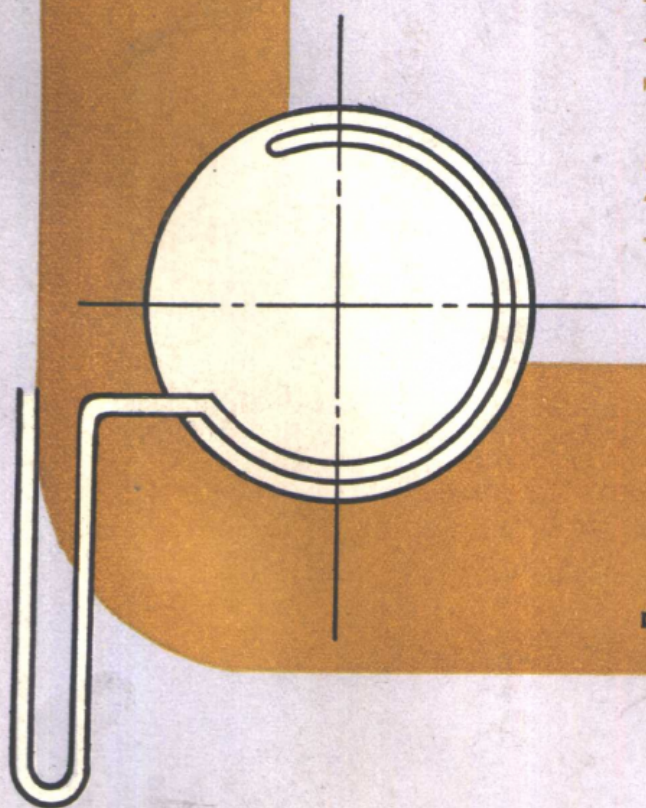


高等学校教学用书

计算机在矿井通风中的应用

张惠忱 编著

JISUANJI
ZAI
KUANG JING
TONGFENG
ZHONGDE
YINGYONG



中国矿业大学出版社

责任编辑：马跃龙

封面设计：张蕴琪

ISBN 7-81021-564-7

TD·111 定价：5.35 元

7D72
727Z

高等学校教学用书

计算机在矿井通风中的应用

张惠忱 编著

中国矿业大学出版社

(苏)新登字第010号

内 容 提 要

本书是根据矿山通风与安全专业的《计算机在矿井通风中的应用》课程教学大纲要求编写的,同时也考虑现场通风工程技术人员实际工作的需要。书中介绍了在风网分析、风量调节、通风阻力测定和矿井主扇性能测定等矿井通风技术管理工作中应用电子计算机的内容。通过例题介绍有关计算机程序的使用方法。对风网解算程序做了详细解释,以提高读者阅读和编写程序的能力。各章后附有思考题与上机习题。书中所有计算机源程序均输入软盘。

本书及配套软盘可供煤炭高校矿山通风与安全专业使用教材,或采煤专业教学参考书,也可供从事煤炭工业科研、设计及现场工程技术人员参考。

责任编辑:马跃龙

高等学校教学用书
计算机在矿井通风中的应用
张惠忱 编著

中国矿业大学出版社出版
江苏省新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/16 印张 20.75 字数 504 千字
1992年4月第1版 1992年4月第1次印刷
印数 1—1000 册

ISBN 7-81021-564-7

TD·111

定价: 5.35元

前 言

随着科学技术水平的提高,管理手段的现代化,近年来电子计算机的应用已较普遍,一些较大的煤矿一般都配有 IBM 系列的计算机。目前,矿井通风方面应用计算机进行矿井通风设计和风网解算也日渐普遍。

本书是根据矿井通风与安全专业的《计算机在矿井通风中的应用》课程教学大纲编写的,同时也考虑现场通风工程技术人员实际工作的需要。编写本书的指导思想是紧密结合矿井通风的实际需要,介绍在风网分析、风量调节、通风阻力测定和矿井主扇性能测定等矿井通风技术管理工作中应用电子计算机的内容,通过例题介绍有关计算机程序的使用方法。对风网解算程序进行了较详细的解释,以提高读者阅读和编程的能力。

