研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

误差处理与可靠性理论

Error Processing and Reliability Theory

李德仁　袁修孝　著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

误差处理与可靠性理论/李德仁,袁修孝著.—武汉:武汉大学出版社,2002.7
研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐
ISBN 7-307-03474-3

Ⅰ.误…　Ⅱ.①李…　②袁…　Ⅲ.摄影测量法—测量平差—高等学校—教材
Ⅳ.P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 006944 号

责任编辑:任　翔　　　责任校对:程小宜　　　版式设计:支　笛

出版:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn　网址:www.wdp.whu.edu.cn)
发行:新华书店湖北发行所
印刷:湖北省通山县印刷厂
开本:787×960　1/16　印张:26.75　字数:447 千字　插页:4
版次:2002 年 7 月第 1 版　　2002 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7-307-03474-3/P · 39　　定价:40.00 元

内 容 提 要

本书系统地讲述了以数理统计理论为基础的测量平差系统的误差理论、假设检验和可靠性理论，介绍了当代摄影测量平差在理论和技术发展中的新成就和主要动向。如GPS 辅助空中三角测量；稳健计算机视觉；利用人工智能方法进行粗差的启发式搜索等。书中重点讨论了偶然误差的减少、系统误差的补偿、粗差的检测以及不同类型误差的区分等问题，既有较完整的理论阐述，又有较具体的应用实例。为了便于读者深入研究，每章后均列出主要参考文献。为了便于更好地理解本书，在附录中补充了必要的矩阵代数和数理统计知识。

本书是高等院校测绘类专业研究生教学用书，亦可供摄影测量、大地测量和工程测量专业的科技人员与高等院校相关专业师生学习参考。

前　言

众所周知，传统的测量平差是利用最小二乘平差方法对观测值的偶然误差进行合理配赋，对观测值的系统误差进行预改正，对观测值的粗差则采用一定的观测原则和人工挑错的办法予以控制。这一方面是由于观测值的数量有限且粗差难以利用简单的几何条件加以检测，另一方面是由于受当时计算工具的限制，人们不得不采用近似的平差模型和小范围的分段平差办法来解决测量问题。

到了 20 世纪，随着航天技术和通信技术的发展，人类观测地球的手段在不断进步。由于电子计算机的问世，测量观测值不仅可以通过计算机控制的在线量测系统直接输入计算机，而且可以利用数字影像相关等技术实现自动识别和量测，或者通过 GPS 这样的卫星定位系统进行实时定位与导航，从而使我们可以获得海量的测量数据。对于这些数据的处理，传统的测量平差手段自然是不够用了。所幸的是，计算技术的发展，特别是最近三四十年来计算机运算速度的提高为我们提供了物质基础。测量平差的数学模型可以变得更加严格，不仅可以整体处理多源、多时相的观测数据，而且还可以在平差模型中同时顾及系统误差的补偿和粗差的定位。本书正是作者在摄影测量领域中开展测量误差处理和可靠性理论研究所取得成果的全面总结，同时也汇集了国内外众多学者在该领域的最新研究成果。

全书共分八章，第一章概述了测量平差中的误差处理，第二章介绍了解析摄影测量中平差模型的当代发展，第三章和第六章详细叙述了测量平差中的可靠性和可区分性理论，第四章介绍了解析摄影测量平差中系统误差的补偿方法及其效果，第五章介绍了粗差检测方法在当代摄影测量平差系统和计算机视觉中的应用，第七章和第八章给出了可区分性理论在基本摄影测量平差问题中的应用示例。本书的理论是针对一般测量平差问题的，尽管主要应用示例为摄影测量平差问题，但它对大地测量、工程测量、计算机视觉以及地理信息系统（GIS）中空间和属性数据的不确定性分析同样适用。因此，本书既可作为高等院校测绘专业研究生用书，亦可供摄影测量专业、大地测量专业及工程测量专业科研和工程技术人员学习参考。

