

69

013-44
X8fa

（经）（济）（类） 考研必读丛书

1987—2002 年

考研数学 真题解析大全

——按题型分类解答与方法归纳

薛嘉庆 教授 编著

东北大学出版社

内 容 简 介

本书是报考经济类硕士研究生的考生必读的数学参考书。全书按照教育部最新制订的数学三(参照数学四)《数学考试大纲》的内容和顺序,把数学三和数学四历届试题按题型进行分类解答,解法标准、简捷、巧妙,同时对重要题型的解题思路、破题方法和答题技巧进行了归纳总结。书末附有历届数学三和数学四全部试题及答案索引。本书是复习数学过程中不可缺少的参考书,可以帮助读者系统地了解考研数学的历史,把握命题的规律,掌握重点,预测未来,也可以用于临考前的实战训练。本书还可作为考研辅导班的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题解析大全——按题型分类解答与方法归纳. 经济类/薛嘉庆编著. —沈阳: 东北大学出版社, 2002. 3

ISBN 7-81054-676-7

I. 考… II. 薛… III. 数学-研究生-入学考试-解题 IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014370 号

出 版 者: 东北大学出版社

(邮编: 110004 地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号)

出 版 人: 李毓兴

印 刷 者: 东北大学印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

经 销 者: 全国各地新华书店

开 本: 787mm×1092mm 1/16

字 数: 443 千字

印 张: 17.75

出版时间: 2002 年 3 月第 1 版

印刷时间: 2002 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑: 郭爱民

封面设计: 唐敏智

责任出版: 秦 力

定价: 29.00 元

垂询电话: 024—83680267 (社务办)

024—83680265 (传 真)

83687331 (市场部)

83687332 (出版部)

E-mail: neuph@neupress. com

http: //www. neupress. com

前 言

本书是报考经济类硕士研究生的考生必读的数学参考书。

一、学习本书的必要性

请你先翻翻本书的目录。

我相信，你看了这个目录，就会初步理解：“本书是报考经济类硕士研究生的考生必读的数学参考书”这句话的含义。

本书按照数学三（参照数学四）《数学考试大纲》的内容和顺序，把数学三和数学四历届试题按题型进行分类、解答，同时对重要题型的解题思路、破题方法和答题技巧进行了归纳总结。本书将历届数学三和数学四试题归纳为 135 个题型。这不仅是对数学考试历史的总结，而且由于样本很大（16 年共 514 题），它也必将起着预测未来的作用。可以预言，如果《数学考试大纲》不变，那么在今后若干年内，考研数学试题的大部分题型不会超出本书所归纳的题型范围。换句话说，读了本书，你就会掌握未来数学试题题型的大部分。这就是“必读”本书的主要原因。

本书的结构对于考生复习数学还有下列好处。

(1) 由于课程的复习都是由前往后，因此本书的内容排序也是由前往后，与考生复习数学的顺序保持一致，为你复习提供了方便。

(2) 结合本书复习，你就可以随时了解到：在你当前复习的内容中，究竟考过哪些题型，考过什么样的题目。从而掌握考研数学的广度和深度，做到复习时目标明确，心中有数。最终你将系统地掌握全部数学考试的历史情况。

(3) 由于统考已进行多年，近年来的考研数学试题年年都有重复往年试题的情况（这里说的“重复”是指属于同一种题型且差别不大的两道题）。阅读本书，试题重复的情况将一目了然。

(4) 综观各种题型中试题数目的分布情况，可以看出哪些内容是重点，哪些题型是重点。

(5) 本书在对考研试题的解答过程中，对常用方法、技巧及易错之处都有归纳总结，所用方法尽可能标准、简捷、巧妙。这些都是解答历届试题所用方法和技巧之精华，其重要程度可想而知。