本书中的有关程序均为作者编写,所有源程序均已输入软盘,并已在科研工作中多次应用。

本书第一章简要介绍有通风网络图论方面的内容,做为通风计算机程序的基础知识。

限于作者水平,书中错误之处,恳请广大读者不吝指正。

张惠忱

一九九一年六月

ABA17/01

目 录

第一章 矿井通风网络图论	(1)
第一节 概述.....	(1)
第二节 树.....	(4)
第三节 关联矩阵.....	(5)
第四节 回路矩阵.....	(7)
第五节 割集矩阵.....	(12)
第六节 节点—参考路径矩阵.....	(15)
第七节 图论方法的应用.....	(16)
思考题.....	(18)
第二章 矿井通风网络解算程序	(19)
第一节 概述.....	(19)
第二节 程序算法.....	(19)
第三节 程序的编制方法.....	(27)
第四节 节点风压法.....	(35)
第五节 风网解算源程序.....	(40)
思考题.....	(53)
第三章 矿井风网解算	(55)
第一节 上机准备工作.....	(55)
第二节 上机及结果分析.....	(58)
第三节 风网解算程序应用.....	(59)
思考题.....	(101)
上机习题.....	(101)
第四章 矿井风量调节	(105)
第一节 风量调节程序算法.....	(105)
第二节 风量调节程序功能.....	(110)
第三节 风量调节程序的应用.....	(116)
第四节 矿井风量调节源程序.....	(141)
思考题.....	(158)
上机习题.....	(159)
第五章 矿井通风设计	(162)
第一节 概述.....	(162)
第二节 用计算机进行通风设计的方法.....	(163)
第三节 应用风网解算程序进行通风设计计算.....	(164)
第四节 矿井通风设计例题.....	(176)

第五节 矿井通风系统改造.....	(221)
第六节 矿井通风系统改造应用举例.....	(226)
思考题.....	(234)
上机习题.....	(234)
第六章 矿井通风阻力测定.....	(238)
第一节 矿井通风阻力测定方法.....	(238)
第二节 矿井通风阻力测定数据整理程序算法.....	(243)
第三节 程序应用.....	(247)
第四节 通风阻力测定数据整理源程序.....	(258)
思考题.....	(267)
第七章 矿井主扇性能测定数据整理与绘图.....	(268)
第一节 BASIC 语言简介.....	(268)
第二节 矿井主扇性能测定方法.....	(276)
第三节 矿井主扇性能测定数据整理与绘图.....	(283)
第四节 主扇性能测定现场监视绘图程序.....	(298)
第五节 矿井主扇性能测定误差分析.....	(307)
第六节 主扇性能测定数据整理与绘图程序.....	(312)
思考题.....	(322)

第一章 矿井通风网络图论

第一节 概 述

图论是数学中应用非常广泛的一个分支, 矿井通风、运输规划、电工学、化学、销售学、教育学等各个不同领域内的许多问题都可以描述为图论的问题。图论做为—门科学是由 18 世纪的瑞士数学家欧拉创立的, 在电子计算机问世以后, 应用更加广泛。

本章所讨论的图与人们通常熟悉的图, 如圆、三角形以及函数图形不同, 图论中的图是表示某类具体事物和这些事物之间的联系。如果用点表示具体的事物, 用线段表示两事物之间的联系, 那么, 一个图就是由表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的线段的集合构成。这些点称为图的顶点(Vertex)或节点(Node), 线段称为边(Edge)或分支(Branch)。如全国铁路网就是一个图, 节点表示车站, 线段表示两车站之间的铁路线。

