工作的技术人员的有用工具书。当然,由于作者水平有限,成书也较仓促,所以缺点甚至错误在所难免,作者恳切希望广大从事地下工程的地质勘测、设计、施工的同行人批评指正。

本书是在中国科学院地质研究所工程地质力学开放研究实验室资助下完成的。作者在从事地下工程有限元图谱研究以及成书过程中,得到了王思敬研究员、孙广忠研究员的指导和帮助;刘竹华工程师以前也曾与作者合作,对图谱理论根据的研究工作作出了贡献;我们曾用戴桦同志与作者合作编制的程序进行过计算和校核;另外,本书的主要部分得到了常士骝高级工程师、段振西高级工程师、徐祯祥副研究员、周鸣皋工程师、孙景玉工程师和蔡美峰讲师等的审查,在此一并致以谢意!

目 录

前言

一、地下工程弹性有限元图谱的理论根据.....	1
二、地下工程有限元图谱的编制方法.....	11
三、地下工程平面问题弹性有限元图谱使用说明.....	14
四、地下工程弹性有限元图谱法应用举例.....	23
五、地下工程平面问题弹性有限元图谱正文.....	29
(一) 圆洞有限元图谱	29
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	38
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	73
(二) 圆拱直墙($B_0 = 1.16\text{m}$, $B_0/H_0 = 0.4$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱.....	107
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	117
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	145
(三) 圆拱直墙($B_0 = 1.16\text{m}$, $B_0/H_0 = 0.5$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱.....	172
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	182
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	210
(四) 圆拱直墙($B_0 = 1.50\text{m}$, $B_0/H_0 = 0.6$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱.....	237
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	246
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	274
(五) 圆拱直墙($B_0 = 1.778\text{m}$, $B_0/H_0 = 0.7$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱.....	301
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	311
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	339
(六) 圆拱直墙($B_0 = 2.20\text{m}$, $B_0/H_0 = 0.8$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱.....	366
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	374
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	402
(七) 圆拱直墙($B_0 = 2.70\text{m}$, $B_0/H_0 = 0.9$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱.....	429
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	437
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	465
(八) 圆拱直墙($B_0 = 3.20\text{m}$, $B_0/H_0 = 1.0$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱.....	492
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	499
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	523
(九) 圆拱直墙($B_0 = 3.19\text{m}$, $B_0/H_0 = 1.1$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱	546
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	553
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	583
(十) 圆拱直墙($B_0 = 3.18\text{m}$, $B_0/H_0 = 1.2$, $S_0/B_0 = 0.5$)有限元图谱.....	610
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	618

2. 泊松比 $\mu = 0.35$	646
(十一) 圆拱直墙 ($E_0 = 3.186\text{m}$, $B_0/H_0 = 1.3$, $S_0/B_0 = 0.5$) 有限元图谱	673
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	682
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	710
(十二) 圆拱直墙 ($B_0 = 3.18\text{m}$, $B_0/H_0 = 1.8$, $S_0/B_0 = 0.25$) 有限元图谱	737
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	745
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	773
(十三) 圆拱直墙 ($B_0 = 3.18\text{m}$, $B_0/H_0 = 1.9$, $S_0/B_0 = 0.25$) 有限元图谱	800
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	808
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	836
(十四) 带反拱的三心拱曲墙 ($B_0 = 3.22\text{m}$, $B_0/H_0 = 1.177$) 有限元图谱	863
1. 泊松比 $\mu = 0.30$	873
2. 泊松比 $\mu = 0.35$	901
参考文献	929

一、地下工程弹性有限元图谱的理论根据

地下工程围岩的应力和位移分布情况十分复杂,它不仅取决于洞形和规模,而且还取决于岩体力学性质和工程所在区的地应力场等复杂条件。这只能从各因素对开挖位移和应力的影响规律着手。根据这些规律,我们才有可能根据少量的标准问题的计算结果(即图谱)推算出实际工程可能遇到的各种复杂洞室围岩的应力和位移场。这里,我们准备分别从线弹性有限元理论和相似理论出发论证这些规律,并推导有关公式。另外,虽然本书没有给出浅埋隧道的具体图谱,但也可以用该法解决。

