高职高专教材

数值计算学习指导书

沈京一　彭延铭　编

高等教育出版社

内容提要

本书系彭延铭、孟庆才编写《数值计算》的教学指导用书. 内容紧扣原教材. 并增加一章——"数值计算的计算机实现". 书末附有有关的计算机程序.

本书可供高职高专学校作为教学参考书选用. 亦可供职工大学、业余大学、干部培训班以及广大工程技术人员作为参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

数值计算学习指导书/沈京一,彭延铭编 . —北京:高等教育出版社,2001

ISBN 7-04-008829-0

Ⅰ.数… Ⅱ.沈… Ⅲ.数值计算-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77527 号

数值计算学习指导书

沈京一 彭延铭 编

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京市鑫鑫印刷厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	2001年6月第1版
印 张	4.5	印 次	2001年6月第1次印刷
字 数	100 000	定 价	5.40 元

前　言

在原国家教委1996年颁布的《高等学校工程专科基础课程教学基本要求》(1996年修订版)中明确规定:“数值计算”是一门重要的必修课程.本教材根据这一基本要求编写,在内容选择、结构体系等方面,努力体现基础课为专业课服务的思想,努力满足加强培养技术应用型人才动手能力的要求.

本书是上海冶金高等专科学校彭延铭副教授、河北工程技术高等专科学校孟庆才副教授编写的《数值计算》的配套教材,由两大部分组成,即理论部分和应用部分.理论部分共七章,完全对应教材(指彭延铭等编写的《数值计算》)的七章内容.每章均由六节组成,第一节为教学基本要求,第二节为知识点,第三节为典型例题,第四节为补充知识,第五节为补充习题,第六节为补充习题答案;本书最后一章为数值计算的计算机实践,具体指导如何编写计算机程序并上机运行.

本教材由常州工业技术学院沈京一老师、上海冶金高等专科学校彭延铭副教授编写.本教材由上海冶金高等专科学校黄炳章副教授负责审稿,他认真审阅了全稿并提出了许多宝贵意见,对此,我们表示衷心感谢.

编者

2000年2月

第一章　误差简介

一、教学基本要求，教学时数建议和重点、难点

1．教学基本要求

(1) 了解误差(模型误差、测量误差、截断误差、舍入误差)的来源．

(2) 理解误差、误差限、有效数字的概念．

(3) 了解相对误差与相对误差限的概念．

(基本要求的高低用不同的词汇加以区分．对概念、理论从高到低用“理解”、“了解”、“知道”三级区分，对运算、方法从高到低用“熟练掌握”、“掌握”、“会”或“能”三级区分)

2．教学时数建议

2学时．

3．重点、难点

(1) 重点　误差、相对误差的概念．

(2) 难点　有效数字的概念．

二、知识点

1．误差的来源

1.1　**模型误差**　用数学方法解决一个具体科学问题，首先要建立它的数学模型，就是把这个具体问题经过抽象，简化成一个确定的数学问题．数学模型总是近似的，它本身包含了“模型误差”．

1.2　**测量误差**　在数学模型中，通常包含一些观测数据，这

些观测结果往往不会绝对准确，必然产生“测量误差”.

1.3　截断误差

例如，用幂级数展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

计算 $\sin x$ 时，若取有限项则产生的误差称为截断误差.

1.4　舍入误差

计算机在计算过程中，往往要对一些数进行四舍五入(或其他舍入原则)，这样产生的误差称为“舍入误差”.

例如，在计算机计算 $\frac{2}{3}+2$ 的过程中，就是把 $\frac{2}{3}$ 按照一定精度进行四舍五入为0.666 667，然后+2，得2.666 667，这样产生的误差即为舍入误差.

2. 误差、误差限、有效数字

2.1　误差　设 x^* 代表准确值 x 的近似值，这个近似值的误差

$$E^* = x^* - x$$

2.2　误差限　若 $|E^*| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon^*$，则称 ε^* 为近似值 x^* 的误差限.显然，$x^* - \varepsilon^* \leqslant x \leqslant x^* + \varepsilon^*$.

2.3　相对误差　称 $E_r^* = \frac{E^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$ 为近似值 x^* 的相对误差(对应地，E^* 也称为绝对误差).

2.4　相对误差限　称 $|E_r^*| \leqslant \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \varepsilon_r^*$ 中的 ε_r^* 为近似值 x^* 的相对误差限(对应地，ε^* 也称为绝对误差限).