本书以1988年出版的《误差处理和可靠性理论——摄影测量平差的近代发展》一书为蓝本、同时吸收了近十年来学科的最新发展成果修订而成。此次修订删除了原书中"§2.4 像片连接点转刺"和"§5.7 在线空中三角测量"两节的内容，新增了"§1-2 模型误差对平差结果的影响"、"§2-3 GPS 辅助空中三角测量"、"§5-7 数字摄影测量影像匹配中的粗差检测"和"§5-8利用人工智能方法进行粗差的启发式搜索"等研究成果，同时对原书第三、四两章的次序进行了调整，并在§2-4 中增加了"方差分量估计的精度"、在§3-4 中增加了"多余观测分量的递归快速算法"和"多余观测分量的值域"、在§3-7 中增加了"GPS 辅助光束法区域网平差的内外部可靠性"等内容。在以上内容的修订过程中，参考了众多国内外的相关文献，每章末都列出了主要的参考资料，作者谨向本书取材引用过的文献作者致以最诚挚的谢意！

本书经教育部研究生工作办公室推荐，被国务院学位委员会审定为研究生教学用书，这对作者是莫大的鼓舞和鞭策，我们尽力将其写好，以不辜负将要学习的莘莘学子们。但由于作者水平所限，书中难免有错误和不当之处，敬请读者不吝赐教。

著　者

2002年4月于武昌珞珈山

目　　录

第一章　测量平差中的误差处理概述

§1-1　数学模型和模型误差

一、函数模型和随机模型

从所要研究的客观母体中取得一组观测值，可以用来估计表征该客观母体的有关未知参数，这在数理统计学中称之为参数估计，在测量学中称之为平差。为此，首先需要建立一个反映观测值和待求未知参数之间关系的数学模型。

观测值向量作为一组随机变量，可以用它的一阶矩（期望）和二阶中心矩（方差-协方差）来描述。其中，描述观测值期望的模型称为**函数模型**，而描述观测值精度特性的模型称为**随机模型**，两者的结合则称为平差的数学模型。

对于满秩的高斯-马尔柯夫线性（或线性化）模型有如下的定义：

假设 $\boldsymbol{A}$ 为已知的 $n\times u$ 阶系数矩阵（通常称之为一级设计矩阵），$\boldsymbol{x}$ 为 $u\times 1$ 维未知参数向量，$\boldsymbol{l}$ 为 $n\times 1$ 维随机观测值向量，其方差-协方差矩阵为 $D(\boldsymbol{l})=\sigma^2\boldsymbol{P}^{-1}$（$\sigma^2$ 为单位权方差），而且假设设计矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为列满秩，即 $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A})=u$，权矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为正定矩阵，于是存在下列满秩的高斯-马尔柯夫线性模型：

$$E(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} \quad 且 \quad D(\boldsymbol{l}) = \sigma^2\boldsymbol{P}^{-1} \tag{1-1-1}$$

该数学模型在国外之所以称为高斯-马尔柯夫模型是因为：高斯（1809年）利用似然函数由此模型导出最小二乘法，并随后（1823年）指出它为最佳估值；马尔柯夫（1912年）利用最佳线性无偏估计估求该模型的参数。实际上，这就是测量平差中的间接观测平差（平差标准问题Ⅱ）。平差的目的是由这一组观测值来求出未知参数的估值，并估计其精度。

二、统计学意义的误差(模型误差)与假设检验

从统计学意义讲,**模型误差**可定义为所建立的模型(包括函数模型和随机模型)与客观现实之间的差异,用公式表示则为

$$F_1 = M_0 - W \tag{1-1-2}$$

式中, F_1——真模型误差;

M_0——所利用的数学模型;

W——未知的客观现实,且 $M_0 \neq W$。

如果从数理统计的检验理论出发,把一个数学模型视为相对于客观现实的一个假设(零假设),则在模型确定时人们的出发点是使模型误差(既对于观测值的期望,也对于观测值的方差)为零。对零假设的检验,需要定义一个或多个备选假设。这样的备选假设通常总是企图使所建立的模型扩展得更加精确,从而减小模型误差。