图的种类很多, 从矿井通风的应用考虑, 我们研究的主要内容是有向连通图。如图 1-1 所示, 每个边都有一定的方向且相互连通。

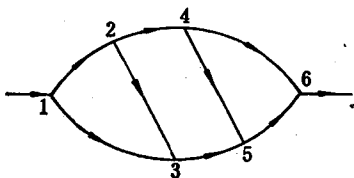


图 1-1 有向连通图

一、图的定义

图 $G = (V, E, \Phi)$, 其中

1. $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 是图 G 顶点的有限非空集合, 称为图的顶点或节点的集合, 记为 $V(G)$ 或 V ;

2. $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 是图 G 线段的集合, 记为 $E(G)$ 或 E ;

3. Φ 是从 E 到 V 中的有序或无序偶对所组成的集合的映射。

通常, 图也记成 $G = (V, E)$ 。

例如某图 $G = (V, E, \Phi)$, 其中

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$$

$$G = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$$

$$\Phi: \Phi(e_1) = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \Phi(e_2) = \langle v_1, v_3 \rangle$$

$$\Phi(e_3) = \langle v_2, v_4 \rangle \quad \Phi(e_4) = \langle v_3, v_4 \rangle$$

$$\Phi(e_5) = \langle v_2, v_5 \rangle \quad \Phi(e_6) = \langle v_3, v_5 \rangle$$

$$\Phi(e_7) = \langle v_4, v_5 \rangle$$

表示如图 1-2 所示的图。

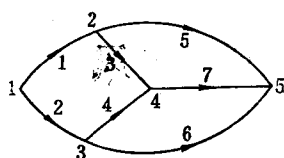


图 1-2 一般图形

通过图的顶点与边的关联关系来描述图 G ，存储图 G 并从中获得有关图 G 的必要信息。

具有 m 个节点 n 条边的图，即 $V(G) = m$ ， $E(G) = n$ ，通常也称 (m, n) 图，上例即为一 $(5, 7)$ 图。

图的最本质的内容是一种二元关系，即任一条边有两个顶点与其相联系，我们研究图就是研究顶点和边之间的关系。

二、子图

1. 图 $G = (V, E)$ 的子图 $G_s = (V_s, E_s)$ 是这样—个图，其中 V_s 和 E_s 分别为 V 和 E 的子集；

2. 如果 $V_s \subset V$ 和 $E_s \subset E$ ，即 V_s 和 E_s 分别为 V 和 E 的真子集，则 G_s 为 G 的真子图；

3. 如图 $V_s = V$ ，则子图 G_s 称为 G 的生成子图。

如图 1-3 所示，其中 a 为图 G ， b 为真子图， c 为生成子图。

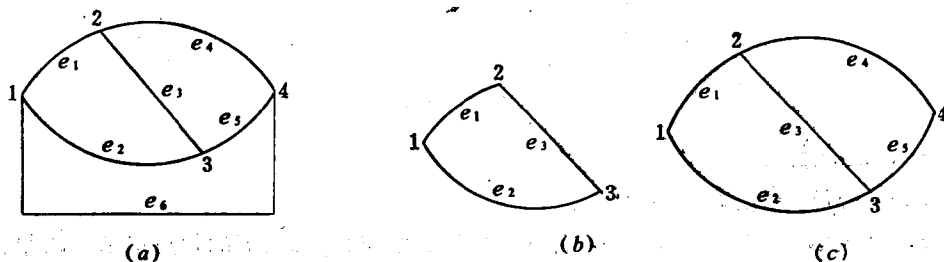


图 1-3 图与子图的关系

三、邻接

图 $G = (V, E)$ 中，若 $v_i, v_j \in V$ 且 $e_s = (v_i, v_j) \in E$ ，则 v_i 和 v_j 邻接，记为 $v_i \text{adj } v_j$ 。 v_1 和 v_2 ， v_2 和 v_4 ， v_2 和 v_3 邻接。两个有共同顶点的边为边邻接。