(6) 书末附有数学三和数学四历届全部试题及其答案索引，供你检测自己的复习情况时使用。利用索引，可以很方便地从前面找到答案。

我确信：拥有本书，学透本书，将会使你心中有底，满怀信心地迎接考试，取得好成绩。

二、阅读本书的方法

本书是备考时必读的数学参考书，当然不是全部。你必须选择一本可以指

导你全面、系统、深入地复习数学的参考书，与本书结合在一起阅读。这里，我向你推荐一套考研数学丛书，这就是由我编著的《高等数学题库精编》、王永葆教授编著的《线性代数题库精编》和关颖男教授编著的《概率论与数理统计题库精编》。这套书虽然是为理工类考生写的，但它的大部分内容都适于经济类考生阅读。这套丛书出版三年来，受到了考生的一致好评。大量已经考取的硕士研究生都受益于这套丛书。我在撰写本《解析大全》时，主要是引用这套《丛书》的内容和方法来做解答和方法归纳的。如果能够把这套《丛书》和《考研数学真题解析大全》结合起来学习，那么你将取得事半功倍之效。《丛书》解决全面、系统、深入复习的问题，而《解析大全》起着明确目标、抓住重点、检测复习效果的作用。

再提一个建议供参考。关于考题重复的问题，需要说明的是，这种重复不仅在理工类或经济类内部，而且也在数学一至四之间重复。近年来多次出现过原来理工类的试题拿到经济类中作考题的情况。这就是说，经济类考生也应该了解理工类试题。我们知道，理工类和经济类的《数学考研大纲》有很大一部分是相同的（例如，一元函数微积分、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程、线性代数、概率论与数理统计等）。当然对于“高等数学”部分来说，理工类试题要比经济类试题难一些，但是事情的另一方面是，如果你掌握了理工类有关部分的试题及其解答，那么你将居高临下，势如破竹。因此建议你在阅读本书的同时，参看一下理工类《考研数学真题解析大全》也是十分必要的。

最后，提一个关键性建议。建议你吧本书中的全部试题做2~3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。每遍都分两个步骤：第一步，按本书第一、二编的自然顺序复习、做题；第二步，按逆年序做套题，数学三只需做第三编，数学四只需做第四编。记住，如上做法是绝对有益处的。

此外，有个说明。由于各年试题对于同一数学概念的记法不尽相同，例如，数学期望有时记为 $E(X)$ ，有时记为 EX ；再如，单位矩阵有时记为 I ，有时记为 E ，因此本书的某些数学符号也不求统一，请读者见谅。

在成书的过程中，杨泽宽教授做了大量工作。本书的出版得到东北大学出版社的领导和责任编辑的大力支持，作者一并表示感谢！

由于时间仓促，书中可能会有差错和缺欠，欢迎批评指正。

作者 谨识

2002年2月

目 录

前 言

第一编 微积分【共 258 题】

第 1 章 函数、极限、连续【共 34 题】	1
1.1 极限【共 27 题】	1
题型 1-1 极限定义及存在性【共 3 题】	1
题型 1-2 无穷大与无界判别【共 1 题】	2
题型 1-3 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限计算【共 1 题】	2
题型 1-4 含根式差的极限计算【共 2 题】	2
题型 1-5 用无穷小代换计算极限【共 1 题】	3
题型 1-6 用洛必达法则计算极限【共 4 题】	4
题型 1-7 用变量代换计算极限【共 2 题】	5
题型 1-8 ∞^0 型极限计算【共 2 题】	5
题型 1-9 1^∞ 型极限计算【共 7 题】	5
题型 1-10 含指数差的极限计算【共 1 题】	7
题型 1-11 无穷小阶的比较【共 2 题】	7
题型 1-12 极限在经济分析中的应用【共 1 题】	7
1.2 函数、连续、间断【共 7 题】	8
题型 1-13 函数特性的判别与函数计算【共 2 题】	8
题型 1-14 函数连续性的判别【共 4 题】	8
题型 1-15 间断点的判别【共 1 题】	9
第 2 章 一元函数微分学【共 67 题】	10
2.1 导数与微分【共 29 题】	10
题型 2-1 用导数定义计算极限【共 2 题】	10
题型 2-2 连续性、可导性和导数连续性判断【共 5 题】	11
题型 2-3 分段函数导数计算【共 1 题】	12
题型 2-4 显函数导数计算【共 3 题】	13
题型 2-5 隐函数导数计算【共 1 题】	13
题型 2-6 高阶导数计算【共 2 题】	14
题型 2-7 微分计算【共 2 题】	14
题型 2-8 求曲线的切线斜率和切线方程【共 7 题】	15
题型 2-9 导数在经济分析中的应用【共 6 题】	16

