

科學圖書大庫

泛函分析導論

(Hilbert 空間的算子)

編著者 楊維哲



徐氏基金會出版

0177

Y299

科學圖書大庫

泛函分析導論

(Hilbert 空間的算子)

編著者 楊維哲

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十八年三月二十七日三版

泛函分析導論

(Hilbert 空間的算子)

基本定價 4.40

編著者 楊維哲 國立台灣大學數學系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

本書敬獻給

施 拱 星 教授
永田雅宜 教授

楊 維 哲

目 錄

第一部份 Hilbert空間 及算子的意義

第一章 Hilbert空間的意義

- § 1 Hilbert 空間的定義…………… 1
- § 2 Hilbert 空間的例
子 $L_2(\alpha, \beta)$ …… 4
- § 3 Hilbert 空間的例
子 $A_2(G)$ …… 7

第二章 Hilbert空間的推廣

- § 4 線性算子、連續性 10
- § 5 Banach 空間 …… 13
- § 6 單直空間的完備化 16
- § 7 準單直空間 …… 19

第三章 射 影

- § 8 直交補空間…………… 22
- § 9 射影分解…………… 24
- § 10 射影算子間的關係 27

第四章 直和及無序和

- § 11 Hilbert 空間的直和…………… 31
- § 12 無序和…………… 34
- § 13 無限個 Hilbert 空間的直和 …… 37

第五章 Riesz定理及應用

- § 14 Riesz 定理(又叫
Fréchet-Riesz
定理)…………… 42
- § 15 Lebesgue-Nikodym
定理的證明…………… 47
- § 16 再生核…………… 51
- § 17 Bergmann 的核函
數…………… 56

第六章 單直基

- § 18 單直基的意義，
Gram-Schmidt操
作…………… 60
- § 19 Fourier 展開…………… 62
- § 20 維數…………… 65
- § 21 核函數再生核之具
體表現—單直基之
應用…………… 68

第七章 收斂及算子

- § 22 Gelfand 定理及共鳴定理…………… 72
- § 23 強收斂和弱收斂… 74
- § 24 算子的均勻收斂和收斂…………… 76

第八章 閉性與同伴

- § 25 同伴算子…………… 79
- § 26 閉算子…………… 80
- § 27 對稱性和自伴性… 83

第九章 測度與積分的複習

- § 28 備忘：積分論的一些事實…………… 88
- § 29 備忘：測度的集合 95
- § 30 Helly 的選出定理 98
- § 31 Herglotz 定理…101

第十章 矢值及算子值測度

- § 32 射影值及直交矢值測度……………108
- § 33 一般算子值及矢值測度……………112
- § 34 一般積分的性質…119
- § 35 無欄函數之積分…124

第二部分 值譜分解

第十一章 值譜分解緒論

- § 36 長期平均（遍歷性）定理……………134

§ 37 Bochner 定理…………138

§ 38 Fourier 變換 …142

§ 39 Fourier 變換的值譜分解……………145

§ 40 單直算子值譜分解 147

第十二章 值譜分解，自伴算子

- § 41 J. Von Neumann 的值譜分解定理…152
- § 42 固有值譜……………160
- § 43 例：乘法算子及算子 $q \cdot p$ 之值譜分解 167
- § 44 完全連續算子…………171
- § 45 自伴性之判認…………175
- § 46 正定算子的性質…181

第十三章 正規算子的值譜分解

- § 47 密在閉算子的標準寫法……………189
- § 48 正規算子的值譜分解……………193
- § 49 Hilbert 空間的完全連續算子，Schmidt 算子……………200
- § 50 可跡算子……………203

第十四章 正規算子底正規函數

- § 51 算子的函數關聯與可換性……………209

- § 52 同時值譜分解定理 212
 § 53 單純值譜算子…… 214
 § 54 空間的直積分與正
 規算子的表現…… 216

第十五章 Neumark的理論

- § 55 閉對稱算子之缺陷 222
 § 56 例：算子 $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}$ … 225
 § 57 Neumark的延拓… 232
 § 58 Neumark定理：廣
 義的單么分解…… 235

第三部分 應用及補充

第十六章 Hilbert張量數

- § 59 張量積…… 239
 § 60 對稱性、Grassmann
 數…… 244

第十七章 吉田理論

- § 61 一參數半群 …… 251
 § 62 半群底母算子…… 255
 § 63 母算子底例…… 260
 § 64 由母算子定半群及
 母算子的刻劃…… 265
 § 65 Trotter-Kato 的
 加法公式…… 271