四、关联

如图 1-3 中，边 e_1 与顶点 v_1 和 v_2 关联， e_s 与顶点 v_i, v_j 关联记为 $e_s = (v_i, v_j)$ 。关联是二元关系即顶点与边的关系，邻接则为同元关系。

如果两条边 e_1 和 e_2 与顶点 v_i, v_j 关联，即 $e_1 = (v_i, v_j)$ 和 $e_2 = (v_i, v_j)$ ，则称 e_1 和 e_2 为平行边。如果图 G 中存在平行边称为多重图，否则称为简单图。

五、线度或次数

与一个顶点关联的边的数目称为线度，记为 $d(V)$ 。如图 1-4 中 $d(v_5) = 3$ 。一般对有向图进入顶点的线度为负，离开顶点的为正，故图 1-4 中正线度 $d^+(v_2) = 2$ ，负线度 $d^-(v_2) = 1$ ， $d(v_2) = d^+(v_2) + d^-(v_2) = 3$ 。

任一图 G 各顶点的线度之和为其边数的 2 倍，且线度为奇数的顶点的数目是偶数，如图 1-4 中 v_2, v_3, v_4, v_5 有 4 个顶点的线度为奇数。

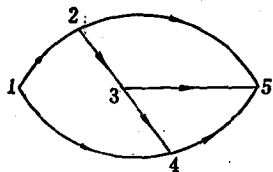


图 1-4 图的线度关系

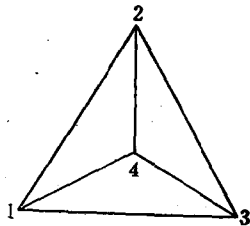


图 1-5 完备图

六、完全图或完备图

如果图 G 每个顶点的线度均为 $m-1$ (m 为顶点数)，且两两顶点都相邻接的图称为完备图，如图 1-5 中每个顶点的线度均为 $d(K_4) = 3$ ，故为完备图。

七、图的同构

两个图 G_1 和 G_2 ，如果其中 V 和 E 都保持一一对应关系，则称 G_1 和 G_2 同构，记为 $G_1 \Leftrightarrow G_2$ 。如图 1-6 中图 a, b, c, d 是同构图，尽管图形不同，但其顶点和边的关系保持不变。在绘制矿井通风网络图时，为使图形清晰、美观，并尽量消除各分支间的交叉，应保持所绘的风网图与原图同构。

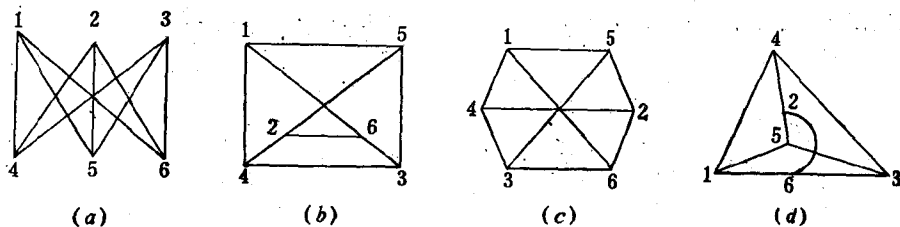


图 1-6 同构图

八、链、路和回路

图 G 中不同顶点和边交替衔接的连线称为链。如图 1-7 中的 $1-3-5-4-6$ 为一链。在链中不考虑边的方向，闭合的链称为回路。如图 1-7 中 $1-3-2-1$ ，各边的方向都一致的顺向链称为路，在风网图中称风路，如图 1-7 中 $1-3-5-6$ 。

九、有权图

如果图 G 的边有一实数集合称为边权图。矿井风网图中如每个边都赋予风阻值即为一边权图。如顶点有一实数集合称为点权图。

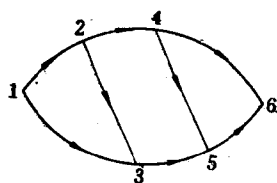


图 1-7 图的路和回路

第二节 树

一、树的定义

不含回路的连通图称为树，因此：

1. 树中任相邻两顶点之间必有一条且仅有一条边；
2. 树中不相邻的两顶点之间加上一条边，恰得一回路；
3. 设 T 是有 m 个顶点的树，则 T 的边数为 $m-1$ 。

