科學圖書大庫

泛函分析導論

(Hilbert空間的算子)

編著者 楊 維 哲

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

泛函分析導論

(Hilbert空間的算子)

編著者　楊　維　哲

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年三月二十七日三版

泛函分析導論

(Hilbert 空間的算子)

基本定價　4.40

編著者　楊維哲　國立台灣大學數學系教授

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話 7813686 / 7815250 號

發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號

承印者　大興圖書印製有限公司　三重市三和路四段一五一號　電話9719739

本書敬獻給

施 拱 星　教授
永田雅宜　教授

楊 維 哲

目 錄

第一部分 Hilbert空間及算子的意義

第一章 Hilbert空間的意義

§1. Hilbert 空間的定義

線性空間（或向量空間） 以複數體（或實數體）作係數域的加法群$\boldsymbol{H}$就叫做線性空間或向量空間（linear space or victor space）。說得明白些，一個線性空間$\boldsymbol{H}$就是這樣的一個不空集，可以定義“加法”及“**係數乘法**”：

若 $x, y \in \boldsymbol{H}$， 則 $x+y \in \boldsymbol{H}$， （1）
若 $x \in \boldsymbol{H}$，α 爲複數（或實數）則 $\alpha \cdot x \in \boldsymbol{H}$； （2）

而這兩種運算必須滿足：

V_1 $x+y=y+x$； （3）
V_2 $(x+y)+z=x+(y+z)$； （4）
V_3 對一切 x, z，必存在唯一的 y 使 $x+y=z$； （5）
V_4 $1 \cdot x = x$； （6）
V_5 $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)\cdot x$； （7）
V_6 $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$； （8）
$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$。 （9）

以上及以下，我們用希臘小字母 α，β 等表示“**數**”（scalar）（即複數體，或對應的實數體的元素），用羅馬小字母 x，y，z 等表示“**向量**”亦即“矢”（vector）（即$\boldsymbol{H}$的元素）。必須注意：一(5)中的 y 由 x，z 唯一地定出，我們寫做 $y \equiv z-x$，而$O_x \equiv x-x$ 和 x 是無關的。它有：$y+O_x=y$，對一切 y 都成立，而且$0 \cdot y=O_x$，$(-1)y=O_x-y$，等等。這是很容易證明的。由於這個緣故，我們把向量O_x寫做O，把 $(-1)y$ 寫做 $-y$，不致於引起混淆。

內積 如果：對於$\boldsymbol{H}$的任何兩元 x，y 所做成的有序的一對 (x, y)，

能夠定出一個複數，寫做$<x\,|\,y>$，而且又滿足下述的條件；那麼：這個$<\,|\,>$就叫做$\boldsymbol{H}$上的一個內積或**單直積**（inner-product or unitary product）。——條件是：

U.1. $<x\,|\,x>\geqslant 0$，且$=0$，只當$x=0$時；　(10)

U.2. $<x\,|\,y>^*=<y\,|\,x>$；（**Hermite 對稱性**）；　(11)

U.3. $<x\,|\,y_1+y_2>=<x\,|\,y_1>+<x\,|\,y_2>$；　(12)

$<x\,|\,\alpha y>=\alpha<x\,|\,y>$。　(13)

［即$<x\,|\,y>$對y是綫性的（linear）。］這樣一來，

$$<x_1+x_2\,|\,y>=<x_1\,|\,y>+<x_2\,|\,y>;$$

而且 $$<\alpha x\,|\,y>=\alpha^*<x\,|\,y>\text{。}$$

注意：α^*表α的共軛複數。

以下我們取定一個內積於$\boldsymbol{H}$，而叫$\boldsymbol{H}$是**單直空間**或**有內積空間**（inner product space or unitary space）。

模　$\|x\|\equiv\sqrt{<x\,|\,x>}$　叫x的**模**（Norm）。　(14)

定理 1　$\|x\|\geqslant 0$，且$=0$，當且只當$x=0$時；　(15)

$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；（**三角不等式**）；　(16)

$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$；　(17)

$|<x\,|\,y>|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$，（**Schwarz 不等式**）；　(18)