第十八章 一些機率分佈

- § 66 Bochner-Khinchin
 定理 Stone 定理… 277
 § 67 常態分佈…… 281

- § 68 Hermite 多項式… 283
 § 69 調和振子…… 289
 § 70 Poisson 變數的函
 數：Charlier 變數 294

第十九章 過程論

- § 71 Hilbert 空間與仿
 機率空間…… 298
 § 72 直交矢值測度與仿
 公平賭程…… 305
 § 73 Wiener 過程…… 307
 § 74 附錄 Lévy 過程… 311

第二十章 迴旋

- § 75 仿平穩過程…… 317
 § 76 相關函數的意義 320
 § 77 對擬平穩過程的線
 性運算（或稱濾過）322
 § 78 自迴歸敘列…… 327
 § 79 ARMA 敘列…… 331
 § 80 Wold 分解…… 332
 § 81 預測…… 336
 § 82 常態平穩過程…… 348
 § 83 抽象的 Ito 積分… 352
 § 84 多重 Wiener 積分… 357
 § 85 仿平穩增量過程… 363
 § 86 仿 Markov 過程及
 Langevin 方程… 367

第二十一章 保測性和遍 歷性

- § 87 保測變換…… 371
 § 88 測度的可遷性和遍

歷性.....	373	§ 101 Sobolev 補題.....	427
§ 89 長期平均定理.....	376	§ 102 Gårding 不等式.....	431
§ 90 平穩定常過程的遍 歷性.....	378	§ 103 Friedrichs 定理.....	436
第二十二章 在量子力學 的應用		第二十四章 Hilbert 空間 上的測度	442
§ 91 Wigner 定理.....	381	§ 104 擬不變測度.....	442
§ 92 量子力學的公理化.....	384	§ 105 正定號連續函數.....	448
§ 93 Feynman 積分.....	389	§ 106 Kakutani 內積.....	455
§ 94 Hamilton 算子自 伴性的認定.....	394	§ 107 Gauss 測度.....	460
§ 95 正準交換關係.....	399	§ 108 再論 C. C. R.	467
§ 96 Fock 表現.....	406	附 錄	472
第二十三章 荷佈空間	411	§ 附 1 一個 Mini — 課 程的大綱.....	472
§ 97 核式列直空間，極 限空間.....	411	§ 附 2 可換的重度論.....	479
§ 98 荷佈空間 D, W_k 與 H_k	414	§ 註解 譯詞及符號.....	488
§ 99 環體 T^N 上的荷佈	418	書目和建議.....	490
§ 100 空間 S	423	索引.....	493
		跋.....	494

第一部分 Hilbert 空間及 算子的意義

第一章 Hilbert 空間的意義

§ 1. Hilbert 空間的定義

線性空間 (或**向量空間**) 以複數體 (或實數體) 作係數域的加法群 H 就叫做**線性空間**或**向量空間** (linear space or vector space)。說得明白些，一個線性空間 H 就是這樣的一個不空集，可以定義“加法”及“係數乘法”：

$$\text{若 } x, y \in H, \text{ 則 } x + y \in H, \quad (1)$$

$$\text{若 } x \in H, \alpha \text{ 爲複數 (或實數) 則 } \alpha \cdot x \in H; \quad (2)$$

而這兩種運算必須滿足：

$$V_1 \quad x + y = y + x; \quad (3)$$

$$V_2 \quad (x + y) + z = x + (y + z); \quad (4)$$

$$V_3 \quad \text{對一切 } x, z, \text{ 必存在唯一的 } y \text{ 使 } x + y = z; \quad (5)$$

$$V_4 \quad 1 \cdot x = x; \quad (6)$$

$$V_5 \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x; \quad (7)$$

$$V_6 \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y; \quad (8)$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \quad (9)$$

以上及以下，我們用希臘小字母 α, β 等表示“數” (scalar) (即複數體，或對應的實數體的元素)，用羅馬小字母 x, y, z 等表示“向量”亦即“矢” (vector) (即 H 的元素)。必須注意：—(5) 中的 y 由 x, z 唯一地定出，我們寫做 $y \equiv z - x$ ，而 $O_x \equiv x - x$ 和 x 是無關的。它有： $y + O_x = y$ ，對一切 y 都成立，而且 $0 \cdot y = O_x$ ， $(-1)y = O_x - y$ ，等等。這是很容易證明的。由於這個緣故，我們把向量 O_x 寫做 O ，把 $(-1)y$ 寫做 $-y$ ，不致於引起混淆。