图 1-8 为具有 8 个顶点 7 个边的树，其中的边也称为树枝。

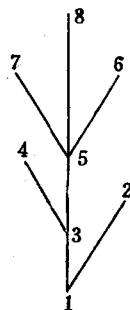


图 1-8 树图

二、生成树

如 T 是图 G 的一个生成子图且又是一棵树，则称 T 是 G 的一生成树。因此

1. T 是连通图 G 的生成树的主要条件为： T 是 G 的有 $m-1$ 条边的生成子图；
2. 图 G 为生成树的必要条件是 G 连通，不含回路，但含有 G 的全部顶点。

通常讨论的树都是生成树，对图 G 而言，其生成树 T 的树外边称余树或余弦或连支，则余树可称为图 G 的补图，记为 T 。于是，对有 n 个边的图 G 则有 $m-1$ 个树枝， $n-(m-1)=n-m+1$ 个余树。

应该指出，生成树不是唯一的，如图 1-9 中一简单角联网络可找出 8 个生成树。稍

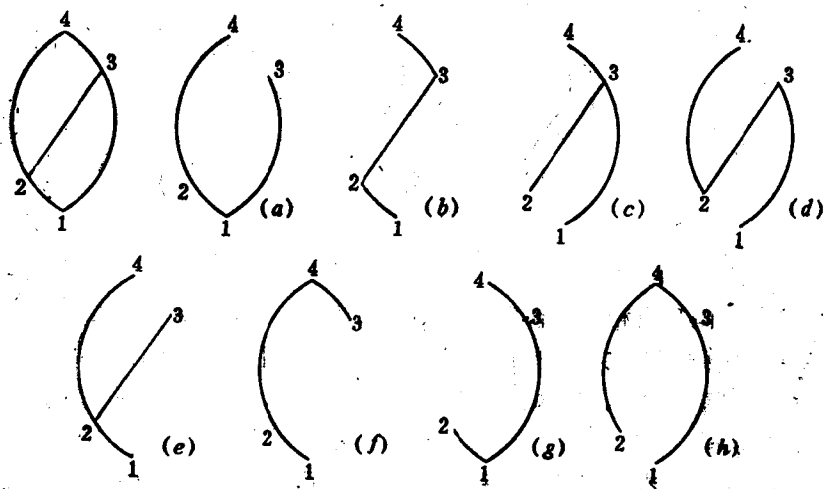


图 1-9 生成树图

复杂的图，其生成树的数量多得惊人，通常可用下式计算

$$\det(AA)^T \quad (1-1)$$

式中 A 为图 G 的关联矩阵。

对完备图 $\det(AA)^T = m^{(m-2)}$ ，如图 1-5 有 4 个顶点，故生成树的数量为 $m^{m-2} = 4^2 = 16$ 。

三、求生成树的算法

对图 G 的各条边赋权后构成边权图，由于图 G 的生成树数量较多，如果在选择生成树时排除了权值大的边，可得到最小生成树。相反，排除权值小的边亦可得最大生成树。在解算通风网络时为加快收敛速度，通常选用最小生成树，并用“破圈法”来实现。

有一风网如图 1-10 所示，图中有 8 个顶点 11 个边，以风阻 R 为权值，则 R_i 即为 i 号边的风阻值，求最小生成树的方法如下：

1. 把各边的风阻值按升序排列，如排好后的顺序为 $R_1, R_6, R_8, R_2, R_7, R_9, R_{10}, R_4, R_3, R_{11}, R_5$ ；