2.5　有效数字　设 x 的近似值为 x^*，x^* 的标准形式设为 $x^* = \pm 10^m \times 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$，其中，$a_1 \neq 0, 0 \leqslant a_i \leqslant 9, i = 2,3,\cdots$，$m$ 为整数.

如果 $|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$，则称 x^* 具有 n 位有效数字.

三、典型例题

例 1 试确定圆周率 π 的近似值的绝对误差限，并求各个值的有效数字位数.

(1) $\frac{22}{7}$;　　(2) $\frac{223}{71}$;　　(3) $\frac{355}{113}$

解 (1) $\pi=3.141\,592\,65\cdots=10^1\times0.314\,15\cdots$

$$\left|\frac{22}{7}-\pi\right|=0.001\,26\cdots<0.005=\frac{1}{2}\times10^{1-3}$$

由定义知，$\frac{22}{7}$有 3 位有效数字；

(2) $\left|\frac{223}{71}-\pi\right|=0.000\,75<0.005=\frac{1}{2}\times10^{1-3}$

所以 $\frac{223}{71}$有 3 位有效数字；

(3) $\left|\frac{355}{113}-\pi\right|=0.000\,000\,266\cdots<\frac{1}{2}\times10^{1-7}$

所以 $\frac{355}{113}$有 7 位有效数字.

例 2 求$\sqrt{2}$的近似值，使其相对误差限 $\varepsilon_r\leqslant0.002\,35$.

解 设 x^* 为所求近似值.

由相对误差限的定义知

$$\left|\frac{x^*-\sqrt{2}}{x^*}\right|\leqslant0.002\,35$$

解之得 $\frac{\sqrt{2}}{1+0.002\,35}\leqslant x^*\leqslant\frac{\sqrt{2}}{1-0.002\,35}$

即 $1.410\,898\leqslant x^*\leqslant1.417\,545$

取上述不等式中任一 x^* 均满足题意. 例如，取 $x^*=1.412$.

例 3 测量一间房子，精确到 1 cm 时，得其长和宽分别为：$a=5.43$ m，$b=3.82$ m. 当确定该房间的面积为 $S=ab=$

20.742 6m^{2}时，试估计其误差.

解 根据题意，面积最大和最小可能值为：

$$(a+0.01)(b+0.01)=20.835\ 2\ \mathrm{m}^2$$

$$(a-0.01)(b-0.01)=20.650\ 2\ \mathrm{m}^2$$

设 S_0 表示准确值，则：

$$20.650\ 2\leqslant S_0\leqslant 20.835\ 2$$

$$\text{而 } S=20.742\ 6$$

$$|S-S_0|\leqslant 0.092\ 6<0.1\ \mathrm{m}^2$$

绝对误差限为 0.1 m^2.

$$\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|S|}=\frac{0.092\ 6}{20.742\ 6}=0.45\%$$

相对误差限为 0.45%.

例 4 采用迭代计算$\sqrt{7}$，取$\begin{cases}x_0=2,\\ x_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_k+\dfrac{7}{x_k}\right),\end{cases}$

$$k=0,1,2,\cdots$$

若 x_k 是具有 n 位有效数字的近似值，试证：x_{k+1}是$\sqrt{7}$的具有 $2n$ 位有效数字的近似值.

解 首先：$x_k=\dfrac{1}{2}\left(x_{k-1}+\dfrac{7}{x_{k-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{k-1}\cdot\dfrac{7}{x_{k-1}}}=\sqrt{7}$.

故 $$x_{k+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{7}{x_k}\right)-\sqrt{7}$$

$$=\frac{(x_k-\sqrt{7})^2}{2x_k}\leqslant\frac{(x_k-\sqrt{7})^2}{2\sqrt{7}}.$$

又因 $1<|x_0|<7$，用归纳法可证明得对任意 $k>0$，恒有 $1<x_k<7$.

所以对任意 $k>0$，均有

$x_k=10\times 0.a_1a_2\cdots$，$a_1\neq 0$，而 $m=1$，又 x_k 是有 n 位有效数

字，即

$$|x_k-\sqrt{7}|\leqslant\frac{1}{2}\times 10^{1-n}\text{，故}$$

$$|x_{k+1}-\sqrt{7}|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}(x_k-\sqrt{7})^2\leqslant\frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\frac{1}{2}\times 10^{1-n}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 10^{1-2n}\times\frac{10}{4\sqrt{7}}<\frac{1}{2}\times 10^{1-2n}$$

这说明 x_{k+1}具有 $2n$ 位有效数字.