內積 如果：對於 H 的任何兩元 x, y 所做成的有序的一對 (x, y) ，

能夠定出一個複數，寫做 $\langle x | y \rangle$ ，而且又滿足下述的條件；那麼：這個 $\langle | \rangle$ 就叫做 H 上的一個內積或單直積 (inner-product or unitary product)。——條件是：

$$U.1. \quad \langle x | x \rangle \geq 0, \text{ 且 } = 0, \text{ 只當 } x = 0 \text{ 時}; \quad (10)$$

$$U.2. \quad \langle x | y \rangle^* = \langle y | x \rangle; \quad (\text{Hermite 對稱性}); \quad (11)$$

$$U.3. \quad \langle x | y_1 + y_2 \rangle = \langle x | y_1 \rangle + \langle x | y_2 \rangle; \quad (12)$$

$$\langle x | \alpha y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle. \quad (13)$$

[即 $\langle x | y \rangle$ 對 y 是線性的 (linear)。] 這樣一來，

$$\langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle;$$

$$\text{而且} \quad \langle \alpha x | y \rangle = \alpha^* \langle x | y \rangle.$$

注意： α^* 表 α 的共軛複數。

以下我們取定一個內積於 H ，而叫 H 是單直空間或有內積空間 (inner product space or unitary space)。

$$\text{模} \quad \|x\| \equiv \sqrt{\langle x | x \rangle} \text{ 叫 } x \text{ 的模 (Norm)}. \quad (14)$$

$$\text{定理 1} \quad \|x\| \geq 0, \text{ 且 } = 0, \text{ 當且只當 } x = 0 \text{ 時}; \quad (15)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|; \quad (\text{三角不等式}); \quad (16)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|; \quad (17)$$

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (\text{Schwarz 不等式}); \quad (18)$$

等號只在：「 x, y 中的一個是另一個的常數倍」時才成立。

證明 (15) 是直接由 (10) 得來，(17) 是簡單的計算，(18) 如下來證。不論 λ 是什麼樣的實數

$$\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2 \geq 0,$$

$$\text{即 } \langle (x + \lambda \langle y | x \rangle y) | (x + \lambda \langle y | x \rangle y) \rangle \geq 0,$$

$$\text{即 } \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \lambda^2 \langle y | x \rangle \langle x | y \rangle \geq 0,$$

$$\text{故判別式 } |\langle x | y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$

$$\text{即若 } \langle x | y \rangle \neq 0, \text{ 則 } |\langle x | y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

此即 Schwarz 不等式；若 $\langle x | y \rangle = 0$ ，Schwarz 不等式是當然成立的。在 (18) 成為等式時，我們又可以分兩種情形來討論，一個是 $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| = 0$ 的情形，此時或者 $x = 0$ 或是 $y = 0$ ，

即其一爲它一的零倍；另一個是 $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \neq 0$ 的情形，那麼，如上所述， λ 底二次式 $\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2$ 的判別式爲 0，一定有一 λ 值存在，使 $\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2 = 0$ ，即 $x = -\lambda \langle y | x \rangle y$ ，而 x 爲 y 的常數倍。

現在轉到 (16)，那就很簡單：

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \# \end{aligned}$$

距離 在 H 中，若令

$$d(x, y) \equiv \|x - y\| \quad (19)$$

作 x, y 間的距離 (distance) 那麼它滿足所謂距離公理 (metric axioms)：

$$M_1 \quad d(x, y) \geq 0, = 0, \text{ 當且只當 } x = y; \quad (20)$$

$$M_2 \quad d(x, y) = d(y, x); \quad (21)$$

$$M_3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (三角不等式)}. \quad (22)$$

於是有內積的空間 H 就成爲一個有距空間 (metric space)。以有距空間的眼光來看 H ，我們又常把向量 x 叫做點 x 。

收斂與完備 距離既然有意義，我們就可以談論收斂了：當 $\lim d(x_n, x) = 0$ ($n \rightarrow \infty$) 時，我們說點列 (x_n) **收斂到** (converges to) 點 x ， x 稱爲 (x_n) 的極限 (limit)，而用 $\lim x_n = x$ ($n \rightarrow \infty$) 或 $x_n \rightarrow x$ 來表示。當 $x_n \rightarrow x$ 時，由於 $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\|$ ，所以 $\lim \|x_n - x_m\| = 0$ ($n, m \rightarrow \infty$)，換句話說“收斂點列 (x_n) ，必是 Cauchy 點列：

$$\lim d(x_n, x_m) = 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \quad (23)$$