由于客观现实 W 是未知的,人们只好用一个尽可能扩展和精化了的数学模型来代替它。于是,将所利用的模型 M_0 与该扩展精化了的模型 M 之间的差异定义为**似真模型误差**,对实际研究是有意义的。

$$F_2 = M_0 - M \tag{1-1-3}$$

我们可以将数学模型 M 尽可能地扩展和精化,使它与客观现实的差异变得很小($M-W \to 0$)。譬如,对于自检校光束法平差,Schroth 在他的博士论文中就提出了一个函数模型和随机模型均经过扩展了的数学模型(见下文§4-6)。在这种前提下便得到

$$F_2 = M_0 - M = (M_0 - W) - (M - W) \approx M_0 - W \tag{1-1-4}$$

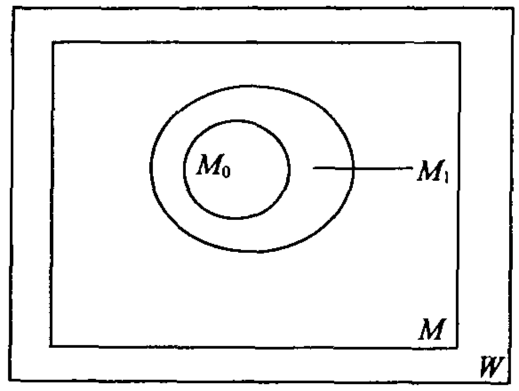
于是,我们可以从这样定义的模型误差出发进行其他的讨论。

在假设检验中所要统计检验的是:所利用的模型 M_0(零假设 H_0)和一个扩展了的模型 M_1(备选假设 H_a)之间的差异是否显著(见图1-1-1)。如果 $M_1 = M_0$,则该模型是不可检验的。

当从两个备选假设中进行选择时所要统计区分的是:相对于原模型 M_0 提出的两个扩展了的模型 M_1 和 M_2 是否可以区分。此时,M_1 和 M_2 将作为备选假设相对于零假设 M_0 而提出。如果两个模型 M_1 和 M_2 完全相同,或者一个模型为另一个模型所包含,则它们是不可区分的(图1-1-2)。

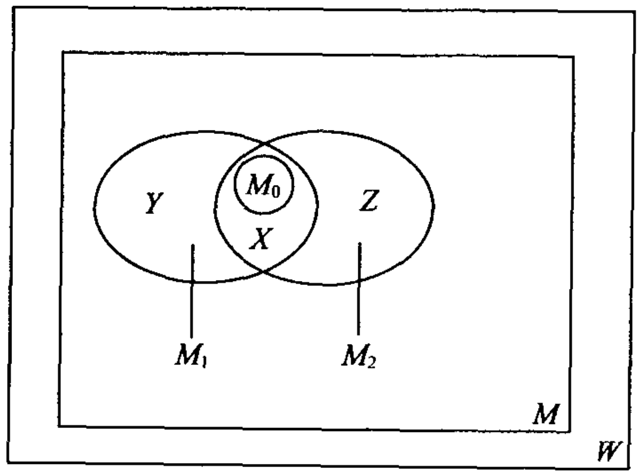
三、测量学意义的误差(观测误差)及其分类

在测量学领域,长期以来人们按照误差的大小、特性及其产生的原因将它分成粗差、系统误差和偶然误差:



$M_0 \cap M_1 = M_0$

图 1-1-1　单个备选假设下原假设与备选假设之关系



$M_1 \cap M_2 = X,\quad M_0 \in X$

$M_1 \backslash X = Y,\quad M_2 \backslash X = Z$

图 1-1-2　两个备选假设下原假设与备选假设之关系

$$\varepsilon = \varepsilon_G + \varepsilon_s + \varepsilon_n \tag{1-1-5}$$

式中，ε——总的观测误差；

ε_G——粗差；

ε_s——系统误差；

ε_n——偶然误差。

比照前面叙述，显然存在

$$\varepsilon \in F_2$$

对于这里所说的三种类型误差，尽管在多年的测量实践中已习惯地如此分类，但从统计检验理论的观点出发，并不存在一个普遍而又明确的定义，我们只能从不同的侧面来分析和将它们分类。

首先,这三种误差均可视为模型误差,并用下列的数学模型描述它们:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s=\boldsymbol{H}_s\boldsymbol{s} \qquad \boldsymbol{s}\sim M(\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{C}_{ss}) \tag{1-1-5a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G=\boldsymbol{H}_G\nabla\boldsymbol{l} \qquad \nabla\boldsymbol{l}\sim M(\nabla\tilde{\boldsymbol{l}},\boldsymbol{C}_{GG}) \tag{1-1-5b}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n=\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{\varepsilon}_n \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_n\sim M(\boldsymbol{0},\boldsymbol{C}_{nn}) \tag{1-1-5c}$$

