北京大学数学教学系列丛书

本科生
数学基础课教材

高等代数简明教程

下册

蓝以中　编著

北京大学出版社

北京大学数学教学系列丛书

高等代数简明教程

（下　册）

蓝以中　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等代数简明教程. 下册/蓝以中编著. —北京:北京大学出版社,2002.8

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-05579-X

Ⅰ.高… Ⅱ.蓝… Ⅲ.高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 022926 号

书　　名:**高等代数简明教程**(下册)
著作责任者:蓝以中　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05579-X/O・0542
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn　　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　邮购部 62752019
排 版 者:高新特激光照排中心　62637627
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
　　890×1240　A5 开本　9 印张　250 千字
　　2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:13.50 元

目　录

第六章　带度量的线性空间

本章的内容，是利用第五章关于对称双线性函数和二次型的理论，在实数域和复数域上的线性空间中引进度量，使线性空间的理论得以发展提高. 与之相应地，是深入讨论这类线性空间中与度量性质密切联系的一些特殊类型的线性变换，从而使线性变换理论也得以前进一步.

§1　欧几里得空间的定义和基本性质

1. 欧几里得空间的定义

定义　设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 如果 V 内任意两个向量 α,β 都按某一法则对应于 $\mathbb{R}$ 内一个惟一确定的数，记作 (α,β)，且满足：

(i) 对任意 $k_1,k_2\in\mathbb{R}$ 和任意 $\alpha_1,\alpha_2,\beta\in V$，有

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta),=k_1(\alpha_1,\beta)+k_2(\alpha_2,\beta);$$

(ii) 对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha);$$

(iii) 对任意 $\alpha\in V$，有 $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$，且 $(\alpha,\alpha)=0$ 的充分必要条件是 $\alpha=0$，

则称 (α,β) 为向量 α,β 的**内积**. 定义了这种内积的实数域上线性空间称为**欧几里得空间**，简称**欧氏空间**.

从性质(i)和(ii)可知，对任意 $l_1,l_2\in\mathbb{R}$ 和任意 $\alpha,\beta_1,\beta_2\in V$，有

$$\begin{aligned}(\alpha,l_1\beta_1+l_2\beta_2)&=(l_1\beta_1+l_2\beta_2,\alpha)\\&=l_1(\beta_1,\alpha)+l_2(\beta_2,\alpha)\\&=l_1(\alpha,\beta_1)+l_2(\alpha,\beta_2).\end{aligned}$$

把这性质和(i)，(ii)结合起来就可以看出，(α,β) 实际上是 V 内一个

对称双线性函数. 如果 V 是有限维的线性空间,那么性质(iii)表明 (α,α) 是一个正定二次型函数,即 (α,β) 在 V 的任一组基下的矩阵都是正定矩阵. 反过来,如果在 V 内给定一个对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$,且 $f(\alpha,\alpha)$ 是一个正定二次型函数,则只要把 V 内两个向量的内积定义为

$$(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta),$$

那么,V 关于这个内积成一欧氏空间. 由此可知：$\mathbb{R}$ 上有限维线性空间的内积概念和正定二次型概念之间有密切的关系.

如果把三维几何空间(是 $\mathbb{R}$ 上三维线性空间)中向量的点乘定义为其内积,即定义 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,则三维几何空间即是欧氏空间. 现在对一般欧氏空间定义了内积,我们就可以利用它给出欧氏空间内向量的长度和夹角的概念,所用的办法与三维几何空间中用向量点乘定义其长度、夹角的办法相同.

I. 向量的长度

对任意 $\alpha\in V$,定义

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)},$$

称为 α 的**长度**或**模**. 从内积的性质(iii)可知,$|\alpha|=0$ 的充分必要条件是 $\alpha=0$. $|\alpha|=1$ 时,称 α 为**单位向量**.

对任一 $k\in\mathbb{R}$,有

$$|k\alpha|=\sqrt{(k\alpha,k\alpha)}=|k|\cdot|\alpha|.$$

由此知,当 $\alpha\neq 0$ 时,$\left|\frac{1}{|\alpha|}\alpha\right|=\frac{1}{|\alpha|}\cdot|\alpha|=1$,即 $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 为一单位向量,我们称它为 α 的**单位化**.