四、补充知识

1. 有效数字与绝对误差、相对误差的关系

有效数字、绝对误差、相对误差之间的关系可用以下三个定理描述：

定理 1 设近似值 $x^*=\pm 10^m\times 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots(a_1\neq 0)$具有 n 位有效数字，则近似数 x^*的绝对误差限为

$$\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times 10^{m-n}\qquad(1-1)$$

证明 由有效数字的定义与绝对误差的定义即知.

从定理 1 我们看到：有效数字位越多，绝对误差就越小.

定理 2 若近似值 x^*具有 n 位有效数字，则其相对误差限为

$$\varepsilon_r^*\leqslant\frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}\qquad(1-2)$$

其中 $a_1\neq 0$ 是 x^*的第一位有效数字.

证明 因为 $x^*=\pm 10^m\times 0.a_1a_2\cdots$

所以 $|x^*|\geqslant a_1\times 10^{m-1}$

所以 $\varepsilon_r^*=\dfrac{\varepsilon^*}{|x^*|}\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}\times 10^{m-n}}{a_1\times 10^{m-1}}=\dfrac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$

（证毕）

从定理 2 我们也可以看到：有效数字位数越多，相对误差越

小.

定理 3 若 $\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2\times(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$,则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

其中 $a_1 \neq 0$ 是 x^* 的第一位有效数字.

证明 因为 $\varepsilon^* = |x^*|\varepsilon_r^*$

而 $|x^*| \leqslant (a_1+1)\times 10^{m-1}$

所以 $\varepsilon^* \leqslant (a_1+1)\times 10^{m-1}\times\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-(n-1)}$

$$=\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$$

故 x^* 至少具有 n 位有效数字.

从上面的几个结论可知,有效数字位数可刻画近似值的精确度;绝对误差和相对误差都与小数点后的位数有关.

2. 算法的稳定性

我们计算积分:

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \quad (n = 1,2,\cdots)$$

用分部积分法,得:

$$E_n = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - nE_{n-1} \quad (n = 2,3\cdots)$$

这里 $E_1 = \frac{1}{e}$.取 6 位有效数字用这个递推公式计算 E_9 得:

$E_1 = 0.367\ 879$, $E_2 = 0.264\ 242$

$E_3 = 0.207\ 274$, $E_4 = 0.170\ 904$

$E_5 = 0.145\ 480$, $E_6 = 0.127\ 120$

$E_7 = 0.110\ 160$, $E_8 = 0.118\ 720$

$E_9 = -0.068\ 480$

显然 $E_9 > 0$,可是上述结果为负.

是什么原因引起这么大的误差呢？通过观察可知计算中唯一的舍入误差是在 E_1 处，这里$\frac{1}{e}$只取六位有效数字，但$\frac{1}{e}-0.367\,879$ ($\approx 4.412\times 10^{-7}$)的舍入误差怎么会变得如此之大. 只要注意在计算 E_2 时它乘了 -2，在计算 E_3 时 E_2 的误差又乘了 -3，依此类推，E_9 的误差恰好是 E_1 的误差乘以$(-2)\cdot(-3)\cdots(-9)=9!$，即大约 $9!\times 4.412\times 10^{-7}=0.160\,1$.

本题中结果误差扩大到这样大是我们所选的算法的结果. E_9 的真值（取 3 位有效数字）是 $-0.068\,48+0.160\,1=0.091\,6$.

怎样避免这种不稳定的算法呢？如果改递归关系式如下：

$$E_{n-1}=\frac{1-E_n}{n}(n=\cdots,3,2)$$

那么计算每一步，E_n 的误差都减少到原来的$\frac{1}{n}$倍. 如果我们以某个 n 的 E_n 值开始倒过来求，则误差每一步在减少，这种算法称为稳定算法.