這句話的逆倒不必是真的。但如果它是成立的，即是：“當 (x_n) 是 Cauchy 點列時，必定存在一個點 x ，使 $x_n \rightarrow x$ ”，那麼 H 就叫做 **Hilbert 空間**，[剛剛的這條件，是**完備性** (Completeness) 條件。一個完備的內積空間，就是個 Hilbert 空間，而一個有內積空間，不論它是不是完備，也就叫做一個**準 Hilbert 空間**。完備性的欠缺，是可以有一種“**完備化**”的步驟來補救以後 (§6) 就會談到]。[又，必須注意，在有內積空間 (其實是：在有距空間) 收斂點列 (x_n) 的極限都是唯一的：

若 $x_n \rightarrow x$ ，且 $x_n \rightarrow y$ ，則 $x = y$ ，這是由三角不等式得來的。]

定理 2 內積 $\langle x | y \rangle$ 是 x, y 的連續函數，即是說：若 $x_n \rightarrow x$ 且 $y_n \rightarrow y$ ，則 $\langle x_n | y_n \rangle \rightarrow \langle x | y \rangle$ 。

系理 $x_n \rightarrow x$ 則 $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ 。(模的連續性！)

證明 $\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$ ，故 $\|x_n\|$ 有界 (bounded)，

$$\begin{aligned} \text{且 } \therefore |\langle x | y \rangle - \langle x_n | y_n \rangle| \\ = |\langle x - x_n | y \rangle + \langle x_n | y - y_n \rangle| \\ \leq \|x - x_n\| \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \rightarrow 0. \quad \# \end{aligned}$$

§ 2. Hilbert 空間的例子 $L_2(\alpha, \beta)$

$L_2(\alpha, \beta)$ 設 (α, β) 是實數軸上的一個區間，有限或無限都好。我們考慮所有“定義在這區域上的複數值可測函數 $x(t)$ ，而 $|x|^2$ 為可積分的”，這些函數的總集以 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 表示，要注意：這裏所說的“可積分”都是指 Lebesgue 式的可積。

這個 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 自然地是個線性空間（參看下述定理——證明的首段）——如果我們對於“加法”與“係數乘法”是這樣定義的：

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t); \quad (\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t).$$

其次我們定義兩個 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 中的元 x, y 間的“準內積” (pseudo-unitary product)：為 $\langle x | y \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} x^*(t) y(t) dt$ 。這樣一來，“內積”

的條件 §1, (10) — (13) 中，我們可以證明只有 (10) 不滿足——我們知道：可以拿一個幾乎到處取值 0，而又不全等於 0 的函數 x ，則 $x \neq 0$ ，但 $\langle x | x \rangle = 0$ ，即 §1, 1 的 (10) 不成立。

為了做出一個有內積的空間，我們通常把 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 改造一下：把“幾幾乎到處相同”的兩個函數看做一個東西；換句話說，我們把 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 的元，分做一類一類，兩函數為同類的條件是“幾幾乎到處相同”，這樣的分類是行得通的，於是所有函數類的全體成一個集，寫為 $L_2(\alpha, \beta)$ 。

$L_2(\alpha, \beta)$ 的一元就是 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 的一類函數，我們可以隨便拿出一個函數來代表這元。 $L_2(\alpha, \beta)$ 的元與元之間的加法，內積，或者元與數相乘，這些運算都可以用它們的代表來操作，而且這些操作都和代表的取法無關。這樣，我們可以說： $L_2(\alpha, \beta)$ 是區間 (α, β) 上的平方可積的可測函數之全