II. 向量的夹角

为了定义一般欧氏空间 V 内向量夹角的概念,我们需要如下的命题：

命题 1.1　对欧氏空间 V 内任意两个向量 α,β,有

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\cdot|\beta|,$$

等号成立的充分必要条件是：α,β 线性相关.

证　当 $\alpha=0$ 时,命题显然正确. 现设 $\alpha\neq 0$. 令 $\gamma=t\alpha+\beta$,则

$$0 \leqslant (\gamma,\gamma) = (t\alpha + \beta,\ t\alpha + \beta)$$
$$= (\alpha,\alpha)t^2 + 2(\alpha,\beta)t + (\beta,\beta).$$

上式右端是 t 的二次多项式，其值恒$\geqslant 0$，故它没有相异的实根（否则，因 t^2 项系数$(\alpha,\alpha)>0$，它在两实根之间函数值为负）. 因而，其判别式

$$[2(\alpha,\beta)]^2 - 4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) \leqslant 0,$$

故

$$|(\alpha,\beta)| \leqslant |\alpha| \cdot |\beta|.$$

显然等号成立（即判别式等于零）的充分必要条件是：上述二次多项式有实根（二重根）$t=k$. 这等价于

$$(k\alpha+\beta, k\alpha+\beta) = 0.$$

由内积的性质(iii)知，后者等价于 $k\alpha+\beta=0$，即 α,β 线性相关. ▌

命题 1.1 称为**柯西-布尼雅可夫斯基**(Cauchy-Буняковский)**不等式**.

现在可以给出欧氏空间 V 内向量夹角的定义. 对 V 内任意两个非零向量 α,β，由命题 1.1，$\left|\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|}\right| \leqslant 1$，所以可以定义

$$\langle \alpha,\beta \rangle = \arccos \frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha| \cdot |\beta|},$$

称之为 α 与 β 的**夹角**. 注意这样定义的两向量的夹角总介于 0 与 π 之间. 零向量与其他向量的夹角认为是不确定的.

如果$(\alpha,\beta)=0$，则称 α 与 β **正交**，记作 $\alpha \perp \beta$. 当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时，这与$\langle \alpha,\beta \rangle = \frac{\pi}{2}$等价. 显然，零向量与任意向量正交.

下面举几个例子.

例 1.1 考虑实数域上 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$，对

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n), \quad \beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

定义

$$(\alpha,\beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

显然，二元函数(α,β)满足内积定义中的条件(i)～(iii)，于是 $\mathbb{R}^n$ 关于这个内积成一欧氏空间. 我们约定：今后凡称 $\mathbb{R}^n$ 为欧氏空间时，其内积都是按上述法则定义的（除了有特别声明的情况而外）.

我们知道 $\mathbb{R}^n$ 有一组基

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),$$
$$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1).$$

显然有 $|\varepsilon_i|=1(i=1,2,\cdots,n)$，即 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 都是单位向量. 另一方面，不难算出 $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0(i\neq j)$. 故这 n 个向量两两正交. 上面两条性质可简记为

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}.$$

在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 内，向量的长度和夹角可分别用公式表示如下：

$$|\alpha|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2};$$
$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}.$$

而柯西-布尼雅可夫斯基不等式可具体写成

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|$$
$$\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

例 1.2　考虑闭区间 $[a,b]$ 上全体实连续函数所组成的实数域上线性空间 $C[a,b]$. 对任意 $f,g\in C[a,b]$，定义

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

二元函数 (f,g) 显然满足内积定义中的条件(i)与(ii). 另一方面，显然有 $(f,f)\geqslant 0$. 而当

$$(f,f)=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$$

时，由定积分的知识知，在 $[a,b]$ 内 $f(x)\equiv 0$. 即 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的零函数，从而是 $C[a,b]$ 中的零向量. 因而内积的三个条件均满足. 于是 $C[a,b]$ 关于这个内积成一欧氏空间. 在这欧氏空间内，柯西-布尼雅可夫斯基不等式可具体写成

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

例 1.3 考察 $\mathbb{R}[x]_n$. 用两种方式在这个线性空间内定义内积：

(i) 对任意 $f,g\in\mathbb{R}[x]_n$，定义

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

内积条件(i)，(ii)显然满足，且$(f,f)\geqslant 0$. 当

$$(f,f)=\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t=0$$

时，在$[0,1]$内 $f(x)\equiv 0$. $f(x)$不恒等于零时其次数$<n$，最多有$n-1$个根，故必定在$(-\infty,\infty)$内$f(x)\equiv 0$. 于是 $\mathbb{R}[x]_n$ 关于上述内积成一欧氏空间.