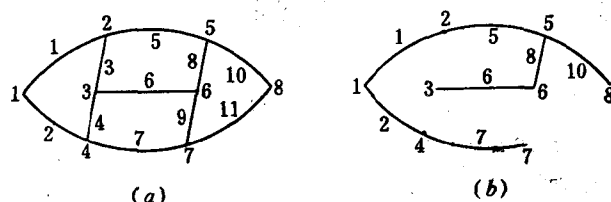


图 1-10 图与最小生成树

2. 从最小风阻值开始，用彩色笔逐一画到原来的位置上；
3. 当图中一旦出现回路即成圈，则去掉最后成圈的边。显然，成圈的边都是余树；
4. 最后得出最小生成树的树枝集合 $T = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_{10})$ ，余树集为 $T' = (e_5, e_6, e_9, e_{11})$ ，如图 1-10b 所示。

第三节 关联矩阵

一、关联矩阵的定义

设图 $G = (V, E)$ 为 (m, n) 有向连通图， $|V| = m$ ， $|E| = n$ ，称 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为图 G 的关联矩阵，其中：

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联, 且 } i \text{ 是边 } j \text{ 的始点, 即} \\ & e_j = (v_i, v_k) \in E; \\ -1, & \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联, 且 } i \text{ 是 } j \text{ 的终点, 即} \\ & e_j = (v_k, v_i) \in E; \\ 0, & \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 不关联.} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$

图 G 如图 1-11 所示， $m = 5$ ， $n = 7$ ，按上述定义可写出关联矩阵 A 。

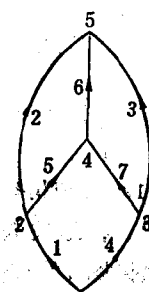


图 1-11 求关联矩阵的图

$$A = \begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \hline v_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ \hline v_5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \quad (1-2)$$

从上述矩阵可以看出, 各列元素之和为零, 表明不是一个满秩矩阵, 其中有一个顶点是相关的, 即该顶点的信息是多余的。对矿井风网来说, 一般进、回风节点自动满足风量平衡。如以顶点 5 为参考点, 则关联矩阵 A_s 为

$$A_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{(m-1) \times n} \quad (1-3)$$

该矩阵称为基本关联矩阵。

根据以上有:

1. 有向连通图 $G = (V, E)$, $|V| = m$, $|E| = n$ 的关联矩阵的秩为 $m-1$, 即 $\text{rank } A = m-1$, 表明 $m-1$ 行向量线性无关;
2. 关联矩阵可唯一确定图 G 的连接关系, 即风网图的节点和分支的关联矩阵是唯一的;
3. 在解算风网时, 关联矩阵能为形成节点风量平衡方程, 回路风压平衡方程和网络的变形计算提供方便, 是图形数字化的手段之一;
4. 关联矩阵中的元素只有 1、-1 和 0, 不包含各分支的具体参数;
5. 图 G 的基本关联矩阵的一个主子矩阵 ($m-1$ 阶方阵) 非奇异的充要条件, 是该主子矩阵的列对应图 G 的一个生成树 T 。故可写出:

$$A_T = \begin{bmatrix} e_4 & e_5 & e_7 & e_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(m-1) \times (m-1)} \quad (1-4)$$

上式为一下三角阵 $\det(A_T) = 1$, 对应的生成树如图 1-12 所示。由 e_1 、 e_2 和 e_3 组成的子阵, 其行列式为零表明不是一生成树。于是, 关联矩阵 A 可分块为 $[A_{11} \ A_{12}]$, 其中 A_{12} 子块对应一生成树为 $(m-1) \times (m-1)$ 阶方阵, A_{11} 子块对应余树为 $(n-m+1) \times$