等號只在：「x，y中的一個是另一個的常數倍」時才成立。

證明　(15) 是直接由 (10) 得來，(17) 是簡單的計算，(18) 如下來證。不論λ是什麼樣的實數

$$\|x+\lambda<y\,|\,x>y\|^2\geqslant 0,$$

即 $$<(x+\lambda<y\,|\,x>y)\,|\,(x+\lambda<y\,|\,x>y)>\geqslant 0,$$

即 $$\|x\|^2+2\lambda\,|<x\,|\,y>|^2+\lambda^2|<y\,|\,x>|^2\|y\|^2\geqslant 0,$$

故判別式 $$|<x\,|\,y>|^4-\|x\|^2\|y\|^2|<y\,|\,x>|^2\leqslant 0,$$

即，若 $<x\,|\,y>\neq 0$，則 $|<x\,|\,y>|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$。

此即 Schwarz 不等式；若$<x\,|\,y>=0$，Schwarz 不等式是當然成立的。在 (18) 成為等式時，我們又可以分兩種情形來討論，一個是$|<x\,|\,y>|=\|x\|\cdot\|y\|=0$的情形，此時或者$x=0$或是$y=0$，

即其一爲它一的零倍；另一個是 $|\langle x|y\rangle|=\|x\|\cdot\|y\|\neq 0$ 的情形，那麼，如上所述，λ 底二次式 $\|x+\lambda\langle y|x\rangle y\|^2$ 的判別式爲0，一定有某一 λ 值存在，使 $\|x+\lambda\langle y|x\rangle\|^2=0$，即 $x=-\lambda\langle y|x\rangle y$，而 x 爲 y 的常數倍。

現在轉到（16），那就很簡單：

$$\|x+y\|^2=\langle x+y|x+y\rangle=\|x\|^2+\langle x|y\rangle+\langle y|x\rangle+\|y\|^2$$
$$\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2 \qquad \#$$

距離　在 $\boldsymbol{H}$ 中，若令

$$d(x,y)\equiv\|x-y\| \tag{19}$$

作 x，y 間的距離（distance）那麼它滿足所謂**距離公理**（metric axioms）：

$$M_1 \quad d(x,y)\geqslant 0,\ =0,\ \text{當且只當 } x=y; \tag{20}$$
$$M_2 \quad d(x,y)=d(y,x); \tag{21}$$
$$M_3 \quad d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)\ \text{（三角不等式）。} \tag{22}$$

於是有內積的空間 $\boldsymbol{H}$ 就成爲一個**有距空間**（metric space）。以有距空間的眼光來看 $\boldsymbol{H}$，我們又常把向量 x 叫做點 x。

收斂與完備　距離既然有意義，我們就可以談論收斂了：當 $\lim d(x_n,x)=0$（$n\to\infty$）時，我們說點列（x_n）**收斂到**（converges to）點 x，x 稱爲（x_n）的**極限**（limit），而用 $\lim x_n=x$（$n\to\infty$）或 $x_n\to x$ 來表示。當 $x_n\to x$ 時，由於 $\|x_n-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$，所以 $\lim\|x_n-x_m\|=0$（$n,m\to\infty$），換句話說"收斂點列（x_n），必是 Cauchy 點列：

$$\lim d(x_n,x_m)=0 \quad (n,m\to\infty)\text{"} \tag{23}$$

這句話的逆倒不必是眞的。但如果它是成立的，即是："當（x_n）是Cauchy點列時，必定存在一個點 x，使 $x_n\to x$"，那麼 $\boldsymbol{H}$ 就叫做 **Hilbert空間**，[剛剛的這條件，是**完備性**（Completeness）條件。一個完備的內積空間，就是個Hilbert 空間，而一個有內積空間，不論它是不是完備，也就叫做一個**準Hilbert空間**。完備性的欠缺，是可以用一種"**完備化**"的步驟來補救以後（§6）就會談到]。[又，必須注意，在有內積空間（其實是：在有距空間）收斂點列（x_n）的極限都是唯一的：

若 $x_n \to x$，且 $x_n \to y$，則 $x = y$，這是由三角不等式得來的。]

定理 2 內積 $<x | y>$ 是 x，y 的連續函數，即是說：若 $x_n \to x$ 且 $y_n \to y$，則 $<x_n | y_n> \to <x | y>$。