(ii) 对任意 $f,g\in\mathbb{R}[x]_n$，定义

$$(f,g)=\sum_{k=1}^{n}f(k)g(k).$$

二元函数(f,g)显然满足内积条件(i)与(ii)，且$(f,f)\geqslant 0$. 而当

$$(f,f)=\sum_{k=1}^{n}f^2(k)=0$$

时，有 $f(1)=f(2)=\cdots=f(n)=0$. 即 $f(x)$有 n 个不同实根，而$f(x)$不为零多项式时，其次数$\leqslant n-1$，矛盾. 故 $f(x)\equiv 0$. 于是 $\mathbb{R}[x]_n$ 关于这个新内积也成为一个欧氏空间.

对于实数域上的同一个线性空间 V，当我们用不同的方法来定义它的内积时，所得的欧氏空间认为是互不相同的.

2. 有限维的欧氏空间

设 V 是一个 n 维欧氏空间，而

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$$

是它的一组基. 令

$$G=\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ (\varepsilon_2,\varepsilon_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix},$$

称 G 为内积(α,β)在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的**度量矩阵**，它实际上就是对称双线性函数(α,β)在这组基下的矩阵. 因此，它必定是一个实对称

矩阵.而且有

1）根据内积的条件(iii)，(α,β)在任一组基下的度量矩阵都是正定矩阵；

2）如果(α,β)在另一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的度量矩阵为 $\overline{G}=((\eta_i,\eta_j))$，而

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T,$$

则 $\overline{G}=T'GT$，即内积在不同基下的度量矩阵互相合同；

3）内积可用其度量矩阵

$$G=(g_{ij}),\quad g_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)\ (i,j=1,2,\cdots,n)$$

表达如下：

$$(\alpha,\beta)=X'GY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_iy_j,$$

其中

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n.$$

上面三条都是把第五章中关于双线性函数所获得的一般结论应用于内积(α,β)这一特殊的双线性函数而得到的.

现在我们给出有限维欧氏空间 V 中的类似于三维几何空间中的直角坐标系的一个重要概念.我们先证一个命题.

命题 1.2　设欧氏空间 V 内 s 个非零向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 两两正交，则它们线性无关.

证　若

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0,$$

两边用 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$作内积，有

$$k_1(\alpha_1,\alpha_i)+k_2(\alpha_2,\alpha_i)+\cdots+k_s(\alpha_s,\alpha_i)=k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0.$$

因 $\alpha_i\neq0$，故$(\alpha_i,\alpha_i)\neq0$，即有 $k_i=0$. 这表明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. ▌

定义　n 维欧氏空间 V 中 n 个两两正交的单位向量

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$$

称为 V 的一组**标准正交基**.

由命题 1.2 知，标准正交基是 V 的一组基.显然，V 内 n 个向量

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是一组标准正交基，等价于

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

即等价于内积(α,β)在这组基下的度量矩阵是单位矩阵 E.

上面例 1.1 中已给出 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基.

下面我们讨论有关标准正交基的几个问题.

I. 标准正交基的存在性

设 V 是 n 维欧氏空间，在 V 内任取一组基

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,$$

已知内积在这组基下的度量矩阵 G 是一个正定矩阵. 由第五章命题 4.1 知，G 合同于单位矩阵，即有实可逆矩阵 T，使 $T'GT=E$. 令

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)T,$$

则(α,β)在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵为 E，从而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基. 这证明任一有限维欧氏空间都存在标准正交基.

II. 两组标准正交基间的过渡矩阵

定义 设 $\mathbb{R}$ 上一个 n 阶方阵 T 满足

$$T'T=E,$$

亦即 $T'=T^{-1}$，则称 T 为**正交矩阵**.

显然，定义中的 $T'T=E$ 也可换成 $TT'=E$.

例如二维几何平面上两个直角坐标系的坐标变换矩阵

$$T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

就满足 $T'T=E$，所以这是一个二阶正交矩阵. 对一般有限维欧氏空间，我们有与此相应的结论.