2.2 微分中值定理【共 9 题】	18
题型 2-10 罗尔定理应用【共 2 题】	18
题型 2-11 拉格朗日定理应用【共 6 题】	19
题型 2-12 柯西定理应用【共 1 题】	21
2.3 导数应用【共 29 题】	21
题型 2-13 恒等式的证明【共 1 题】	21
题型 2-14 函数形态的判定【共 2 题】	21
题型 2-15 单调性判定【共 2 题】	22
题型 2-16 极值的判定与求法【共 3 题】	22
题型 2-17 拐点的判定【共 1 题】	23
题型 2-18 用单调性分析证明函数不等式【共 4 题】	23
题型 2-19 用最值法证明函数不等式【共 1 题】	25
题型 2-20 最值问题【共 2 题】	25
题型 2-21 渐近线及其求法【共 2 题】	26
题型 2-22 函数形态及图形绘制【共 2 题】	27
题型 2-23 经济分析中的最值问题(一元函数)【共 9 题】	28
第 3 章 一元函数积分学【共 74 题】	33
3.1 不定积分【共 18 题】	33
题型 3-1 不定积分概念【共 4 题】	33
题型 3-2 第一类换元积分法【共 1 题】	34
题型 3-3 第二类换元积分法【共 1 题】	34
题型 3-4 分部积分法【共 11 题】	34
题型 3-5 有理分式的积分【共 1 题】	37
3.2 定积分与变上限积分【共 43 题】	37
题型 3-6 定积分性质【共 2 题】	37
题型 3-7 具有奇偶对称性的定积分计算【共 2 题】	38
题型 3-8 定积分换元积分法【共 3 题】	38
题型 3-9 定积分分部积分法【共 1 题】	39
题型 3-10 分段函数的定积分计算【共 2 题】	39
题型 3-11 分段函数的变上限积分计算【共 1 题】	40
题型 3-12 涉及变上限积分的计算问题【共 15 题】	40
题型 3-13 定积分证明题【共 10 题】	45
题型 3-14 广义积分计算【共 7 题】	49
3.3 定积分应用【共 13 题】	51
题型 3-15 平面图形面积计算及应用题【共 5 题】	51
题型 3-16 旋转体体积计算及应用题【共 7 题】	52
题型 3-17 积分在经济分析中的应用【共 1 题】	57

第 4 章 多元函数微积分学【共 46 题】	58
4.1 偏导数与全微分【共 22 题】	58
题型 4-1 具体函数的偏导数计算【共 3 题】	58
题型 4-2 抽象函数的偏导数计算【共 5 题】	59
题型 4-3 由一个方程所确定的隐函数的导数计算【共 3 题】	60
题型 4-4 由方程组所确定的隐函数的导数计算【共 4 题】	61
题型 4-5 全微分计算【共 7 题】	63
4.2 偏导数应用【共 6 题】	64
题型 4-6 多元函数的极值与最值【共 1 题】	64
题型 4-7 经济分析中的最值问题(多元函数)【共 5 题】	65
4.3 二重积分【共 18 题】	68
题型 4-8 交换积分次序【共 2 题】	68
题型 4-9 利用奇偶对称性计算二重积分【共 2 题】	68
题型 4-10 直角坐标系下的二重积分计算【共 8 题】	69
题型 4-11 极坐标系下的二重积分计算【共 6 题】	72
第 5 章 无穷级数【共 18 题】	75
5.1 常数项级数【共 6 题】	75
题型 5-1 级数敛散性判别【共 5 题】	75
题型 5-2 级数证明题【共 1 题】	76
5.2 幂级数【共 12 题】	76
题型 5-3 求收敛半径和收敛域【共 4 题】	76
题型 5-4 把函数展开成幂级数【共 2 题】	78
题型 5-5 级数求和【共 6 题】	78
第 6 章 常微分方程与差分方程【共 19 题】	82
6.1 一阶微分方程【共 8 题】	82
题型 6-1 可分离变量型微分方程【共 1 题】	82
题型 6-2 齐次方程【共 2 题】	82
题型 6-3 一阶线性微分方程【共 5 题】	83
6.2 二阶常系数线性微分方程【共 4 题】	85
题型 6-4 二阶常系数线性齐次微分方程【共 1 题】	85
题型 6-5 二阶常系数线性非齐次微分方程【共 3 题】	85
6.3 常微分方程应用【共 4 题】	86
题型 6-6 常微分方程在几何上的应用【共 2 题】	86
题型 6-7 常微分方程在经济分析中的应用【共 2 题】	87
6.4 差分方程及应用【共 3 题】	88
题型 6-8 一阶常系数线性差分方程【共 3 题】	88