(一) 基本假定

由于绝大多数实际工程,都难以得到严格的理论解,所以有关图谱的应力,位移的计算都采用有限单元法。我们假定图谱所涉及的材料都是均质的、各向同性的弹性介质。这里还需指出,图谱所计算的地下洞室都是毛洞,也就是没有任何支护的洞体。在应用图谱进行应力、位移分析时应当注意这一点。当然,当支护很薄,例如,为保证施工安全所做的很薄的喷层或少数刚度不大的普通锚杆也可忽略不计而当作毛洞处理,因为它们对洞体的应力分布和位移场的影响相对较小。

(二) 图谱计算剖面及其边界条件

这里预先规定:本图谱采用右手直角坐标系,各种荷载凡与坐标轴方向相同者为正,反之为负。我们不妨把图谱的标准问题的计算条件称作图谱的计算模型,以区别于实际工程。图1给出了可以看作平面应变问题的图谱计算剖面及其边界条件。除泊松比 μ 以外,凡图谱涉及的参数都以0作为下标,以便与实际工程的参数相区别。为方便,我们假定问题具有对称性。剖面的上边界作用有垂直均布荷载 q_0 ;下边界仅作垂直方向约束;左边界为 x 方向约束;右边界作用有水平均布荷载 P_0 和自重引起的按三角形分布的侧压力 ξ_0 , ξ 可用下式表示

$$\xi_0 = h_0 \gamma_0 \frac{\mu}{1 - \mu}$$

式中, h_0 为整个计算剖面的高度; γ_0 为岩体容重; μ 为泊松比。

由于洞体开挖实际上只影响洞室周围一定范围的岩体,所以计算剖面高度一般不小于洞室最大尺寸的10倍。计算表明这已经满足地下工程的要求。

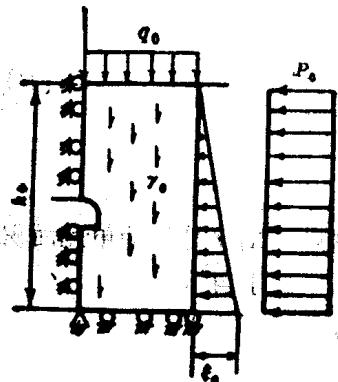


图1 平面应变问题的图谱计算剖面 and 边界条件

(三) 各因素对应力和位移场影响规律的论证

影响地下工程围岩的应力和位移分布的因素十分复杂。对均质弹性体来说,有弹性模量 E , 泊松比 μ , 容重 γ , 洞体上覆岩层厚度(或埋深), 水平构造应力, 洞体的几何尺寸和洞体的形状等。这就是说,在编制图谱时必须考虑上述各方面的影响。

下面准备分别用线弹性有限元理论和相似理论来研究上述各因素对应力和位移场的影响规律,从而确定有关计算公式。

1. 从线弹性有限元理论出发的论证

根据线弹性有限单元法理论,上述各因素对应力和位移场的影响规律,大致可归纳为七条。这里,我们所用的单元都是三角形常应变单元(杨志法、刘竹华, 1982)。

(1) 所有作用力符合叠加原理。

通常,可考虑下列四种荷载:

- 均布的水平向应力 P_0 系由水平构造应力和自重引起的。
- 按三角形分布的水平向侧压力的特点是上边界处为零,下边界为 ξ_0 。
- 上部岩层垂直压应力 q_0 。
- 模型本身的岩体容重 γ_0 。

由于岩体为弹性介质,所以开挖引起的各位移和应力分量将分别等于在上述各荷载单独作用下开挖引起的相应位移和应力分量之和。当然,如果需要,我们也可以考虑更多的边界荷载。

(2) 在自重作用下开挖引起的位移和应力都与容重 γ_0 成正比。

按虚功原理,若单元体力为

$$\{g\} = [g_x, g_y]^T$$

则等效节点载荷向量为

$$\{R\}_e = \frac{\Delta \cdot t}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} = \frac{\Delta \cdot t}{3} \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_x \\ g_y \\ g_x \\ g_y \end{Bmatrix}$$

