有限元高精度理论

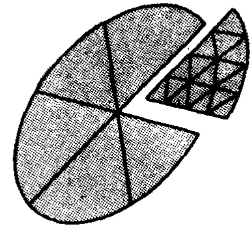
HIGH ACCURACY THEORY OF FINITE ELEMENT METHODS

陈传淼 黄云清著

湖南科学技术出版社

High Accuracy Theory of Finite Element Methods

HIGH ACCURACY THEORY OF FINITE ELEMENT METHODS



有限元高精度理论

● 陈传淼 黄云清著

CHEN CHUANMIAO HUANG YUNQING

Chen Chuanmiao Huang Yunqing

湖南科学技术出版社

有限元高精度理论
著　　者：陈传淼　黄云清
责任编辑：胡海清
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路 3 号
印　　刷：湖南省新华印刷二厂
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：邵阳市双坡岭
邮　　码：422001
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：1995 年 7 月第 1 版第 1 次
开　　本：850×1168 毫米　1/32
印　　张：20.5
插　　页：4
字　　数：537,000
印　　数：1—1,100
征订期号：地科 171—09
ISBN 7—5357—1681—4/O·136
定　　价：29.70 元
湘新登字 004 号

序

PREFACE

有限元法是解偏微分方程的一种行之有效的数值方法，广泛应用于科学与工程计算各领域. 如何提高它的精度是人们十分关心的问题，这也就是本书的主题.

自 1972 年 J. Douglas 开始研究两点边值问题的有限元超收敛性，至今已 20 余年，经各国计算数学家的精心研究，成果累累，其中不少系我国学者首创. 特别是陈传淼、朱起定首先提出的单元合并技巧及后来发展的单元分析法，林群、吕涛等在外推法和渐近展开方面取得突破，以及林群与许进超、陈传淼与黄云清等提出的分片强正规剖分与 λ-等级网格，等等，这些已成为当今有限元高精度研究的基本方法. 可以说，在这个领域中，中国学者采用独创性的方法，作出了十分重要的贡献，并形成了自己的理论和方法体系.

本书详细地论述和总结了有限元高精度研究的各种理论和分析方法，特别是中国学派的工作，包括作者们多年的研究成果(有些尚未发表过). 本书第一作者曾写过一本《有限元方法及其提高精度的分析》(湖南科学技术出版社 1982 年出版)，是该领域的最早一本著作. 本书是上述一书的实质性扩充，全书分三篇：第一篇介绍有限元的理论基础，归纳了许多新进展；第二篇椭圆问

题有限元的高精度分析是全书的重点，对几种常用单元讨论了三种高精度方法，即超收敛性、外推法与校正法，对很一般的区域及非光滑解皆获得了整体的高精度结果；第三篇将上述结果推广到抛物与双曲问题，非线性方程与方程组等，包含了大量新的理论成果和数值应用实例，这是一本颇具中国特色的专著. 相信本书的出版将有助于广大读者了解这个重要研究领域的全貌，以及它的历史和现状，并将促进其进一步发展，特此为序.

石钟慈

1995 年 2 月 22 日于北京

前言
PREFACE

有限元法是求微分方程数值解的一种重要方法，目前已广泛应用于结构力学、流体力学、物理学及其它领域，例如它在飞机、轮船、反应堆、水坝等大型问题的设计计算与最优化方面，取得了巨大的成功．但是，如何进一步提高有限元的精度，从而解决更大型复杂的问题，一直是人们关心的重要课题之一．

早在 1967 年，Zienkiewicz-Cheung 在名著“结构与连续力学中的有限元法”中，已提到计算中发现线性元的导数在某些特殊点上有特别高的精度．因此利用这种超收敛性质，可以在不增加计算量的情况下显著提高有限元的精度．1972 年，Douglas（对两点边值问题的有限元法）、de Boor、Swartz（两点边值问题的配置法）及 Thomee（热传导问题的样条差分法）几乎同时从三个不同方向发现并论证了有限元解在节点上的超收敛性．Strang 在 1974 年国际数学家大会报告中称超收敛是有限元收敛性研究的新阶段．以后，各国许多数值分析专家对这种超收敛性现象展开了积极的研究．