系理 $x_n \to x$ 則 $\|x_n\| \to \|x\|$。(**模的連續性!**)

證明 $\|x_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$，故 $\|x_n\|$ **有界** (bounded)，

且
$$\begin{aligned} \therefore & |<x | y> - <x_n | y_n>| \\ &= |<x - x_n | y> + <x_n | y - y_n>| \\ &\leqslant \|x - x_n\| \, \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \to 0。 \end{aligned}$$
#

§2. Hilbert 空間的例子 $L_2(\alpha, \beta)$

$L_2(\alpha, \beta)$ 設 (α, β) 是實數軸上的一個區間，有限或無限都好。我們考慮所有"定義在這區域上的複數值可測函數 $x(t)$，而 $|x|^2$ 爲可積分的"，這些函數的總集以 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 表示，要注意：這裏所說的"可積分"都是指 Lebesgue 式的可積。

這個 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 自然地是個線性空間（參看下述定理一證明的首段）——如果我們對於"加法"與"係數乘法"是這樣定義的：

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t); \quad (\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t)。$$

其次我們定義兩個 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 中的元 x，y 間的"**準內積**"(pseudo-unitary product)：爲 $<x | y> = \int_\alpha^\beta x^*(t) \, y(t) \, dt$。這樣一來，"內積"的條件 §1，(10) — (13) 中，我們可以證明只有 (10) 不滿足——我們知道：可以拿一個幾乎到處取值 0，而又不全等於 0 的函數 x，則 $x \neq 0$，但 $<x | x> = 0$，即 §1, 1 的 (10) 不成立。

爲了做出一個有內積的空間，我們通常把 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 改造一下：把"幾幾乎到處相同"的兩個函數看做一個東西；換句話說，我們把 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 的元，分做一類一類，兩函數爲同類的條件是"幾幾乎到處相同"，這樣的分類是行得通的，於是所有函數類的全體成功一個集，寫爲 $L_2(\alpha, \beta)$。$L_2(\alpha, \beta)$ 的一元就是 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 的一類函數，我們可以隨便拿出一個函數來代表這元。$L_2(\alpha, \beta)$ 的元與元之間的加法，內積，或者元與數相乘，這些運算都可以用它們的代表來操作，而且這些操作都和代表的取法無關。這樣，我們可以說：$L_2(\alpha, \beta)$ 是區間 (α, β) 上的平方可積的可測函數之全

體，[到此爲止，和$\mathfrak{L}_2(\alpha,\beta)$沒區別]，但是，把幾幾乎到處相同的函數們視做同一個元，（向量）。

定理1 $L_2(\alpha,\beta)$是個Hilbert空間。

證明 x及y均屬於$L_2(\alpha,\beta)$時，$x+y\in L_2(\alpha,\beta)$，這是由於

$$|\gamma+\delta|^2\leqslant 2(|\gamma|^2+|\delta|^2)。$$

又$\langle x|y\rangle$的存在，由

$$2|\gamma\delta|\leqslant|\gamma|^2+|\delta|^2$$

就可以知道。現在只要證明對於模

$$\|x\|=\left(\int_\alpha^\beta|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

底完備性就可以了。

設$\lim\|x_n-x_m\|=0$，於是我們取出(x_n)的一個適當的子列$(x_{\underline{k}}:k=1,2,\cdots)$使得

$$\sum_k\|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}\|<\infty,$$

於是我們令

$$y_m(t)\equiv|x_{\underline{1}}(t)|+\sum_{k=1}^{m-1}|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}(t)|,$$

那麼$y_m\in L_2(\alpha,\beta)$，而且對於幾幾乎一切t，在$m\to\infty$時，$\lim y_m(t)$存在且$<\infty$。利用Lebesgue-Fatou的定理，

$$\int_\alpha^\beta(\lim y_m(t)^2)dt\leqslant\lim\int_\alpha^\beta y_m(t)^2\,dt=\lim\|y_m\|^2$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\left(\|x_{\underline{1}}\|+\sum_{k=1}^{m-1}\|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}\|\right)^2<\infty,$$