第二编 线性代数【共 131 题】

概率论与数理统计【共 125 题】

第 7 章 线性代数【共 131 题】	90
7.1 行列式【共 7 题】	90
题型 7-1 行列式计算【共 7 题】	90
7.2 矩阵【共 36 题】	93
题型 7-2 方阵行列式性质与计算【共 5 题】	93
题型 7-3 矩阵计算【共 2 题】	95
题型 7-4 逆矩阵的性质及求法【共 5 题】	96
题型 7-5 矩阵的秩及计算【共 5 题】	97
题型 7-6 伴随矩阵及有关计算【共 7 题】	99
题型 7-7 矩阵方程的求解【共 6 题】	101
题型 7-8 分块矩阵及计算【共 4 题】	103
题型 7-9 初等矩阵及应用【共 2 题】	105
7.3 向量【共 19 题】	107
题型 7-10 关于向量组线性关系的选择题【共 9 题】	107
题型 7-11 向量组线性相关性的判定与证明【共 7 题】	110
题型 7-12 向量组的秩与极大线性无关组的求法【共 3 题】	113
7.4 线性方程组【共 31 题】	114
题型 7-13 齐次线性方程组解的判定与求解【共 10 题】	114
题型 7-14 非齐次线性方程组解的判定【共 6 题】	119
题型 7-15 不含参数的非齐次线性方程组的求解【共 2 题】	121
题型 7-16 含参数的非齐次线性方程组的求解【共 7 题】	123
题型 7-17 涉及线性方程组的证明题【共 4 题】	129
题型 7-18 利用线性方程组求向量的线性组合【共 2 题】	132
7.5 矩阵的特征值和特征向量【共 27 题】	133
题型 7-19 求矩阵的特征值和特征向量【共 4 题】	133
题型 7-20 求矩阵多项式的特征值【共 4 题】	135
题型 7-21 涉及特征值和特征向量的含参数的计算问题【共 3 题】	136
题型 7-22 已知特征值和特征向量求矩阵【共 1 题】	137
题型 7-23 涉及特征值和特征向量的证明题【共 2 题】	138
题型 7-24 将矩阵化为对角阵的计算【共 8 题】	138
题型 7-25 相似矩阵的性质及应用【共 5 题】	144
7.6 二次型【共 11 题】	146
题型 7-26 将二次型化为标准形【共 2 题】	146
题型 7-27 确定参数的值使二次型和矩阵为正定【共 5 题】	148
题型 7-28 关于二次型及其矩阵的证明题【共 3 题】	149
题型 7-29 关于矩阵合同与相似的判别【共 1 题】	151