注意到

$$E_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}\leqslant\int_0^1 x^n \mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$

例如取 $E_{20}=0$，于是 E_{20}的起始误差最大为$\frac{1}{21}$. 在求 E_{19}时乘了$\frac{1}{20}$，因此 E_{19}的误差最大为$\frac{1}{20}\times\frac{1}{21}=0.002\,4$，到 E_{15}时，起始误差已减到 4×10^{-8}，比舍入误差还小. 这样计算得：

$E_{20}=0.0$,	$E_{19}=0.050\,000\,0$
$E_{18}=0.050\,000\,0$,	$E_{17}=0.052\,777\,8$
$E_{16}=0.055\,719\,0$,	$E_{15}=0.059\,017\,6$
$E_{14}=0.062\,732\,2$,	$E_{13}=0.066\,947\,7$
$E_{12}=0.071\,773\,3$,	$E_{11}=0.077\,352\,3$

$$E_{10}=0.083\,877\,1, \qquad E_9=0.091\,612\,3$$

到 E_{15}时，由于算法的稳定性，E_{20}中起始误差已完全被抑制了. 计算值 $E_{15}\sim E_9$ 的六位数字都是精确的(最后一位可能有误差). 从而可知，算法的稳定性的讨论甚为重要.

3. 算法稳定性若干原则

综合所述，为防止误差使计算结果失真现象发生，要选用稳定的算法. 对于不稳定的计算过程，若计算步骤较多，就可能出现不精确或错误的结果. 而稳定的计算过程，误差对计算结果影响较小. 下面我们提出若干原则：

第一，要避免两个相近的数相减.

例如计算 $1-\cos 1°$，取 6 位有效数字，直接计算得

$$1-\cos 1° = 1-0.999\,848 = 0.000\,152$$

结果仅 3 位有效数字.

如果用公式 $1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$，有

$$1-\cos 1° = 2\sin^2\frac{1°}{2} = 1.523\,04\times 10^{-4}$$

6 位有效数字一位不少.

两个相近数相减，会造成有效数字的严重的损失，而相对误差会增大，从而给计算结果的精度带来的影响也大.

第二，控制误差的传播.

$\int_0^1 x^n e^{x-1}dx$ 计算的例子已很好地说明了这个问题.

第三，防止大数"吃掉"小数.

例如，计算级数的和

$$\frac{9}{8}+\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{40}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+0.5)}$$

从第 40 项加到第 1 项其和为

$$\mathrm{sum} = 0.122\,740\,7\times 10^1$$

而用"正常"的次序计算(即从第 1 项加到第 40 项)其和为

$$\mathrm{ssum} = 0.122\,738\,9 \times 10^{1}$$

上述两种不同次序的和粗看应该相等,但事实上计算机上运行的结果是不同的.哪一个更精确?显然,应该是 sum,这是一个很好的大数“吃掉”小数的例子.

第四,减少运算次数,避免误差积累.

例如:要计算 $\ln 2$,若由级数 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots$ 出发,在 $x\in(-1,1]$ 中令 $x=1$ 得

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots(-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

要精确到 10^{-6},即

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$ 的余项不超过 10^{-6},

即 $\frac{1}{n+1}<10^{-6}$,因此 $n\geqslant 10^6$ 即要算 10^6 项.

若改由级数

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, (-1,1]$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots, [-1,1)$$

推得 $$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), (-1,1)$$

令 $\frac{1+x}{1-x}=2$,即得 $x=\frac{1}{3}$,代入得

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \cdots\right]$$

其余项为 $$r_n = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}}{2n+3} + \cdots$$

$$< \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$$

$$=\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{8(2n+1)\cdot 3^{2n-1}}$$

当 $n=5$ 时，$r_n<5.77\times10^{-7}$.

只要算前 5 项，即可使 $\ln 2$ 精确到 10^{-6}.

4. 数值计算中应注意的要点

综上所述，我们得到数值计算中应注意的要点如下：

(1) 选用稳定的计算方法，避开不稳定的算法.

(2) 注意化简运算步骤及公式，设法减少运算次数.

(3) 合理安排运算次序，防止运算的数在数量级悬殊时大数“吃掉”小数的现象发生. 加法最好从绝对值最小的数加到绝对值最大的数.

(4) 避免相近数相减.

(5) 绝对值太小的数不宜做除数.

五、补充习题

1. 将下列各数舍入成三位有效数字，并确定近似值的相对误差和绝对误差.

(a) 2.151 4;　　(b) −0.001 528 1;

(c) −392.85;　(d) 625.55.

2. 已知下列近似值的相对误差，求绝对误差.

(a) $a=13\,267$,　　　　$E_r^*=0.1\%$;

(b) $a=2.32$,　　　　$E_r^*=0.7\%$;

(c) $a=232.44$,　　　　$E_r^*=1\%$.