故 $$x_{\underline{m}}(t)=x_{\underline{1}}(t)+\sum_{k=1}^{m-1}(x_{\underline{k+1}}(t)-x_{\underline{k}}(t)),$$

在$m\to\infty$時，對幾幾乎一切t都收斂，並且極限函數$x_\infty(t)\equiv\lim x_{\underline{m}}(t)$屬於$L_2(\alpha,\beta)$（$\because\|x_{\underline{m}}\|\leqslant\lim\|y_k\|$）。最後，這個$x_\infty$不

但是 $x_{\underline{m}}$ "幾乎逐點收斂" 的極限而且也是 "模意味下的極限"：

$$\| x_\infty - x_{\underline{k}} \| = \lim_{m\to\infty} \| x_{\underline{m}} - x_{\underline{k}} \| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \| x_{\underline{i+1}} - x_{\underline{i}} \| \longrightarrow 0 ,$$

當 $k\to\infty$時。

再利用不等式，我們可以把子列 ($x_{\underline{m}}$) 的收斂（模意味的）改爲函數列 (x_n) 本身的收斂：

$$\lim_{m\to\infty} \| x_\infty - x_m \| \leqslant \lim \| x_\infty - x_{\underline{m}} \| + \lim \| x_{\underline{m}} - x_m \| = 0 。 \qquad \#$$

注意：我們已在上面證出：$L_2(\alpha,\beta)$ 中的點列 (x_n) 若收斂,(這當然是指模意味下的收斂),那麼我們可找到一個子列 ($x_{\underline{m}}$)使得它是 "幾幾乎逐點地" 收斂：$x_{\underline{m}}(t) \to x(t)$ ($k\to\infty$),對幾幾乎一切 t 成立。

補註一：空間$\mathfrak{L}_2$ 是個**函數空間** (function space) ∵元素都是函數，但空間 L_2 則否！但通常不去區別$\mathfrak{L}_2$和L_2!!

補註二：$L_2(\alpha,\beta)$ 是區間 (α,β) 上一切平方可積 (Lebesque 意味的可積) 的可測函數之總集，但以幾幾乎到處相同的函數作爲相同，在我們的構建過程，(α,β) 區間的性質，我們只用到測度的一面。事實上，隨便拿一個測度空間 (Ω, μ) 來代替區間 (α,β) 也可以，即是，令

L_2 (Ω) 是一切Ω上的複數値，平方可積的可測函數之集，而其運算是

$$\left.\begin{array}{l} f(\omega) + g(\omega) \equiv (f+g)(\omega), \\ (\alpha f)\cdot(\omega) = \alpha\cdot f(\omega) \quad , \end{array}\right\} \quad \omega \in \Omega,$$
$$\langle f \mid g \rangle \equiv \int f^*(\omega)\, g(\omega)\, \mu(d\omega),$$

並且，規定幾乎到處相同的函數看做相同。我們可以把定理 1 的證明完全重複地拿來用，證明這 $L_2(\Omega)$ 確實是個Hilbert 空間。

並且，所有的Hilbert 空間都是這種型式的，我們可以這麼說，(見 § 19 的注意)。

例：下面這個Hilbert 空間的例子，也是這種型式的：令Ω是一切自然數之集N，以元素**數目** (cardinal number) 來做子集的測度，那麼 $L_2(N)$ 可以這樣來描寫：

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$ 那樣的複數到 $x\equiv(\xi_n)$ 之全體是個Hilbert空間，但對 $x\equiv(\xi_n)$，$y\equiv(\eta_n)$，我們令

$$x+y\equiv(\xi_n+\eta_n),\quad \alpha x\equiv(\alpha\xi_n),\quad <x|y>\equiv\sum\xi_n^*\eta_n;$$