第 8 章 概率论【共 111 题】	152
8.1 随机事件和概率【共 29 题】	152
题型 8-1 关于事件的运算和概率计算【共 10 题】	152
题型 8-2 加法公式的应用【共 3 题】	154
题型 8-3 乘法公式和条件概率公式的应用【共 5 题】	156
题型 8-4 关于事件独立性的判定【共 4 题】	157
题型 8-5 古典概率问题【共 3 题】	159
题型 8-6 几何型概率问题【共 1 题】	160
题型 8-7 利用全概率公式和贝叶斯公式的计算问题【共 3 题】	161
8.2 随机变量及其概率分布【共 26 题】	163
题型 8-8 概率分布和分布函数的性质与计算【共 7 题】	163
题型 8-9 离散型随机变量的计算问题【共 6 题】	166
题型 8-10 连续型随机变量的计算问题【共 10 题】	168
题型 8-11 随机变量函数的分布的求法【共 3 题】	172
8.3 二维随机变量的联合概率分布【共 10 题】	175
题型 8-12 二维离散型随机变量概率分布的计算【共 4 题】	175
题型 8-13 二维连续型随机变量概率分布的计算【共 1 题】	177
题型 8-14 二维随机变量取某范围值的概率【共 2 题】	178
题型 8-15 二维离散型随机变量函数的分布的求法【共 1 题】	179
题型 8-16 二维连续型随机变量函数的分布的求法【共 2 题】	180
8.4 随机变量的数字特征【共 42 题】	181
题型 8-17 离散型随机变量的数字特征计算【共 8 题】	181
题型 8-18 连续型随机变量的数字特征计算【共 9 题】	184
题型 8-19 正态分布的数字特征计算【共 2 题】	188
题型 8-20 随机变量的独立、相关和相关系数问题【共 12 题】	188
题型 8-21 涉及切比雪夫不等式的计算问题【共 2 题】	194
题型 8-22 有关数字特征的概率应用问题(含经济应用问题)【共 9 题】	194
8.5 大数定律和中心极限定理【共 4 题】	198
题型 8-23 涉及中心极限定理问题【共 4 题】	198
第 9 章 数理统计【共 14 题】	201
9.1 数理统计的基本概念【共 6 题】	201
题型 9-1 求统计量的分布【共 6 题】	201
9.2 参数估计【共 7 题】	204
题型 9-2 点估计的概念与方法【共 3 题】	204
题型 9-3 区间估计的概念和方法【共 4 题】	206
9.3 假设检验【共 1 题】	209
题型 9-4 正态总体未知参数的假设检验【共 1 题】	209

第三编 全国硕士研究生入学统一考试 历年数学三试题及答案索引

2002 年数学三试题及答案索引	211
2001 年数学三试题及答案索引	213
2000 年数学三试题及答案索引	215
1999 年数学三试题及答案索引	217
1998 年数学三试题及答案索引	219
1997 年数学三试题及答案索引	221
1996 年数学三试题及答案索引	223
1995 年数学三试题及答案索引	225
1994 年数学三试题及答案索引	227
1993 年数学三试题及答案索引	229
1992 年数学三试题及答案索引	231
1991 年数学三试题及答案索引	233
1990 年数学三试题及答案索引	235
1989 年数学三试题及答案索引	237
1988 年数学三试题及答案索引	239
1987 年数学三试题及答案索引	241

第四编 全国硕士研究生入学统一考试 历年数学四试题及答案索引

2002 年数学四试题及答案索引	244
2001 年数学四试题及答案索引	246
2000 年数学四试题及答案索引	248
1999 年数学四试题及答案索引	250
1998 年数学四试题及答案索引	252
1997 年数学四试题及答案索引	254
1996 年数学四试题及答案索引	256
1995 年数学四试题及答案索引	258
1994 年数学四试题及答案索引	259
1993 年数学四试题及答案索引	261
1992 年数学四试题及答案索引	263
1991 年数学四试题及答案索引	264
1990 年数学四试题及答案索引	267
1989 年数学四试题及答案索引	269
1988 年数学四试题及答案索引	271
1987 年数学四试题及答案索引	272

参考文献	274
------------	-----

第一编 微 积 分

第 1 章 函数·极限·连续

数学三和数学四考试内容

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;
反函数、复合函数、隐函数、分段函数;基本初等函数的性质及其图
形;初等函数;数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限
和右极限;无穷小和无穷大的概念及关系;无穷小的性质及无穷小的
比较;极限四则运算;极限存在的两个准则(单调有界准则和夹逼准
则);两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

函数连续与间断的概念;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性
质.