命题 1.3 在 n 维欧氏空间 V 内给定一组标准正交基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,$$

令

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T,$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是一组标准正交基的充分必要条件是：T 是一个正交矩阵.

证 必要性 若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 与 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 都是标准正交基，则

(α,β)在这两组基下的度量矩阵都是 E，而且它们合同：$T'ET=E$，即 $T'T=E$，于是 $T'=T^{-1}$，即 T 为正交矩阵.

充分性　若 T 是正交矩阵，则 T 可逆，于是 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 也是 V 的一组基. (α,β)在这组基下的矩阵 G 与它在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵 E 合同：$G=T'ET=T'T=E$. 故 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一组标准正交基. ▌

命题 1.3 给出了正交矩阵的一个等价定义：正交矩阵就是标准正交基之间的过渡矩阵. 下面再给出一个等价表述. 设

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

把 T 的行向量组

$$\alpha_i=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{in})\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

看作欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组，按 $\mathbb{R}^n$ 中内积的定义(对应坐标相乘后连加)，$TT'=E$ 用矩阵 T 的元素具体写出来是

$$t_{i1}t_{j1}+t_{i2}t_{j2}+\cdots+t_{in}t_{jn}=\delta_{ij},$$

它等价于$(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}$，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内一组标准正交基. 如把 T 的列向量组写出：

$$\beta_i=\begin{bmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{ni} \end{bmatrix}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

把它们也看作 $\mathbb{R}^n$ 中向量组，则 $T'T=E$ 等价于

$$(\beta_i,\beta_j)=t_{1i}t_{1j}+t_{2i}t_{2j}+\cdots+t_{ni}t_{nj}=\delta_{ij},$$

即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组标准正交基. 把上面的讨论综合起来，得如下命题：

命题 1.4　实数域上的 n 阶方阵 T 是正交矩阵的充分必要条件是下面各条件之一成立：(i) $T'=T^{-1}$；(ii) $T'T=E$；(iii) $TT'=E$；

(iv) T 为 n 维欧氏空间 V 内两组标准正交基间的过渡矩阵;(v) T 的行向量组为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基;(vi) T 的列向量组为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

Ⅲ. 标准正交基的求法

下面我们介绍具体寻求欧氏空间 V 的标准正交基的办法,这个方法通常称为**施密特**(Schmidt)**正交化方法**.

我们把问题提的更一般一些:给定 V 中一个线性无关的向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s. \tag{Ⅰ}$$

要求作出一个新向量组

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s, \tag{Ⅱ}$$

满足如下两个条件:

(i) $L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)$ $(i=1,2,\cdots,s)$;

(ii) $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s$ 两两正交.

向量组(Ⅱ)可用如下办法给出

$$\varepsilon_1=\alpha_1,$$

$$\varepsilon_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_{i+1}=\alpha_{i+1}-\frac{(\alpha_{i+1},\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_{i+1},\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2-\cdots-\frac{(\alpha_{i+1},\varepsilon_i)}{(\varepsilon_i,\varepsilon_i)}\varepsilon_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_s,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\varepsilon_{s-1})}{(\varepsilon_{s-1},\varepsilon_{s-1})}\varepsilon_{s-1}.$$

不难看出,上面构造出来的向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s$ 具有所要求的条件:

(i) 把上述等式右方带负号的项移到左端,即可看出向量组(Ⅰ)的前 i 个向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 可由向量组(Ⅱ)的前 i 个向量 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i$ 线性表示.反过来,因为 $\varepsilon_1=\alpha_1$,而

$$\varepsilon_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\alpha_1,$$

由此递推不难看出 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 线性表示，于是两个向量组等价，即

$$L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_i)\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 线性无关，从上式可知，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_i$ 也线性无关，因而其中不会出现零向量，故 $(\varepsilon_i,\varepsilon_i)\neq 0$. 在上面的公式中用它们作分母是有意义的.

(ii) 显然有

$$(\varepsilon_2,\varepsilon_1)=(\alpha_2,\varepsilon_1)-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}(\varepsilon_1,\varepsilon_1)=0.$$

假设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i$ 两两正交，由上面 ε_{i+1} 的表达式不难证明：ε_{i+1} 与每个 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_i$ 正交，从而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s$ 两两正交.