式中, Δ , t 分别为单元面积和厚度。这里的 t 为单位厚度。

对于自重场

故

$$g_x = 0, g_y = -\gamma_0$$

$$\{g\}_e = -\gamma_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta/3 \\ 0 \\ \Delta/3 \\ 0 \\ \Delta/3 \end{Bmatrix}$$

(1)

就整个系统而言,由于各单元的 γ_0 相同,因此 $\{R\}_e$ 中各元素都与 γ_0 成正比. 除自重外,其它面力都为零,所以总体载荷列阵 $\{\tilde{R}\} = \{\tilde{R}\}_e$. 这里的“~”表示已作约束处理(下同).

从模型的整个系统的总体平衡方程组 $[\tilde{K}]\{\delta\} = [\tilde{R}]$ 不难看出,由于总刚度矩阵不变,因此总体节点位移 $\{\delta\}$ 应当与 γ_0 成正比. 对于应力,因应变矩阵 $[B]$ 与 γ_0 无关,故各单元应变值 $\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}$ 也与 γ_0 成正比. 又因单元应力 $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$, 于是可以得到 $\{\sigma\}$ 各元素都与 γ_0 成正比的结论.

(3) 在单一的面力 (P_0 或 q_0 或 ξ_0) 作用下,应力和位移都与其大小成正比.

这里以图 1 条件为例,并讨论 P_0 ($q_0 = 0, \xi_0 = 0, \gamma_0 = 0$) 的情况.

按虚功原理,均布面力 P_0 的等效节点载荷与把受力的直边看作刚杆而得到的静力等效结果相同. 如图 2 所示,对于 ij 边作用有 $[-P_0, 0]^T$ 的三角形单元 ijm 来说,可以写出

$$\{R\}_{P_0} = -P_0 \begin{Bmatrix} l/2 \\ 0 \\ l/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

由此不难断定,由各单元的 $\{R\}_{P_0}$ 叠加而成的 $\{R\}$ 中的各元素将与 P_0 成正比. 同样可证明开挖引起的应力和位移与 P_0 成正比的规律. 至于 q_0 也具有相同的规律,其证明方法与 P_0 完全相同.

现在进而讨论一下按三角形分布的 ξ_0 的问题.

图 3 给出了在右边界上分别作用有底为 ξ_1 和 ξ_2 的按三角形分布的水平向面力. 根据平面几何原理,我们很容易证明,在整条边界中任何深度上的两种情况的水平侧压力之

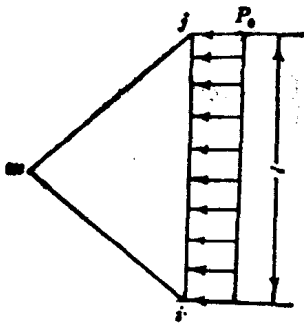


图 2 边上作用有均布荷载 P_0 的三角形常应变单元

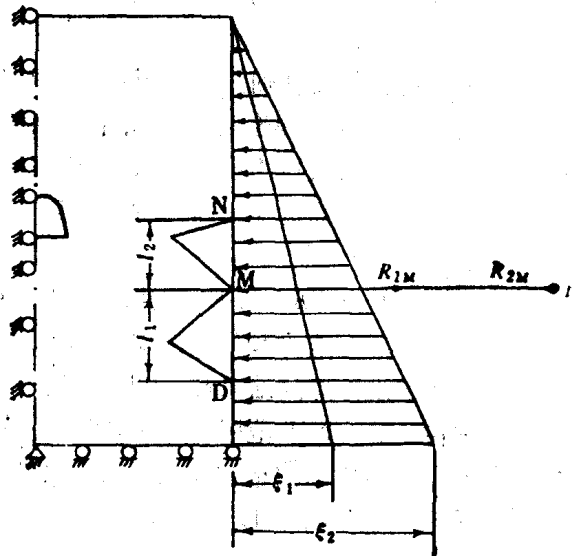


图 3 边界上作用有三角形荷载时的模型示意图

比都等于 ξ_1/ξ_2 。同样根据静力等效原则,各节点的等效节点荷载可由其相邻两边的荷载值即该点的等效节点力叠加得到。例如对于M点,其等效节点荷载为

$$R_M = l_1 \left(\frac{\xi_M}{3} + \frac{\xi_D}{6} \right) + l_2 \left(\frac{\xi_M}{3} + \frac{\xi_N}{6} \right)$$