式中 $M(\mu,\boldsymbol{C})$ 表示期望为 μ、方差-协方差矩阵为 $\boldsymbol{C}$ 的任一分布,而矩阵 $\boldsymbol{H}_s$、$\boldsymbol{H}_G$ 和 $\boldsymbol{E}_n$ 决定系统误差、粗差和偶然误差对观测值的影响。这三个系数矩阵的特性是各不相同的(图 1-1-3):

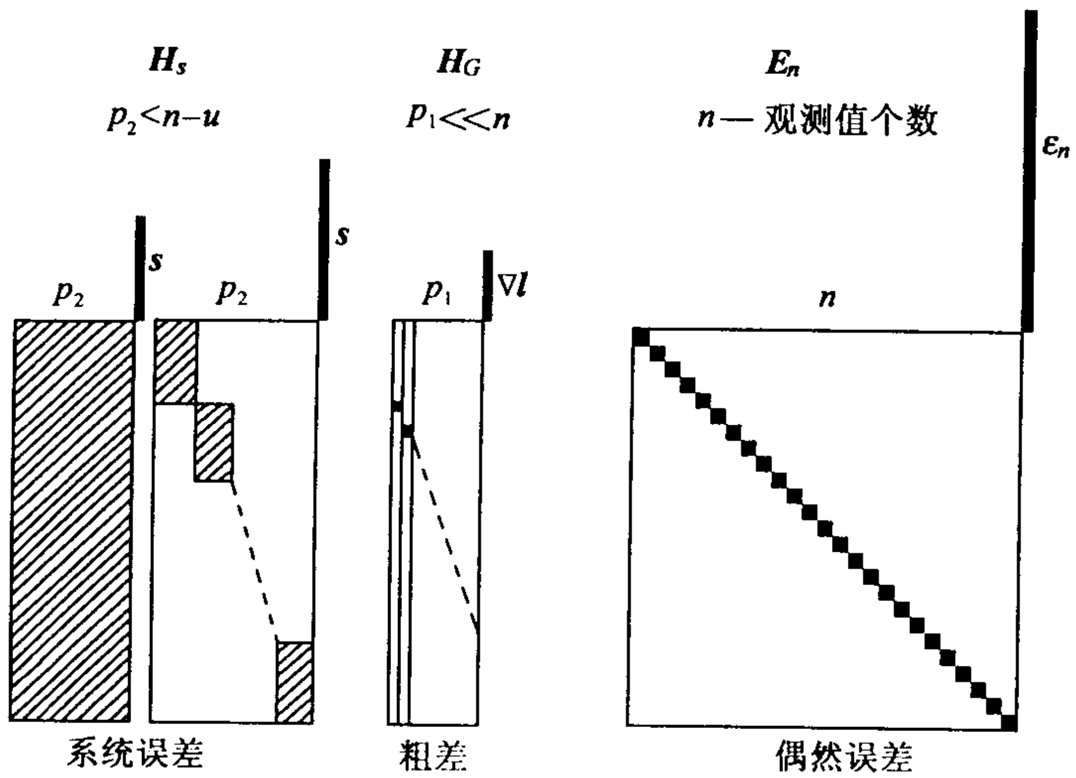


图 1-1-3　不同类型观测误差的系数矩阵

——系统误差的系数矩阵元素是完全被占有或一组组地完全占有。系数矩阵中的元素通常是位置和时间的函数。譬如,当附加参数视为区域不变量时,则系数矩阵 $\boldsymbol{H}_s$ 被全部占有;当附加参数处理成航带不变量时,则系数矩阵成组被占有,而像片系统误差为像点坐标(x,y)的函数。

——粗差的系数矩阵 $\boldsymbol{H}_G$ 为稀疏占有,通常每一列只有一个或少数几个非零元素。对于 p_1 个数量不同的粗差,有

$$\boldsymbol{H}_G=[\boldsymbol{e}_{i+1}\quad \boldsymbol{e}_{i+2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_{i+p_1}] \tag{1-1-6}$$

式中,　$\boldsymbol{e}_i=[0\quad 0\quad \cdots\quad 0\quad 1\quad 0\quad \cdots\quad 0]^{\mathrm{T}}$　(仅第 i 个元素为 1)