到目前为止，有限元的超收敛研究大致可分为两种方法．一是 Bramble-Schatz（1974）、Thomee（1977）等人提出的局部平均方法，即从具有最高超收敛阶 h^{2m}的负范数估计出发，在均匀网格上构造小支集的核函数 K_h^a，使卷积 $K_h^a * \partial_h^a u_h$ 逼近 $D^a u$ 具有这个最高阶精度（见本书第 4 章 § 6— § 7）．但可惜，除了矩形域上经

延拓可得到整体超收敛，一般都只得到区域内部的而且是均匀网格上的结果（Schatz 曾告诉本书第一作者，他对角域可做到边界，但未见其论文）. 由于这种限制，上述结果至今尚未在工程设计中运用.

另一种方法是由 Douglas、Dupont、Wheeler（1972—1974）、Zlamal、Lesaint（1977—1979）等人开端的对超收敛点的研究，他们分别采用了拟正交投影法与约化数值积分法. 同时，一大批中国学者投入了这种研究，他们采用了独创的单元分析法，从实际需要出发，着重对低次元进行高精度分析，取得了很大的成功. 1978 年，陈传淼，还有朱起定，在研究超收敛时提出了单元合并技巧，以后又被发展为单元分析法，目前它已成为高精度研究中的基本方法而被广泛采用. 1983 年，林群、吕涛等人又在有限元外推法方面取得了重大突破. 在这两个方向上还有黄云清、许进超等人的重要工作. 1986 年，Rannacher 提出研究校正法. 从此，这三种高精度方法的研究紧密联系，作出了一系列有声有色的成就. 现在可以说单元分析法是一种理论完整、使用简单而又普遍适用的高精度方法. 整个方法包含着两个要点：一是掌握三种高精度算法（超收敛、外推与校正）的简单明确的结论；二是运用几种剖分规则拟合各种区域（例如对三角形线元，用 C、PC 及 $6PC$ 剖分可解决很一般的区域），并在奇点附近采用 λ-等级网格局部加密. 所述方法不仅适用于椭圆、抛物与双曲问题，对非线性与方程组等情形都可用同一规则处理. 总之，对实际应用中经常遇到的许多问题与障碍已基本克服，完全达到了实用阶段. 作为一次重要实践，陈传淼、黄云清等人还运用这些方法解算了湖南浏阳株树桥混凝土面板堆石坝（高 80 米）的问题. 这是一个具有分层介质的三维强非线性弹塑性问题，求解了 5000 个未知数的大型非线性方程组，用超收敛提高应力逼近精度，用外推估算位移与应力误差，计算结果与实测相当接近（见本书第 14 章 § 9）.

应当指出，在单元分析法的理论研究中，对有限元解或导数作 Largange 高次插值可得到整体高精度，这又接近了局部平均方

法中用高次样条磨光的思想，但现在已是在新的意义下更小支集上的局部平均了.

本书的目的是系统总结第二种方法的一序列高精度理论成果与应用研究，其中包含了作者许多尚未发表的最新成果. 因此，这是一本具有中国特色的专著.