式中, ξ_N , ξ_M 和 ξ_D 分别为 N, M 和 D 点上的水平侧压力。

不难进一步证明,在 ξ_1 和 ξ_2 条件下,同一点的等效节点荷载之比也等于 ξ_1/ξ_2 。例如,对于M点将有

$$R_{1M}/R_{2M} = \xi_1/\xi_2$$

接着,就可以按证明 P₁ 的步骤来证明洞体开挖引起的位移和应力与 ξ_1 值成正比的结论。

(4) 节点位移与弹性模量 E_0 成反比,单元应力与之无关。

对于离散化后体系中的任一三角形单元 ijm , 都可以写出它的单元刚度矩阵(王仁等,1979)

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{ii}] & [K_{ij}] & [K_{im}] \\ [K_{ji}] & [K_{jj}] & [K_{jm}] \\ [K_{mi}] & [K_{mj}] & [K_{mm}] \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中每一子矩阵又可表示为

$$[K_{rs}] = \frac{E_0(1-\mu)t}{4(1+\mu)(1-2\mu)\Delta} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r c_s & \frac{\mu}{1-\mu} b_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} c_r b_s \\ \frac{\mu}{1-\mu} c_r b_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} b_r c_s \end{bmatrix}$$

($r, s = i, j, m$)

其中 b_i, b_j, c_i, c_j 等为与三角形三顶点 i, j, m 的坐标值有关的常数。其余各值与前面提到的意义相同。

由于上述各值对任何既定单元都是不变的,故 $[K]^e$ 中各元素将与单元的弹性模量 E_0 成正比。从而可以得出,由单元的刚度矩阵叠合起来的系统总刚度矩阵 $[K]$ 中的各元素也必然与各单元共同的弹性模量 E_0 成正比的结论。

在总体平衡方程组中,因其余条件都不变,所以节点位移向量 $\{\delta\}$ 中的各元素都应当与 E_0 成反比。

又因应变矩阵 $[B]$ 与 E_0 无关,而弹性矩阵与 E_0 成正比,故单元应力与 E_0 无关。

(5) 泊松比对应力和位移的影响不大。

理论和实践计算的结果都表明泊松比 μ_0 有以下两个特点:(1)变化范围小,仅为 0—0.5,通常在 0.25—0.35 范围内较为常见;(2)它的变化对刚度矩阵影响较小,因而对单元应力和节点位移的影响也较小。

这样,我们就可以用定值法来考虑 μ_0 这一变化因素。具体可行的至少有三种方法。第一种为单点定值法,即只定下一个 μ 值(例如取常用的 $\mu = 0.3$)来计算应力和位移。不管实际工程岩体的泊松比是多少,我们都用在 $\mu = 0.3$ 情况下得到的值。换言之,单点定

值法系以一具体值来代替全部的实际泊松比值的一种方法。第二种为两点定值法,即只定下两个值(例如取 $\mu = 0.3$ 和 $\mu = 0.35$)。这样,我们可以分两段定值,例如以 $\mu = 0.3$ 代替 $0-0.325$ 区间的全部泊松比值,以 $\mu = 0.35$ 代替 $0.325-0.5$ 区间的泊松比值。第三种为内插外推法,即根据两点的值内插外推(作直线分布假定)在实际工程泊松比条件下的应力和位移值。本图谱采用第二种和第三种方法进行泊松比修正。