——偶然误差是一个对角线矩阵(通常为单位矩阵)。

现在再来看看它们的方差-协方差矩阵。对于偶然误差,$\boldsymbol{C}_{nn}$ 为非零矩

阵，这是众所周知的。

系统误差可以仅视为函数模型的误差($s=s_0, C_{ss}=0$)或仅视为随机模型的误差($s=0, C_{ss}\neq 0$)，当然也可以同时作为随机模型和函数模型的误差处理(见式(1-1-5a))。

粗差在研究可靠性时总是被作为函数模型的误差而考虑的($\nabla l\neq 0$, $C_{GG}=0$)，而在粗差定位时，则最好被作为随机模型的误差来考虑，这样处理有利于粗差的有效发现和改正。

此外，还可以从产生误差的原因来区分这三类误差。数据获取过程中带来的系统误差是由某种物理的、机械的、技术的、仪器的或作业员的原因而造成的。通常它具有一定的规律，或者有规则地变动着；粗差是在数据获取、数据传送和数据加工过程中，由于不规则的差错而造成的，而且它不再可能作为可接受的观测值为所假定或所沽计的误差模型采用；至于偶然误差，它也是由观测条件(所使用的仪器、外界条件和观测者)引起的，但是它与系统误差不同，在大小和符号上没有规律性，只有大量误差的总体才具有一定的统计规律。

§1-2　模型误差对平差结果的影响

在高斯-马尔柯夫模型(1-1-1)式中，观测值的期望表示为一组未知参数的线性(或线性化)函数，而观测值的权矩阵是已知的。如果数学模型产生了偏差，平差结果会受到怎样的影响呢？此时可能存在如下三种情况：

——描述观测值期望的函数模型中未知参数选择得太少；

——描述观测值期望的函数模型中未知参数选择得过多；

——采用了一个错误的权矩阵。

下面将就以上三种模型误差对平差结果的影响分别予以讨论。

一、函数模型中未知参数太少对平差结果的影响

设正确选择描述观测值期望的函数模型中未知参数时的平差数学模型为

$$E(l)=\left[\underset{n\times k}{A_1}\quad \underset{n\times(n-k)}{A_2}\right]\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix},\qquad D(l)=\sigma^2P^{-1}\tag{1-2-1}$$

若选择未知参数时 X_2 被漏掉，则平差乃由下式出发：

$$E(l)=A_1X_1,\qquad D(l)=\sigma^2P^{-1}\tag{1-2-2}$$

由(1-2-2)式按最小二乘平差可求出：

$$\hat{X}_1 = (A_1^{\mathrm{T}}PA_1)^{-1}A_1^{\mathrm{T}}Pl \tag{1-2-3}$$

1. $\hat{X}_1$ 不是 X_1 的无偏估计值

这是因为，

$$\begin{aligned}
E(\hat{X}_1) &= (A_1^{\mathrm{T}}PA_1)^{-1}A_1^{\mathrm{T}}PE(l) \\
&= (A_1^{\mathrm{T}}PA_1)^{-1}A_1^{\mathrm{T}}P\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= (A_1^{\mathrm{T}}PA_1)^{-1}(A_1^{\mathrm{T}}PA_1)X_1 + (A_1^{\mathrm{T}}PA_1)^{-1}A_1^{\mathrm{T}}PA_2X_2 \\
&= X_1 + (A_1^{\mathrm{T}}PA_1)^{-1}A_1^{\mathrm{T}}PA_2X_2 \\
&\neq X_1
\end{aligned} \tag{1-2-4}$$

其偏差值为

$$\Delta X_1 = (A_1^{\mathrm{T}}PA_1)^{-1}A_1^{\mathrm{T}}PA_2X_2 \tag{1-2-5}$$

除非 $A_1^{\mathrm{T}}PA_2 = \mathbf{0}$，偏差 ΔX_1 均是存在的。

2. 未知数 X_1 的协方差阵偏小

未知数 X_1 的协方差阵为

$$D(\hat{X}_1) = \sigma^2(A_1^{\mathrm{T}}PA_1)^{-1} \tag{1-2-6}$$

而由(1-2-1)式按最小二乘平差法解求时，未知参数的正确解应为

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}PA_1 & A_1^{\mathrm{T}}PA_2 \\ A_2^{\mathrm{T}}PA_1 & A_2^{\mathrm{T}}PA_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}Pl \\ A_2^{\mathrm{T}}Pl \end{bmatrix} \tag{1-2-7}$$