體，[到此為止，和 $\mathcal{L}_2(\alpha, \beta)$ 沒區別]，但是，把幾幾乎到處相同的函數們視做同一個元，(向量)。

定理 1 $L_2(\alpha, \beta)$ 是個 Hilbert 空間。

證明 x 及 y 均屬於 $L_2(\alpha, \beta)$ 時， $x + y \in L_2(\alpha, \beta)$ ，這是由於

$$|\gamma + \delta|^2 \leq 2(|\gamma|^2 + |\delta|^2)。$$

又 $\langle x | y \rangle$ 的存在，由

$$2|\gamma\delta| \leq |\gamma|^2 + |\delta|^2$$

就可以知道。現在只要證明對於模

$$\|x\| = \left(\int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

底完備性就可以了。

設 $\lim \|x_n - x_m\| = 0$ ，於是我們取出 (x_n) 的一個適當的子列 $(x_k: k=1, 2, \dots)$ 使得

$$\sum_k \|x_{k+1} - x_k\| < \infty,$$

於是我們令

$$y_m(t) \equiv |x_1(t)| + \sum_{k=1}^{m-1} |x_{k+1} - x_k(t)|,$$

那麼 $y_m \in L_2(\alpha, \beta)$ ，而且對於幾幾乎一切 t ，在 $m \rightarrow \infty$ 時， $\lim y_m(t)$ 存在且 $< \infty$ 。利用 Lebesgue-Fatou 的定理，

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (\lim y_m(t)^2) dt &\leq \lim \int_{\alpha}^{\beta} y_m(t)^2 dt = \lim \|y_m\|^2 \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\|x_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

$$\text{故 } x_m(t) = x_1(t) + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{k+1}(t) - x_k(t)),$$

在 $m \rightarrow \infty$ 時，對幾幾乎一切 t 都收斂，並且極限函數 $x_{\infty}(t) \equiv \lim x_m(t)$ 屬於 $L_2(\alpha, \beta)$ ($\because \|x_m\| \leq \lim \|y_k\|$)。最後，這個 x_{∞} 不

但是 x_m “幾乎逐點收斂”的極限而且也是“模意味下的極限”：

$$\|x_\infty - x_k\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_k\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_{i+1} - x_i\| \rightarrow 0,$$

當 $k \rightarrow \infty$ 時。

再利用不等式，我們可以把子列 (x_m) 的收斂（模意味的）改為函數列 (x_n) 本身的收斂：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_\infty - x_m\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_\infty - x_m\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0. \quad \#$$

注意：我們已在上面證出： $L_2(\alpha, \beta)$ 中的點列 (x_n) 若收斂，（這當然是指模意味下的收斂），那麼我們可找到一個子列 (x_m) 使得它是“幾幾乎逐點地”收斂： $x_m(t) \rightarrow x(t)$ ($k \rightarrow \infty$)，對幾幾乎一切 t 成立。

補註一：空間 $\mathcal{L}_2$ 是個函數空間（function space）：元素都是函數，但空間 L_2 則否！但通常不去區別 $\mathcal{L}_2$ 和 L_2 ！！

補註二： $L_2(\alpha, \beta)$ 是區間 (α, β) 上一切平方可積（Lebesgue 意味的可積）的可測函數之總集，但以幾幾乎到處相同的函數作為相同，在我們的構建過程， (α, β) 區間的性質，我們只用到測度的一面。事實上，隨便拿一個測度空間 (Ω, μ) 來代替區間 (α, β) 也可以，即是，令

$L_2(\Omega)$ 是一切 Ω 上的複數值，平方可積的可測函數之集，而其運算是

$$\left. \begin{aligned} f(\omega) + g(\omega) &\equiv (f+g)(\omega), \\ (\alpha f) \cdot (\omega) &= \alpha \cdot f(\omega) \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega,$$

$$\langle f | g \rangle \equiv \int f^*(\omega) g(\omega) \mu(d\omega),$$

並且，規定幾幾乎到處相同的函數看做相同。我們可以把定理 1 的證明完全重複地拿來用，證明這 $L_2(\Omega)$ 確實是個 Hilbert 空間。

並且，所有的 Hilbert 空間都是這種型式的，我們可以這麼說，（見 §19 的注意）。

例：下面這個 Hilbert 空間的例子，也是這種型式的：令 Ω 是一切自然數之集 N ，以元素數目（cardinal number）來做子集的測度，那麼 $L_2(N)$ 可以這樣來描寫：

$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$ 那樣的複數到 $x \equiv (\xi_n)$ 之全體是個 Hilbert 空間，但對 $x \equiv (\xi_n)$ ， $y \equiv (\eta_n)$ ，我們令

$$x + y \equiv (\xi_n + \eta_n), \quad \alpha x \equiv (\alpha \xi_n), \quad \langle x | y \rangle \equiv \sum \xi_n^* \eta_n;$$