(6) 洞体尺寸缩小(或扩大) n_B 倍时,自重场条件下开挖位移将缩小(或扩大) n_B^2 倍,而应力则随之缩小(或扩大) n_B 倍。

尺寸缩小或扩大时,有限元网格随洞体尺寸一起变化(也就是说尺寸变化前后的两个网格在几何上是相似的),它们的节点和单元编号不变。

首先证明几何尺寸成比例变化(而 E, μ, γ 等参数不变)时,系统总刚度矩阵不变这一结论。

若洞体跨度缩小 n_B 倍,即

$$n_B = B_1/B_2$$

式中的 B_1 和 B_2 分别为尺寸变化前后的跨度。

显然,对于任意三角形单元 i/m 来说,其变化前后的面积之间存在如下关系

$$\Delta_2 = \frac{\Delta_1}{n_B^2} \quad (3)$$

同时,与单元节点坐标有关的常数 b_r, b_s, c_r, c_s 等,在尺寸变化前后也出现下列变化

$$\begin{cases} b_{r_2} = \frac{1}{n_B} b_{r_1} & b_{s_2} = \frac{1}{n_B} b_{s_1} \\ c_{r_2} = \frac{1}{n_B} c_{r_1} & c_{s_2} = \frac{1}{n_B} c_{s_1} \end{cases} \quad (4)$$

按照式(2)可以写出变化前的原模型 1 的单元刚度矩阵中的每一个子矩阵和变化后模型 2 的子矩阵 $[K]_1^e$ 和 $[K]_2^e$ 。将式(3),式(4)代入 $[K]_2^e$ 的式子并与前者对比,发现 $[K]_1^e$ 与 $[K]_2^e$ 完全相等,这说明尺寸变化前后的单元刚度矩阵是不变的。因此也就证明了在这两个条件下的系统总刚度矩阵也是不变的。

现在进一步讨论一下岩体仅在自重作用下(假定 $P_0 = q_0 = \xi_0 = 0$),尺寸变化前后的位移、应力关系。

根据式(1)我们不难知道

$$\{R\}_2^e = \frac{1}{n_B^2} \{R\}_1^e \quad (5)$$

对比两模型的总平衡方程组 $[\tilde{K}]_2 \{\delta\}_2 = \{\tilde{R}\}_2$ 和 $[\tilde{K}]_1 \{\delta\}_1 = \{\tilde{R}\}_1$, 并由式(5)得到

$$\{\delta\}_2 = \frac{1}{n_B^2} \{\delta\}_1 \quad (6)$$

此外,还可分别写出这两个模型的应变矩阵

$$\begin{aligned} [B]_1 &= [B_i \ B_s \ B_m]_1 \\ [B_r]_1 &= \frac{1}{2\Delta_1} \begin{bmatrix} b_{r_1} & 0 \\ 0 & c_{r_1} \\ c_{r_1} & b_{r_1} \end{bmatrix} \quad (r = i, s, m) \end{aligned} \quad (7)$$

$$[B]_2 = [B_i \quad B_j \quad B_m]_2$$

$$[B_r]_2 = \frac{1}{2\Delta_2} \begin{bmatrix} b_{r_1} & 0 \\ 0 & c_{r_2} \\ c_{r_3} & b_{r_3} \end{bmatrix} \quad (r = i, j, m) \quad (8)$$

将式(3)和式(4)代入式(8),并与式(7)比较,就可发现模型2的应变矩阵 $[B]_2$ 比模型1的扩大了 n_B 倍。因此,两模型的单元应变向量之间有如下关系

$$\{\varepsilon\}_2 = \frac{1}{n_B} \{\varepsilon\}_1 \quad (9)$$

另外,考虑到弹性矩阵 $[D]$ 仅与 E_0, μ_0 有关,而与几何尺寸等无关,所以由方程 $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ 和式(9)得出

$$\{\sigma\}_2 = \frac{1}{n_B} \{\sigma\}_1 \quad (10)$$

(7)洞体尺寸缩小(或扩大) n_B 倍时,面力(P_0, q_0 或 ξ_0)单一作用下的开挖位移将缩小(或扩大) n_B 倍,而应力不变。

仿照上一问题的证明步骤,也很容易论证本规律。

为了在实际工作中方便地应用这七条规律,我们需要用数学方法将它们具体化。首先,待分析的实际工程的计算剖面必须与所选择的图谱计算模型的计算剖面完全相似,也即除描述这两均质的弹性体的方程式完全相同外,还应满足几何相似和约束条件相同这两个条件。这意味着不仅要求实际工程洞体形状与图谱的标准问题的洞体形状相似(即这两个计算剖面的任何部位的相应尺寸之比相同,都等于实际工程洞跨 B 与图谱标准问题洞跨 B_0 之比,即 $n_B = B/B_0$),而且还要求两者的网格相似、约束条件一致。这样,若实际工程的各计算参数与图谱计算模型的相应参数(以0为下标者)之比分别记作:

尺寸比	$n_B = B/B_0$
水平均布荷载比	$n_P = P/P_0$
垂直均布荷载比	$n_q = q/q_0$
容重比	$n_\gamma = \gamma/\gamma_0$
弹性模量比	$n_E = E/E_0$
侧面的按三角形分布的水平荷载比	$n_\xi = \xi/\xi_0$

则实际工程的应力 $\{\sigma\}$ 和位移 $\{\delta\}$ 可由下式得到

$$\{\sigma\} = n_B n_\gamma \{\sigma_0^r\} + n_\xi \{\sigma_0^\xi\} + n_q \{\sigma_0^q\} + n_P \{\sigma_0^P\} \quad (11)$$

$$\{\delta\} = \frac{n_B n_\gamma}{n_E} \{\delta_0^r\} + \frac{n_B n_\xi}{n_E} \{\delta_0^\xi\} + \frac{n_B n_q}{n_E} \{\delta_0^q\} + \frac{n_B n_P}{n_E} \{\delta_0^P\} \quad (12)$$

式中, $\{\sigma_0^r\}, \{\sigma_0^\xi\}, \{\sigma_0^q\}$ 和 $\{\sigma_0^P\}$ 分别为在荷载 γ_0, ξ_0, q_0 和 P_0 单独作用下相应图谱的对应单元的应力;而 $\{\delta_0^r\}, \{\delta_0^\xi\}, \{\delta_0^q\}$ 和 $\{\delta_0^P\}$ 分别为在荷载 γ_0, ξ_0, q_0 和 P_0 单一作用下相应图谱的对应节点的位移。

若令

$$N_\gamma = n_\gamma n_B, \quad N_\xi = n_\xi, \quad N_q = n_q, \quad N_P = n_P \quad (13)$$

$$M_\gamma = \frac{n_\gamma n_B^2}{n_E}, \quad M_\xi = \frac{n_\xi n_B}{n_E}, \quad M_q = \frac{n_q n_B}{n_E}, \quad M_P = \frac{n_P n_B}{n_E} \quad (14)$$

则式(11)和式(12)分别可改写为

$$\{\sigma\} = N_\gamma \{\sigma_0^\gamma\} + N_\xi \{\sigma_0^\xi\} + N_q \{\sigma_0^q\} + N_P \{\sigma_0^P\} \quad (15)$$

$$\{\delta\} = M_\gamma \{\delta_0^\gamma\} + M_\xi \{\delta_0^\xi\} + M_q \{\delta_0^q\} + M_P \{\delta_0^P\} \quad (16)$$

考虑到 $N_\gamma, N_\xi, N_q, N_P$ 正好等于在 γ, ξ, q, P 单独作用下实际工程某单元的应力与图谱标准问题相应单元的应力之比,即

$$N_\gamma = \frac{\sigma_x^\gamma}{\sigma_{x_0}^\gamma} = \frac{\sigma_y^\gamma}{\sigma_{y_0}^\gamma} = \frac{\tau_{xy}^\gamma}{\tau_{xy_0}^\gamma}$$

$$N_\xi = \frac{\sigma_x^\xi}{\sigma_{x_0}^\xi} = \frac{\sigma_y^\xi}{\sigma_{y_0}^\xi} = \frac{\tau_{xy}^\xi}{\tau_{xy_0}^\xi}$$

$$N_q = \frac{\sigma_x^q}{\sigma_{x_0}^q} = \frac{\sigma_y^q}{\sigma_{y_0}^q} = \frac{\tau_{xy}^q}{\tau_{xy_0}^q}$$

$$N_P = \frac{\sigma_x^P}{\sigma_{x_0}^P} = \frac{\sigma_y^P}{\sigma_{y_0}^P} = \frac{\tau_{xy}^P}{\tau_{xy_0}^P}$$