图 1-12 生成树图 $(m-1)$ 阵。

二、构造关联矩阵的程序

如果图 G 的边数不超过 200 个, 构造关联阵的程序如下:

```
INTEGER J1(200), J2(200), M(200, 200)
READ (*, *) MJ, NB
```

```

READ (*, *) (J1(I), I=1, NB), (J2(I), I=1, NB)
DO 5 J=1, MJ
DO 5 I=1, NB
45 M(I, J)=0
DO 25 J=1, MJ
DO 20 I=1, NB
IF (J1(I) .EQ. J) GOTO 10
IF (J2(I) .EQ. J) GOTO 15
GOTO 20
10 M(I, J)=1
GOTO 20
15 M(I, J)=-1
20 CONTINUE
25 CONTINUE
WRITE(*, 30) ((M(J, I), I=1, NB), J=1, MJ)
30 FORMAT(/ 2X, 25I3)
END

```

程序中 NB 为图的边数, MJ 为图的顶点数。

第四节 回路矩阵

对任一图 G 可找出许多回路, 如图 1-13 所示可画出 7 个回路, 比较直观的回路有 $B_1 = (e_1, e_8, e_7, e_4)$, $B_2 = (e_2, e_6, e_3)$, $B_3 = (e_3, e_7, e_6)$ 。一般以回路中余树的方向做为回路的方向, 回路中分支的方向与回路一致者为正向分支, 否则为反向分支。

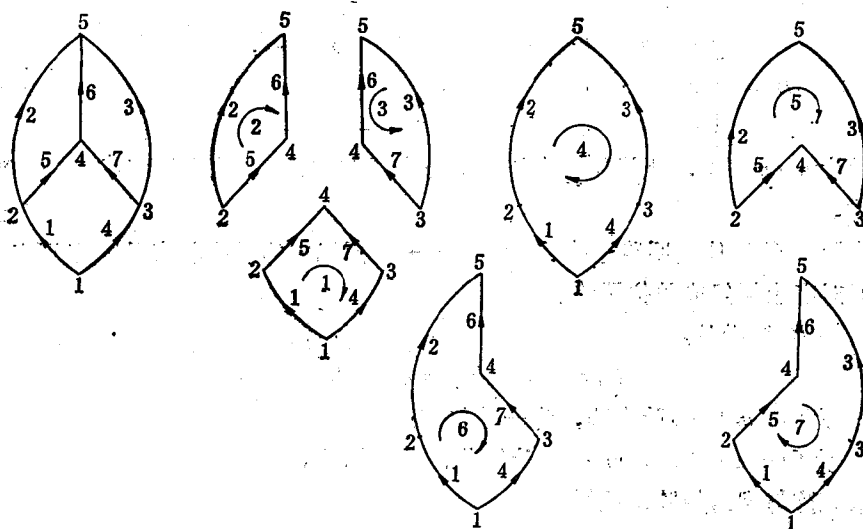


图 1-13 图的回路

一、回路矩阵的定义

设图 $G = (V, E)$ 为一有向连通的 (m, n) 图, 在预先标定回路方向的情况下, 各边与回路的关系可构成 $B = (b_{ij})_{n \times M}$ (M 为回路数), 其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j \in B_i \text{ 且顺向;} \\ -1, & e_j \in B_i \text{ 且反向;} \\ 0, & e_j \notin B_i \end{cases}$$

则矩阵 B 为图 G 的回路矩阵。

根据定义图 1-13 可写出下列回路矩阵:

$$B = \begin{array}{ccccccc|l} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & B_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & B_3 \\ \hline \dots\dots\dots & & & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & B_4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & B_5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & B_6 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & B_7 \end{array} \quad (1-5)$$

显然上述矩阵各行线性相关, 由 B_1 、 B_2 和 B_3 可以得到 B_4 、 B_5 、 B_6 、 B_7 , 即 $B_1 + B_2 - B_3 = B_4$, $B_2 - B_3 = B_5$, $B_1 + B_2 = B_6$, $B_1 - B_3 = B_7$ 。但是, 一个连通图 G 究竟有多少独立回路, 则决定于回路矩阵的秩数。