3. 我们知道，$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$，用这个级数计算 $e^{-5.5}$，取 5 位有效数字计算前 25 项，得 0.002 636 3，而事实上 $e^{-5.5}=0.004\,086\,77$，因此上述求法结果没有一位有效，试问：

(a) 什么原因引起误差？

(b) 如何改进算法？

六、补充习题答案

1. (a) $E^* = 0.14\times 10^{-2}, E_r^* = 0.14\times 10^{-2}, x^* = 2.15$;

   (b) $E^* = 0.19\times 10^{-5}, E_r^* = 0.12\times 10^{-2}$,

   $x^* = -0.001\ 53$;

   (c) $E^* = 0.15, E_r^* = 0.38\times 10^{-3}, x^* = -393$;

   (d) $E^* = 0.45, E_r^* = 0.72\times 10^{-3}, x^* = 626$.

2. (a) $E^* = 0.13\times 10^2$;

   (b) $E^* = 0.16\times 10^{-1}$;

   (c) $E^* = 0.23\times 10$.

3. 当用 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ 计算 $e^{-5.5}$ 时，

$$e^{-5.5} = 1.000\ 0 - 5.500\ 0 + 15.125 - 27.730 + 38.129 - \cdots$$

像 38.129 这项的舍入误差已经几乎与最后结果一样大了. 而前面较大的一些项经过加减头四位有效数字全丢掉了，因此结果误差很大，若用

$$e^{-5.5} = \frac{1}{e^{5.5}} = \frac{1}{1 + 5.5 + 15.125 + \cdots} = 0.004\ 086\ 5$$

同样用 5 位有效数字计算前 25 项，误差减少到 0.007%.

第二章　非线性方程求根

一、教学基本要求，教学时数建议和重点、难点

1．教学基本要求

(1) 掌握寻求初始根的逐步扫描法．会编制其计算机程序．

(2) 掌握简单迭代法的算法．知道迭代收敛的条件和迭代控制的事后估计法．会编制简单迭代法的计算机程序．

(3) 了解牛顿法的算法．知道迭代收敛速度的概念．

(4) 知道弦截法与快速弦截法的算法．

2．教学时数建议

4～6学时．

3．重点、难点

(1) 重点　牛顿法、快速弦截法的算法．

(2) 难点　简单迭代法的迭代收敛的条件．

二、知识点

1．逐步扫描法

逐步扫描法是用来求 $f(x)=0$ 近似根的一种方法．已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根，具体算法如下：

(1) $a\Rightarrow x_0, f(x_0)\Rightarrow y_0$;

(2) $x_0+h\Rightarrow x_0$;

(3) 如果 $f(x_0)\cdot y_0>0$，转到(2)，否则 $x_0-\frac{h}{2}\Rightarrow x_0$.

上述最终结果 x_0 即为 $f(x)=0$ 的近似根.

2. 迭代法

迭代法是用来求 $f(x)=0$ 的根的一种常用方法.将 $f(x)=0$ 改写为 $x=g(x)$,若已知初始根 x_0,则得迭代序列 $x_{k+1}=g(x_k)(k=0,1,2,\cdots)$,若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$ 存在,则 x^* 为 $f(x)=0$ 的根.

2.1　迭代收敛定理

定理　设 x^* 是方程　$x=g(x)$的根,如果 $g(x)$在 x^* 的某个领域 U 内具有一阶导数,并且对所有 $x\in U$,都有 $|g'(x)|\leqslant q<1$,则迭代格式

$$x_{k+1}=g(x_k)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

(1) 对任意初值 $x_0\in U$ 均收敛,且 q 越小,收敛速度越快.若 $|g'(x)|>1$,则处处不收敛.

(2) x^* 是 U 内的唯一实根,且有

$$|x_{k+1}-x^*|\leqslant\frac{q}{1-q}|x_{k+1}-x_k|\leqslant\frac{q^{k+1}}{1-q}|x_1-x_0| \tag{2-1}$$

2.2　收敛准则

由收敛定理知,$|x_{k+1}-x_k|$充分小时,能保证$|x_{k+1}-x^*|$充分小.于是实际计算中常常以$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$ 作为迭代终止条件.

2.3　算法步骤

(1) 输入 x_0,ε.

(2) $g(x_0)\Rightarrow x_1$.

(3) 如果$|x_1-x_0|\geqslant\varepsilon$,$x_1\Rightarrow x_0$,转到(2),否则输出 x_1.

3. 牛顿法

牛顿法是最重要的迭代法之一.迭代公式为:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad(k=0,1,2,\cdots) \tag{2-2}$$