故 $N_\gamma, N_\xi, N_q, N_P$ 称为应力比;同样 M_γ, M_ξ, M_q 和 M_P 也等于在 γ, ξ, q, P 单独作用下实际工程某点位移与图谱标准问题相应点的位移之比,即

$$M_\gamma = \frac{u^\gamma}{u_0^\gamma} = \frac{v^\gamma}{v_0^\gamma}, \quad M_\xi = \frac{u^\xi}{u_0^\xi} = \frac{v^\xi}{v_0^\xi},$$

$$M_q = \frac{u^q}{u_0^q} = \frac{v^q}{v_0^q}, \quad M_P = \frac{u^P}{u_0^P} = \frac{v^P}{v_0^P}$$

所以, M_γ, M_ξ, M_q 和 M_P 叫做位移比。

2. 从相似理论出发的论证

事实上用相似理论也可以证实上述的七条规律和推导相应公式。下面用相似理论对这七条规律再次论证。

按照相似理论,两个系统相似的充分和必要条件,是它们的全部有关方程式在文字上完全相同,单值条件相似。所以,据此可考察一下图谱计算模型和用这个图谱解决的实际工程(或者称为原型)的相似性。首先,考虑到计算模型和原型都作了弹性和均质假定,故这两个系统都可以用文字上完全相同的弹性理论的十五个方程式表达(三个静力平衡方程、三个物理方程、六个几何方程和三个边界条件)。其次,再来看一下是否满足单值条件的相似,亦即几何相似,边界条件相似和相应点的物理参数相似。由图谱使用原则可知,只有当原型的任一部位的尺寸与模型的相应尺寸之比处处相等时,才能利用这一模型来分析该实际工程。显然,两者是满足几何相似这一条件的;另外,使用图谱时也要求原型和模型的约束条件相同、边界作用力的方向相同,且在相应点上作用力的大小相似。这意味着满足了边界条件相似这一点。最后,因原型和模型均为均匀、各向同性的弹性体,故其相应点的物理参数必然相似(王龙甫, 1979)。

综上所述,模型和原型确实是满足相似的充分和必要条件的两个相似现象。

为了得到把图谱计算模型的应力和位移变换成与之相似的实际工程相应部位上的应力和位移的转换公式,我们根据相似理论对上述方程式的分析来确定各物理量之间的比例(即相似判据)。相似现象的相似判据是相同的定数。下面拟从弹性理论基本方程出发,求相似判据。

显然,由于图谱的计算模型与原型相似,其单值条件必然相似。原型(下标为 H)与计

算模型(下标为 M) 的相应值之间的相似系数分别为:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{几何相似系数 } (x, y, z) & n_B = B_H/B_M \\ \text{应力相似系数(法向应力及剪应力)} & n_\sigma = \sigma_H/\sigma_M \\ \text{应变相似系数(线应变及角应变)} & n_\varepsilon = \varepsilon_H/\varepsilon_M \\ \text{位移相似系数 } (u, v, w) & n_\delta = \delta_H/\delta_M \\ \text{弹性模量相似系数} & n_E = E_H/E_M \\ \text{容重相似系数} & n_\gamma = \gamma_H/\gamma_M \\ \text{外荷载集度相似系数} & n_Q = Q_H/Q_M \end{array} \right\} \quad (17)$$

其中 n_Q 实际上包含下面三项:

$$\begin{array}{ll} \text{水平均布荷载集度相似系数} & n_P = P_H/P_M \\ \text{垂直均布荷载集度相似系数} & n_q = q_H/q_M \\ \text{水平三角形分布荷载集度相似系数} & n_\xi = \xi_H/\xi_M \end{array}$$