如果在 V 中任取一组基

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,$$

利用施密特正交化方法求得与之等价的向量组

$$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n',$$

这是 V 的一组基，两两正交. 只要把每个向量 ε_i' 单位化之后，即得 V 的一组标准正交基.

例 1.4 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中取定一组基

$$\alpha_1=(1,1,0,0);\qquad \alpha_2=(1,0,1,0);$$
$$\alpha_3=(-1,0,0,1);\quad \alpha_4=(1,-1,-1,1).$$

把它们正交化：

$$\varepsilon_1'=\alpha_1=(1,1,0,0),$$

$$\varepsilon_2'=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1')}{(\varepsilon_1',\varepsilon_1')}\varepsilon_1'=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right),$$

$$\varepsilon_3'=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_1')}{(\varepsilon_1',\varepsilon_1')}\varepsilon_1'-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_2')}{(\varepsilon_2',\varepsilon_2')}\varepsilon_2'=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\right),$$

$$\varepsilon_4'=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\varepsilon_1')}{(\varepsilon_1',\varepsilon_1')}\varepsilon_1'-\frac{(\alpha_4,\varepsilon_2')}{(\varepsilon_2',\varepsilon_2')}\varepsilon_2'-\frac{(\alpha_4,\varepsilon_3')}{(\varepsilon_3',\varepsilon_3')}\varepsilon_3'$$
$$=(1,-1,-1,1).$$

再把每个向量单位化，得

$$\varepsilon_1=\frac{1}{|\varepsilon_1'|}\varepsilon_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{|\varepsilon_2'|}\varepsilon_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0\right),$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{|\varepsilon_3'|}\varepsilon_3'=\left(-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{3}{\sqrt{12}}\right),$$

$$\varepsilon_4=\frac{1}{|\varepsilon_4'|}\varepsilon_4'=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

这就得到$\mathbb{R}^4$内的一组标准正交基.如以它们为列向量(或行向量)排成一个四阶方阵

$$T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

那么,按命题 1.4,这是一个正交矩阵,$T'T=TT'=E$.

例 1.5 在$\mathbb{R}[x]_4$内定义内积

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

使之成一欧氏空间.给定线性无关向量组

$$1,\ x,\ x^2,$$

把它正交化:

$$\varepsilon_1'=1,$$

$$\varepsilon_2'=x-\frac{(x,\varepsilon_1')}{(\varepsilon_1',\varepsilon_1')}\varepsilon_1'=x-\frac{1}{2},$$

$$\varepsilon_3'=x^2-\frac{(x^2,\varepsilon_1')}{(\varepsilon_1',\varepsilon_1')}\varepsilon_1'-\frac{(x^2,\varepsilon_2')}{(\varepsilon_2',\varepsilon_2')}\varepsilon_2'$$

$$=x^2-x+\frac{1}{6}.$$

于是得到$\mathbb{R}[x]_4$中与之等价的两两正交向量组

$$1,\ x-\frac{1}{2},\ x^2-x+\frac{1}{6}.$$

应当指出,如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 已经两两正交,那么按上述正交化方法把它正交化的结果是得到同一个向量组,因为

$$\varepsilon_1=\alpha_1,$$

$$\varepsilon_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1=\alpha_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

Ⅳ. 在标准正交基下内积的计算公式

设 V 中取定一组标准正交基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,$$

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}\ \ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

命

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,$$

$$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n.$$

则有

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)x_iy_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_iy_j$$

$$=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

因此,在标准正交基下内积恰好等于两个向量的对应坐标相乘再相加.这与三维几何空间中向量内积(点乘)在直角坐标系下的计算公式相符.

3. 正交补

设 V 是一个 n 维欧氏空间,M 是它的一个子空间,易知 M 关于 V 的内积也成一欧氏空间.定义 V 的一个子集

$$M^{\perp}=\{\alpha\in V\mid 对一切\ \beta\in M\ 有(\alpha,\beta)=0\},$$

称 $M^{\perp}$ 为 M 的**正交补**.显然,$M^{\perp}$ 关于 V 中向量的加法以及数乘运算是封闭的,故 $M^{\perp}$ 也是 V 的子空间.

命题 1.5 设 M 是 n 维欧氏空间 V 的一个子空间,则 V 可分解为 M 与 $M^{\perp}$ 的直和