1982 年，陈传淼所著《有限元方法及其提高精度的分析》(湖南科学技术出版社)是国内外第一本系统阐述有限元超收敛的专著. 十多年来，人们对有限元的高精度方法已作出了更广泛而深刻的结果. 1989 年，朱起定、林群的专著《有限元超收敛理论》(湖南科学技术出版社) 讨论线性椭圆有限元，有一章介绍外推方法. 1992 年，林群、朱起定的专著《有限元的预处理与后处理理论》(上海科学技术出版社) 讨论线性椭圆问题，同时又补充了校正方法，全书着重以有限元高次插值作为后处理的有力工具. 1990 年以来，林群利用积分恒等式对各种有限元建立了插值误差表，只要查看此表，即可知道各种方程各种有限元的误差是多大，使复杂的误差问题一目了然。1994 年，L. Wahlbin 的讲义《Superconvergence in Galerkin finite element methods》(Cornell University) 对椭圆有限元的超收敛性作了较全面的叙述，特别是内部的超收敛性质. 现在出版的这本《有限元高精度理论》是陈传淼 1982 年的《有限元方法及其提高精度的分析》一书的本质扩充，它较完整地介绍上述三种高精度方法，多种剖分规则及奇点附近局部加密网格. 还讨论了对抛物、双曲问题，非线性及方程组的应用等，包含了许多数值例子以及一个实际问题——面板堆石坝的具体计算结果.

为撰写本书，我们要感谢许多同行的研究与帮助：国外有 Thomee、Bramble、Schatz、Wahlbin、Douglas、Zlamal、Krizek、Larsson、许进超、王军平、张乃莹等；国内有林群、石钟慈、李荣华、李岳生、黄鸿慈、黄明游、康立山、朱起定、吕涛、杨一都等，以及力学专家沈珠江、高级工程师郭涤寰等；还有许多从湘潭大学毕业的研究生刘建国、黄晓凡、曹琎琅、金继承、舒适、

陈艳萍、谢锐锋、周爱辉、李波、陈宏森、徐大、陈新民、谢资清、邹志勇、张智江、李耀星、张道顺、帅晋瑶及龚洪钧等人.

我们还要特别感谢中国科学院石钟慈院士为本书作序.

本书可供高年级大学生、研究生以及有关同行阅读，希望能引起他们的兴趣. 也可供有关的计算工作者及工程师参考，并愿他们将有限元的高精度方法应用于自己的实践中.

由于作者水平有限，时间仓促，撰写中疏漏之处在所难免，祈望读者指正.

最后对湖南科学技术出版社为组织出版此书所作的努力与资助深表感谢，对国家自然科学基金委员会、湖南省科学技术委员会、湖南省教育委员会及湖南师范大学出版基金委员会的资助深表感谢.

作者 1994 年 10 月于长沙岳麓山

目录
CONTENTS

绪　　论

HIGH ACCURACY
THEORY

有限元法是求微分方程数值解的一种重要方法，它已广泛应用于解算大型科学与工程问题，并取得了巨大成就. 但是如何在不增加或少增加计算量情况下进一步提高有限元的精度，从而可解决更大型复杂的问题，这一直是人们关心的重要课题之一.

本书所论及的高精度方法主要指下述三种方法，即超收敛、外推及校正法. 1972 年由 Douglas，de Boor、Swartz 与 Thomée 分别从三个不同的方向发现并证明了单元端节点上的超收敛以来，对超收敛的研究可分成两种方法：一是以 Bramble、Schatz、Thomee 等人(1974—1979)为首的局部平均方法，另一种是由 Douglas、Zlamal 等人(1972—1979)开端的对超收敛点的研究，并由陈传淼、林群、朱起定、黄云清、许进超等人发展成系统的单元分析法. 1983 年，林群等人在有限元外推法取得了重大进展，1986 年，Rannacher 提出研究有限元的插值校正法. 于是三种高精度方法紧密联系发展，形成了第二种方法. 本书简要介绍了局部平均法，但着重叙述单元分析法的理论及应用. 这是一种统一的、有应用价值的高精度方法. 整个方法包含两个要点：①三种高精度算法(超收敛、外推及校正)的简单明确的结论；②用几种剖分规则可拟合各种区域，并在奇点附近采用局部加密的 λ-等级网格. 此方法不仅适用于椭圆、抛物与双曲问题，而且对非线性方程与方程组都用