这里,在右手直角坐标系中,我们先分别取静力平衡方程的第三式和边界条件、几何方程和物理方程中的第一式进行推演。对于原型,有

$$\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + z \right)_H = 0 \quad (18)$$

$$(X_\nu)_H = (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n)_H \quad (19)$$

$$(\varepsilon_x)_H = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_H \quad (20)$$

$$(\varepsilon_x)_H = \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \right\}_H \quad (21)$$

其中式(18)的 z 为 z 方向的体积力,也即 $-\gamma$ 。式(19)的 X_ν 为斜面(其法线为 ν)应力在 x 方向上的投影,而 l, m 和 n 为斜面的方向余弦。

由式(17)的有关系数 n_σ, n_B 和 n_γ 的式子可得到 $\sigma_H = n_\sigma \sigma_M, B_H = n_B B_M$ 和 $\gamma_H = n_\gamma \gamma_M$, 代入式(18)后,有

$$\frac{n_\sigma}{n_B} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right)_M = n_\gamma \gamma_M$$

与式(18)比较可知,只有满足

$$\frac{n_\sigma}{n_B n_\gamma} = 1 \quad (22)$$

时才成立。

再将式(17)中有关系数代入式(22),则可得应力换算关系式为

$$\sigma_H = \sigma_M n_B n_\gamma \quad (23)$$

对于式(19),原型和模型的斜面的方向余弦显然完全相同。若将式(17)中的有关值代入,则得

$$\frac{n_P}{n_\sigma} (X_\nu)_M = [\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n]_M$$

与式(19)比较则有

$$\frac{n_P}{n_\sigma} = 1$$

或写作

$$\sigma_H = \sigma_M n_P \quad (24)$$

同理,如将式(17)中的有关值代入式(20),则有

$$\frac{n_E n_B}{n_s} (\varepsilon_x)_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_M$$

与式(20)比较则下式必须成立

$$\frac{n_E n_B}{n_s} = 1$$

因此得到相应的应变换算公式

$$\varepsilon_H = \varepsilon_M \left[\frac{\delta_H}{\delta_M} \cdot \frac{B_M}{B_H} \right] \quad (25)$$

对于式(21),如设原型与模型的泊松比相等,即 $\mu_H = \mu_M$,则将式(17)中有关值代入后可得

$$\frac{n_E n_B}{n_\sigma} (\varepsilon_x)_M = \left\{ \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \right\}_M$$

与式(21)比较,可知上式成立的条件为

$$\frac{n_E n_B}{n_\sigma} = 1$$

可得

$$\sigma_H = \sigma_M n_E n_s \quad (26)$$

现在再进一步分析这些换算关系。根据上述应力比定义并考虑式(17)的有关系数,可证明式(23)与式(13)的第一式完全相同,即

$$N_r = n_\sigma = n_r n_B \quad (27)$$

对于面力 P ,对比式(24)与式(13)的第四式,也可证明两者相同,即

$$N_P = n_\sigma = n_P \quad (28)$$

只要将 P 变换成另一面力 q 或 ξ ,同样可证明式(13)的第二式和第三式成立。

将式(25)代入式(26),有

$$n_\sigma = \frac{n_E n_s}{n_B} \quad (29)$$

再与式(23)比较,得

$$n_B n_r = \frac{n_E n_s}{n_B}$$

或

$$n_s = \frac{n_B^2 n_r}{n_E}$$

根据位移比定义,有 $M_r = n_s$, 于是证明了式(14)的第一式,即

$$M_r = n_s = \frac{n_B^2 n_r}{n_E} \quad (30)$$

若将式(29)与式(24)作比较,则

$$n_P = \frac{n_E n_s}{n_B}$$

或改写成

$$n_{\delta} = \frac{n_P n_B}{n_E}$$

由于 n_{δ} 是在面力 P 单独作用下的位移比 M_P , 故得到式 (14) 的第四式

$$M_P = n_{\delta} = \frac{n_P n_B}{n_E} \quad (31)$$

如果将 P 换成另一面力, 例如 q 或 ξ , 则同样可证明式 (14) 的第二式和第三式成立.

最后根据叠加原理, 可把式 (27), (28), (30), (31) 及有关变换得到的其它面力的式子综合成式 (11) 和式 (12), 这就完成了证明.