1.1 极 限

题型 1-1 极限定义及存在性

- 1 (1987 数学三、四) 判断下面结论是否正确: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} = \infty$.

【解】 因为 $\lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} = +\infty$, 所以结论错误.

- 2 (1988 数学三、四) 判断下面结论是否正确: 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 都存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在.

【解】 取 $f(x) = 0$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ (存在), 但 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在. 故结论错误.

3 (2000 数学三、四) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(A) 存在且一定等于零.

(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.

(D) 不一定存在.

【D】

【解】 取 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = x$, 题设条件均满足, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (不存在). 又取 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = 0$, 此时 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ (存在). 故应选(D).

当举反例时, 要尽可能简单.

方法
归纳

题型1-2 无穷大与无界判别

1 (1991 数学四) 设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} \frac{n^2 + \sqrt{n}}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 则当 $n \rightarrow \infty$ 时,

x_n 是

(A) 无穷大量. (B) 无穷小量. (C) 有界变量. (D) 无界变量.

【D】

【解】 因为子数列 $\{x_{2m}\}$ 的极限 $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m} = 0$, 而子数列 $\{x_{2m-1}\}$ 的极限 $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m-1} = +\infty$, 所以 x_n 不是无穷小量, 也不是无穷大量, 实际上是无界变量. 故选(D).

题型1-3 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限计算

1 (1999 数学四) 设函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] = \frac{1}{2} \ln a$.

【解】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[a^1 a^2 \cdots a^n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln a^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\ln a}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \ln a$.

题型1-4 含根式差的极限计算

1 (1990 数学三、四) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3}\sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{2}$.

【解】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3}\sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3}\sqrt{n} + \sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3}\sqrt{n} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 2$.

2 (1993 数学四) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解】 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} [\sqrt{n(n+1)} - \sqrt{(n-1)n}]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n(n+1)} + \sqrt{(n-1)n}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

方法
归纳

当极限式中含有根式差时,通常将其有理化.

这里的两道题都含有根式差,有理化后变为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限. $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的一种有效的计算方法是用最大项的绝对值去除分子、分母,这种题型的最简单形式是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{当 } m < n \text{ 时,} \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m = n \text{ 时,} \\ \infty, & \text{当 } m > n \text{ 时.} \end{cases}$$

式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$. 此式应该作为公式记住.

题型 1-5 用无穷小代换计算极限

1 (1993 数学三) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} = \frac{6}{5}.$

【解】 因为当 $x \rightarrow \infty$ 时 $\sin \frac{2}{x} \sim \frac{2}{x}$, 所以原式 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{(5x+3)x} = \frac{3}{5}.$

方法
归纳

无穷小代换是计算函数极限的十分重要的方法,它可以使极限式化简,从而可以提高计算速度.理工类试题中这种题型出现得较多(参看文献[4]).这里举其中一题为例.

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$ (1991 数学二).

解: 因为当 $x \rightarrow 0$ 时 $e^x - 1 \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 所以

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

常用无穷小代换公式有如下 10 个:

- (1) $\sin x \sim x$; (2) $\tan x \sim x$; (3) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; (4) $\arcsin x \sim x$;
(5) $\arctan x \sim x$; (6) $\ln(1+x) \sim x$; (7) $e^x - 1 \sim x$; (8) $a^x - 1 \sim x \ln a$;
(9) $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x$; (10) $(1+x)^a - 1 \sim ax$ (a 为实数).

有三点注意事项: (1) 必须 $x \rightarrow 0$.

(2) 只能在乘除运算中使用无穷小代换,不能在加减运算中使用,例如下列的代换($\sin x$ 被 x 代换)是错误的:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0.$$

(3) 在上述 10 个公式中的 x 位置可以是任意无穷小函数. 例如当 $x \rightarrow 0$ 时 $e^x - \sin x - 1 \sim x - \sin x$.

题型 1-6 用洛必达法则计算极限

1 (1987 数学四) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$.