若记

$$\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}PA_1 & A_1^{\mathrm{T}}PA_2 \\ A_2^{\mathrm{T}}PA_1 & A_2^{\mathrm{T}}PA_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}
D\left(\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix}\right) &= \sigma^2\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \sigma^2\begin{bmatrix} N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1}N_{12}\tilde{N}_{22}^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} & -N_{11}^{-1}N_{12}\tilde{N}_{22}^{-1} \\ -\tilde{N}_{22}^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} & \tilde{N}_{22}^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1-2-8}$$

这里 $\tilde{N}_{22} = N_{22} - N_{21}N_{11}^{-1}N_{12}$。

将(1-2-8)式中相应结果与(1-2-6)式比较可发现，X_1 的方差阵应由 N_{11}^{-1} 加上一个半正定矩阵 $N_{11}^{-1}N_{12}\tilde{N}_{22}^{-1}N_{21}N_{11}^{-1}$。由此可见，当选择参数偏少时，未知参数 X_1 的协方差阵偏小。

3. 单位权方差估值变大

由于 $V = A_1\hat{X}_1 - l$，将(1-2-3)式代入可得到

$$V = -Q_{VV}Pl \tag{1-2-9}$$

这里 $Q_{VV} = P^{-1} - A_1N_{11}^{-1}A_1^{\mathrm{T}}$。

顾及到 $Q_{VV}P$ 为幂等矩阵的特性(见下文§3-2),根据二次型的期望定理(详见附录D.4)有

$$
\begin{aligned}
E(V^{\mathrm{T}}PV) &= E(l^{\mathrm{T}}PQ_{VV}PQ_{VV}Pl) \\
&= E(l^{\mathrm{T}}PQ_{VV}Pl) \\
&= \sigma^2\mathrm{tr}(PQ_{VV}PP^{-1}) + (A_1X_1+A_2X_2)^{\mathrm{T}}PQ_{VV}P(A_1X_1+A_2X_2) \\
&= \sigma^2\mathrm{tr}(E_n - PA_1N_{11}^{-1}A_1^{\mathrm{T}}) + (A_1X_1+A_2X_2)^{\mathrm{T}}PQ_{VV}P(A_1X_1+A_2X_2) \\
&= \sigma^2 n - \sigma^2\mathrm{tr}(PA_1N_{11}^{-1}A_1^{\mathrm{T}}) + (A_1X_1+A_2X_2)^{\mathrm{T}}PQ_{VV}P(A_1X_1+A_2X_2) \\
&= \sigma^2 n - \sigma^2\mathrm{tr}(A_1^{\mathrm{T}}PA_1N_{11}^{-1}) + (A_1X_1+A_2X_2)^{\mathrm{T}}PQ_{VV}P(A_1X_1+A_2X_2) \\
&= \sigma^2(n-\mathrm{tr}(E_k)) + (A_1X_1+A_2X_2)^{\mathrm{T}}PQ_{VV}P(A_1X_1+A_2X_2) \\
&= \sigma^2(n-k) + (A_1X_1+A_2X_2)^{\mathrm{T}}PQ_{VV}P(A_1X_1+A_2X_2) \qquad (1\text{-}2\text{-}10)
\end{aligned}
$$

显然,$(A_1X_1+A_2X_2)^{\mathrm{T}}PQ_{VV}P(A_1X_1+A_2X_2)\geqslant 0$,所以当模型中未知参数少了之后,单位权方差的估值 $\hat{\sigma}_0^2$ 是有偏的,且偏大。

二、函数模型中未知参数过多对平差结果的影响

函数模型中多选择了未知参数时与情形一恰好相反。此时,当采用(1-2-1)式进行平差就比实际函数模型多选择了未知数 X_2,由(1-2-7)和(1-2-8)式得到未知数 X_1 的估值为

$$\hat{X}_1 = \begin{bmatrix} N_{11}^{-1}+N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} & -N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}Pl \\ A_2^{\mathrm{T}}Pl \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}2\text{-}11)$$

1. $\hat{X}_1$ 是 X_1 的无偏估计值

这是因为,

$$
\begin{aligned}
E(\hat{X}_1) &= \begin{bmatrix} N_{11}^{-1}+N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} & -N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}PE(l) \\ A_2^{\mathrm{T}}PE(l) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} N_{11}^{-1}+N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} & -N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^{\mathrm{T}}PA_1X_1 \\ A_2^{\mathrm{T}}PA_1X_1 \end{bmatrix} \\
&= X_1 + N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1}N_{21}X_1 - N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1}N_{21}X_1 \\
&= X_1 \qquad (1\text{-}2\text{-}12)
\end{aligned}
$$