這個空間是**古典的 Hilbert 空間**。

§ 3. Hilbert 空間的例子 $A_2(G)$

設 G 是Gauss平面的一個有欄開域，考慮 G 上的單值解析（正則）函數並且是平方可積的：

$$\iint_G |f(z)|^2\,dxdy<\infty,\quad z\equiv x+iy$$

這樣的函數之全體我們以 $\underline{A_2(G)}$ 表示。

以 $$(f+g)(z)=f(z)+g(z),\quad (\alpha f)(z)=\alpha f(z),$$

$$<f|g>\equiv\iint_G f^*(z)\,g(z)\,dxdy, \tag{1}$$

可定出個 Hilbert 空間。

證明：除了完備性之外，其餘的和 $L_2(\alpha,\beta)$ 的情形一樣。不過我們在這裏必須注意：$A_2(G)$ 確是個函數空間，即 $A_2(G)$ 的元是一個函數，而 $L_2(\alpha,\beta)$ 的元是一類函數。［幾幾乎到處相同的解析函數，自然是同一個函數！］ 設 (f_n) 是個Canchy 點列：$\|f_n-f_m\|\to 0$ $(n\to,\ m\to\infty)$ 於是仿照 $L_2(\alpha,\beta)$ 的情形，我們可以找到一個(f_n) 的子列 $(f_{\underline{m}})$，使得

$$\begin{cases} \text{在} G \text{的幾幾乎一切點上，} \lim f_{\underline{m}}(z)=f_\infty(z) \text{ 存在,} \\ \iint |f_\infty(z)|^2\,dxdy<\infty\text{。} \end{cases} \tag{2}$$

我們首先證明 f_∞ 是個解析正則函數。爲了這個，我們只須證明在 G 的一點 z_0，總有個鄰區存在使得 $(f_{\underline{m}})$在這鄰區內均勻收斂到 f_∞ 就好了。今設 $\{z:|z-z_0|<\gamma\}$ 全含於 G 內，再取 $\gamma_0>0$，$\delta>0$，使 $\gamma_0+\delta<\gamma$，我們有：當 $|z-z_0|\leqslant\gamma_0$ 時，區域 $\{w:|w-z|\leqslant\delta\}\subset\{w:|w-z_0|<\gamma\}\subset G$，於是

$$
\begin{aligned}
& |f_m(z)-f_n(z)|^2 \\
\leqslant & \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{|w-z|<\delta} |f_m(w)-f_n(w)|^2 \, du\, dv \\
\leqslant & \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{G} |f_m(w)-f_n(w)|^2 \, du\, dv \\
= & \frac{1}{\pi\delta^2} \|f_m - f_n\|^2 \to 0 \ , \quad (m,n\to\infty); \qquad (3)
\end{aligned}
$$

即 (f_m) 爲均匀收斂於 $|z-z_0|<\gamma_0$ 中。[上面用到了一個引理：若 f 正則於開領域 G，而 $z\in G$，

$$\{w: |w-z|\leqslant\delta\}\subset G \text{，則 } |f(z)|^2\leqslant\frac{1}{\pi\delta^2}\iint\limits_{|w-z|<\delta}|f(w)|^2 du\,dv。 \qquad (4)$$

這個證明很簡單，把 f 用 Taylor 展開於 z，

$$f(w)\equiv\sum_0^\infty a_n(w-z)^n\ , \qquad |w-z|<\delta_0(>\delta>0),$$

令 $w-z=\rho e^{i\theta}$，則 $|f(w)|^2=\sum\limits_{n,m} a_n a_m^* \rho^{n+m} e^{i(n-m)\theta}$

在 $|w-z|<\delta$ 內絕對均匀收斂，可以逐項積分，

$$
\begin{aligned}
\therefore \iint\limits_{|w-z|<\delta} |f(w)^2|\, du\,dv &= \int_0^\delta \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 d\theta \\
&= \sum_0^\infty |a_n|^2 \frac{1}{2n+2}\delta^{2n+2}\, 2\pi \geqslant \pi\delta^2 |f(z)|^2 , \\
& \qquad (\because\ a_0\equiv f(z))\ 。 \#
\end{aligned}
$$

注意：在 $A_2(G)$，若 $f_n\to f$，則在 G 之任一緊緻子域（compact subregion）上，$f_n(z)\to f(z)$ 爲均匀收斂。

證：$|f_n(z)-f(z)|^2 \leqslant \dfrac{1}{\pi\delta^2} \displaystyle\iint\limits_{|w-z|<\delta} |f_n(w)-f(w)|^2\,du\,dv$,

$(w \equiv u+iv)$, 故也。