2 (1988 数学四) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \tan \frac{\pi}{2} x$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\cot \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-\frac{\pi}{2} \csc^2 \frac{\pi}{2} x} = \frac{4}{\pi}$.

3 (1992 数学四) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x}$.

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1) \left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} x\right)} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos \frac{\pi}{2} x}$
 $= \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x} = -\frac{4}{\pi^2}$.

4 (1997 数学四) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right]$ ($a \neq 0$).

【解】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - (1-a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + 2a^2x\ln(1+ax) - a(1-ax)}{2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a^2\ln(1+ax) + \frac{2a^3x}{1+ax} + a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$.

方法
归纳

洛必达法则是求 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的最重要方法之一. 而其他不定型 ($0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 0^0 , 1^∞) 一般也要先化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型后再使用洛必达法则.

$u(x)^{v(x)}$ 通常称为幂指型函数. 处理这类函数经常使用“用 e 抬起”的方法, 将其化为指数函数, 即

$$u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\frac{\ln u(x)}{\frac{1}{v(x)}}}.$$

属于幂指型极限的不定型有 ∞^0 , 0^0 和 1^∞ . 计算这种类型的极限, 首先就是“用 e 抬起”, 最终也转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. (其中 1^∞ 型有更简单的计算公式, 参见题型 1-9 的“方法归纳”.)

洛必达法则是很有用的求极限的方法, 但是请切记: 使用洛必达法则之前一定要将极限式尽可能地化简. 化简的常用方法有: 无穷小代换、约分、将极限值不为零的因子及时取极限.

题型 1-7 用变量代换计算极限

1 (1988 数学三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$.

【解】 令 $t = x \ln x$, 则 $x^x = e^{x \ln x} = e^t$. 于是, 原式 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

2 (1994 数学四) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$.

【解】 令 $x = \frac{1}{t}$, 则原式 $= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2}.$$

题型 1-8 ∞^0 型极限计算

1 (1989 数学四) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 原式 $= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{x + e^x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} \right\}$
 $= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} \right\} = e.$

【注】 $\exp t$ 是 e^t 的另一种写法. 如果指数 t 的位置是较复杂的数学式, 那么这种写法很方便.

∞^0 型极限应先用 e 抬起, 再使用洛必达法则. 本题使用了 3 次洛必达法则.

2 (1991 数学四) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

【解】 原式 $= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right\} = e^0 = 1.$

【注】 因为 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, 所以 $[\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

题型 1-9 1^∞ 型极限计算

1 (1987 数学三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

【解一】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + xe^x)^{\frac{1}{xe^x}} \right]^{e^x} = e.$

【解二】 原式 $= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x}{1 + xe^x} \right\} = e.$

【解三】 原式 $= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x} \right\} = e.$

方法
归纳

设当 $x \rightarrow x_0$ 时 $u = u(x) \rightarrow 1$, $v = v(x) \rightarrow \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)}$ 是 1^∞ 型极限, 有 3 种计算方法:

$$(1) \lim u^v = \lim \left\{ [1 + (u-1)]^{\frac{1}{u-1}} \right\}^{(u-1)v} = e^{\lim (u-1)v}.$$

$$(2) \lim u^v = e^{\lim v \ln u} = e^{\lim \frac{\ln u}{\frac{1}{v}}}.$$

$$(3) \lim u^v = e^{\lim(u-1)v}.$$

方法(1)是将所给的幂指函数凑出“底e”，再取极限。

方法(2)先用e抬起，再使用洛必达法则。

方法(3)实际上就是方法(1)的公式化，即把“凑底e”的过程省略，而把结果当作公式直接使用。显然方法(3)最简单，以下各题均用方法(3)计算。

2 (1989 数学三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$.