因此,$\hat{X}_1$ 在多选择了未知参数之后仍为 X_1 的无偏估计值。

2. 未知数 X_1 的协方差变大

由(1-2-8)式知未知参数 X_1 的协因数矩阵为

$$Q_{\hat{X}_1\hat{X}_1} = N_{11}^{-1} + N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1}N_{21}N_{11}^{-1} \qquad (1\text{-}2\text{-}13)$$

由于 $N_{11}^{-1}N_{12}\widetilde{N}_{22}^{-1}N_{21}N_{11}^{-1}\geqslant \mathbf{0}$,所以,它比实际应有值 N_{11}^{-1} 偏大。

3. 单位权方差是 σ_0^2 的无偏估计值

仿(1-2-10)式,有

$$
\begin{aligned}
E(V^{\mathrm{T}}PV) &= E(l^{\mathrm{T}}PQ_{VV}Pl) \\
&= \sigma^2\mathrm{tr}(PQ_{VV}PP^{-1}) + (A_1X_1)^{\mathrm{T}}PQ_{VV}P(A_1X_1) \\
&= \sigma^2\mathrm{tr}(PQ_{VV}) + X_1^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}PQ_{VV}PA_1X_1 \\
&= \sigma^2(n-u) + X_1^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}P(P^{-1} - A_1N_{11}^{-1}A_1^{\mathrm{T}})PA_1X_1 \\
&= \sigma^2(n-u) + X_1^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}P(A_1 - A_1N_{11}^{-1}N_{11})X_1 \\
&= \sigma^2(n-u)
\end{aligned} \tag{1-2-14}
$$

由上式可知，当模型中未知参数选择过多时，单位权方差的估值 $\hat{\sigma}_0^2$ 是无偏的。

必须指出，当模型中未知参数选择过多时，会引起平差中的过度参数化，详细分析见§4-4。

三、权矩阵误差对平差结果的影响

假设平差模型采用

$$E(l) = AX, \qquad D(l) = \sigma^2\tilde{P}^{-1} \tag{1-2-15}$$

而实际的平差模型应为

$$E(l) = AX, \qquad D(l) = \sigma^2 P^{-1} \tag{1-2-16}$$

现假设

$$P = \tilde{P} + \Delta P \tag{1-2-17}$$

则 $\tilde{P}$ 和 ΔP 均为正定矩阵。

1. 对未知数 X 估值的影响

根据最小二乘平差原理，由(1-2-16)式得到未知数 X 的估值为

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= (A^{\mathrm{T}}PA)^{-1}A^{\mathrm{T}}Pl \\
&= (A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A + A^{\mathrm{T}}\Delta PA)^{-1}(A^{\mathrm{T}}\tilde{P}l + A^{\mathrm{T}}\Delta Pl)
\end{aligned} \tag{1-2-18}
$$

利用矩阵恒等式(见附录A.7)有

$$
\begin{aligned}
(A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A + A^{\mathrm{T}}\Delta PA)^{-1} &= (A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}\{E - A^{\mathrm{T}}[\Delta P^{-1} + A(A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}]^{-1}A\cdot \\
&\qquad (A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}\} \\
&= (A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}[E - A^{\mathrm{T}}\Delta PA(A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A + A^{\mathrm{T}}\Delta PA)^{-1}] \\
&\approx (A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}[E - A^{\mathrm{T}}\Delta PA(A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}]
\end{aligned} \tag{1-2-19}
$$

将上式代入(1-2-18)式得到

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &\approx (A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}[E - A^{\mathrm{T}}\Delta PA(A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}](A^{\mathrm{T}}\tilde{P}l + A^{\mathrm{T}}\Delta Pl) \\
&= (A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}[A^{\mathrm{T}}\tilde{P}l + A^{\mathrm{T}}\Delta Pl - A^{\mathrm{T}}\Delta PA(A^{\mathrm{T}}\tilde{P}A)^{-1}(A^{\mathrm{T}}\tilde{P}l + A^{\mathrm{T}}\Delta Pl)]
\end{aligned} \tag{1-2-20}
$$

略去含 ΔP 的二次项有