這個空間是古典的 Hilbert 空間。

§ 3. Hilbert 空間的例子 $A_2(G)$

設 G 是 Gauss 平面的一個有欄開域，考慮 G 上的單值解析（正則）函數並且是平方可積的：

$$\iint_G |f(z)|^2 dx dy < \infty, \quad z \equiv x + iy$$

這樣的函數之全體我們以 $A_2(G)$ 表示。

以 $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$ ， $(\alpha f)(z) = \alpha f(z)$ ，

$$\langle f | g \rangle \equiv \iint_G f^*(z) g(z) dx dy, \quad (1)$$

可定出個 Hilbert 空間。

證明：除了完備性之外，其餘的和 $L_2(\alpha, \beta)$ 的情形一樣。不過我們在這裏必須注意： $A_2(G)$ 確是個函數空間，即 $A_2(G)$ 的元是一個函數，而 $L_2(\alpha, \beta)$ 的元是一類函數。[幾幾乎到處相同的解析函數，自然是同一個函數！] 設 (f_n) 是個 Cauchy 點列： $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) 於是仿照 $L_2(\alpha, \beta)$ 的情形，我們可以找到一個 (f_n) 的子列 (f_m) ，使得

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{在 } G \text{ 的幾幾乎一切點上，} \lim f_m(z) = f_\infty(z) \text{ 存在，} \\ \iint |f_\infty(z)|^2 dx dy < \infty. \end{array} \right. \quad (2)$$

我們首先證明 f_∞ 是個解析正則函數。爲了這個，我們只須證明在 G 的一點 z_0 ，總有個鄰區存在使得 (f_m) 在這鄰區內均勻收斂到 f_∞ 就好了。今設 $\{z: |z - z_0| < \gamma\}$ 全含於 G 內，再取 $\gamma_0 > 0$ ， $\delta > 0$ ，使 $\gamma_0 + \delta < \gamma$ ，我們有：當 $|z - z_0| \leq \gamma_0$ 時，區域 $\{w: |w - z| \leq \delta\} \subset \{w: |w - z_0| < \gamma\} \subset G$ ，於是

$$\begin{aligned}
& |f_m(z) - f_n(z)|^2 \\
& \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{|w-z| < \delta} |f_m(w) - f_n(w)|^2 du dv \\
& \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_G |f_m(w) - f_n(w)|^2 du dv \\
& = \frac{1}{\pi \delta^2} \|f_m - f_n\|^2 \rightarrow 0, \quad (m, n \rightarrow \infty); \quad (3)
\end{aligned}$$

即 (f_m) 為均勻收斂於 $|z - z_0| < r_0$ 中。〔上面用到了一個引理：
若 f 正則於開領域 G ，而 $z \in G$ ，

$$\{w : |w - z| \leq \delta\} \subset G, \text{ 則 } |f(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{|w-z| < \delta} |f(w)|^2 du dv. \quad (4)$$

這個證明很簡單，把 f 用 Taylor 展開於 z ，

$$f(w) \equiv \sum_0^\infty a_n (w - z)^n, \quad |w - z| < \delta_0 \left(\delta > 0 \right),$$

$$\text{令 } w - z = \rho e^{i\theta}, \text{ 則 } |f(w)|^2 = \sum_{n,m} a_n a_m^* \rho^{n+m} e^{i(n-m)\theta}$$

在 $|w - z| < \delta$ 內絕對均勻收斂，可以逐項積分，

$$\begin{aligned}
\therefore \iint_{|w-z| < \delta} |f(w)|^2 du dv &= \int_0^\delta \rho d\rho \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 d\theta \\
&= \sum_0^\infty |a_n|^2 \frac{1}{2n+2} \delta^{2n+2} 2\pi \geq \pi \delta^2 |f(z)|^2,
\end{aligned}$$

$$(\because a_0 \equiv f(z)). \quad \#$$

注意：在 $A_2(G)$ ，若 $f_n \rightarrow f$ ，則在 G 之任一緊緻子域 (compact subregion) 上， $f_n(z) \rightarrow f(z)$ 為均勻收斂。

證： $|f_n(z) - f(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{|w-z| < \delta} |f_n(w) - f(w)|^2 du dv,$

$(w \equiv u + iv),$ 故也。