【解】先作代换，令 $t = \frac{1}{x}$ ，再用 1^∞ 型极限计算公式，有

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} (\sin t + \cos t)^{\frac{1}{t}} = \exp \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t + \cos t - 1}{t} \right\} = \exp \{ \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t - \sin t) \} = e.$$

3 (1991 数学三) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ ，其中 n 是给定的自然数。

【解】原式 $= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx} - n}{nx} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \cdots + ne^{nx}}{n} \right\}$
 $= \exp \left\{ \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} \right\} = e^{\frac{n+1}{2}}.$

4 (1991 数学三、四) 下列各式中正确的是

(A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = 1.$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$

(C) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x = -e.$

(D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{-x} = e.$

【A】

【解】选项(A)和(B)是 0^0 型极限，而(C)和(D)是 1^∞ 型极限。计算如下：

(A) 左边 $\stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+t}} = e^0 = 1$ 。故应选(A)。从而(B)是错误的。

(C) 左边 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot x} = e^{-1} \neq -e$ 。故(C)错。

(D) 左边 $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot (-x)} = e^{-1} \neq e$ 。故(D)错。

5 (1998 数学四) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ (n 为自然数)。

【解】设 x 为连续变量。根据 1^∞ 型极限计算公式，有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2 x}{3x^2} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{3x^2} \right\} = e^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

取 $x = \frac{1}{n}$ ，则 原式 $= e^{\frac{1}{3}}$ 。

【注】在计算中使用等价无穷小代换公式： $\tan x \sim x$ 。

此外，评分标准指出：“对数列极限直接用洛必达法则，扣2分。”

6 (2000 数学四) 若 $a > 0, b > 0$ 均为常数，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} = \underline{(ab)^{\frac{3}{2}}}.$

$$\begin{aligned}\text{【解】 原式} &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1 \right) \cdot \frac{3}{x} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(a^x + b^x - 2)}{2x} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(a^x \ln a + b^x \ln b)}{2} \right\} = \exp \left\{ \frac{3(\ln a + \ln b)}{2} \right\} = (ab)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

7 (2002 数学三、四) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n = \underline{\quad \frac{1}{1 - 2a} \quad}$.

$$\text{【解】 原式} = \ln \left[\exp \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 2na + 1 - n + 2na)n}{n(1 - 2a)} \right] = \frac{1}{1 - 2a}.$$

题型 1-10 含指数差的极限计算

1 (1997 数学二) 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

【C】

$$\begin{aligned}\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\tan x - x} - 1)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{n x^{n-3}}.\end{aligned}$$

由计算结果看出, 当 $n = 3$ 时极限值为 $\frac{1}{3}$, 即 $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^3 是同阶无穷小. 故选(C).

【注】在数学三和四的往年试题中并没有出现过“含指数差的极限”题型, 因为它比较重要, 所以这里把数学二的试题拿来作例题.

题型 1-11 无穷小阶的比较

1 (1989 数学三、四) 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时

(A) $f(x)$ 与 x 是等阶无穷小量. (B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小量.
(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量. (D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量. 【B】

$$\text{【解】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{1} = \ln 2 + \ln 3 \neq 1, \text{ 故选(B).}$$

2 (1992 数学三、四) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个比其他三个更高阶的无穷小量?

(A) x^2 . (B) $1 - \cos x$. (C) $\sqrt{1 - x^2} - 1$. (D) $x - \tan x$. 【D】

【注】这是数学三试题, 其中选项(D)改为 $x - \sin x$ 后是数学四试题.

【解】(这里解数学三试题, 数学四试题解法类似.) 根据无穷小代换公式, 有

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \sqrt{1 - x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2, \quad x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3,$$

最后一式可由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = -\frac{1}{3}$ 得到(参看题型 1-10 第 1 题). 比较以上各式, 应选(D).

题型 1-12 极限在经济分析中的应用

1 (1997 数学三) 在经济学中, 称函数 $Q(x) = A[\delta K^{-x} + (1 - \delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数, 而称函数 $\bar{Q} = AK^\delta L^{1-\delta}$ 为 Cobb-Douglas 生产函数(简称 C-D 生产函数). 试证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, 固定替代弹性生产函数变为 C-D 生产函数, 即有 $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = \bar{Q}$.

【解】根据 1^∞ 型极限计算公式, 有