1. $G = (V, E)$ 是有向连通的 (m, n) 图, 则回路矩阵的秩 $\text{rank } B = n - m + 1$ 。

前已说明, 图 G 的生成树 T 的树枝为 $m-1$ 个不含任何回路, 则余树为 $n - (m-1) = n - m + 1$ 。由于一个余树可以构成一个回路, 故独立回路数等于余树数, 故 (1-5) 式只有 B_1 、 B_2 、 B_3 为独立回路。如果在写回路矩阵时, 把图 G 中的余树放在前边, 树枝放后可得到:

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

显然矩阵的秩为 $n - m + 1$, 上述是完全矩阵的一个子矩阵, 适当排列后的这种子阵为独立回路矩阵。

2. 有向连通图 G 的独立回路矩阵 B_f 中 $n - m + 1$ 列组成的子阵非奇异的充要条件, 是这些列恰好对应余树组成单位子阵。

因此, 可将 B_f 阵分块:

$$B_f = [B_{11} \ B_{12}] = [I \ B_{12}] \quad (1-7)$$

式中 B_{11} ——为 $(n - m + 1)$ 阶方阵, 为一单位阵;

B_{12} ——为 $(n - m + 1) \times (m - 1)$ 阶矩阵, 对应树枝。

二、关联矩阵与回路矩阵的关系

1. 将有向连通图 G 中各边按同样顺序排列构造关联阵和回路阵, 两者之间有如下关系

$$AB^T = [0] \quad \text{或} \quad BA^T = [0] \quad (1-8)$$

希望读者自己去验证上述关系。

由于 A 阵是用于描述图 G 的全部特征，而 B 阵也反映图的某些特征，两者之间有一定联系是必然的。

2. 对有向连通图 $G = (V, E)$, $|V| = m$, $|E| = n$, 任选图 G 的一个树 T , 按 T 定义独立回路组, 写出图 G 的关联阵 A 和独立回路阵 B_f , 置换其各列按先余树后树枝的次序排列, 可得分块矩阵:

$$\begin{aligned} A &= [A_{11} \quad A_{12}] \quad (A_{12} \text{ 为非奇异的}) \\ B_f &= [I \quad B_{f12}] \quad \text{则有} \\ B_f &= [I \quad -A_{11}^T(A_{12}^{-1})^T] \end{aligned} \quad (1-9)$$

$$\text{或} \quad B_f = -A_{11}^T(A_{12}^{-1})^T \quad (1-10)$$

证明: 由于 $AB_f = 0$ 即 $[A_{11} \quad A_{12}][I \quad B_{f12}]^T = 0$

故 $AB_f^T = A_{11} + A_{12} B_{f12}^T = 0$, $A_{12} B_{f12}^T = -A_{11}$

所以 $B_{f12}^T = -A_{12}^{-1} A_{11}$, $B_{f12} = -A_{11}^T(A_{12}^{-1})^T$

根据图 1-11 有

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = [A_{11} \quad A_{12}] \\ B_f &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [I \quad B_{f12}] \end{aligned}$$

应用主元消去法求 A_{12}^{-1}

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式的变换过程是将第 1 行加到第 3 行, 第 2 行加到第 4 行, 第 4 行乘 (-1) , 4 行乘 (-1) 加到 3 行, 3 行加到 4 行。通过消元使 $[A_{12} \quad I]$ 变为 $[I \quad A_{12}^{-1}]$ 。

根据前述的矩阵, 则

$$\begin{aligned} [A_{12}^{-1}]^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{11}^T &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故

$$B_{j12} = -A_{11}^T (A_{12}^{-1})^T = - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

经上述计算得到的 B_{j12} 与 B_j 阵的子阵 B_{j12} 相等, 表明图 $G=(V, E)$ 的关联阵通过代数运算可求得独立回路阵 B_j , 其中的关键是 A_{12} 求逆比较麻烦。

三、求逆阵的方法

对 n 阶矩阵 A , 如果存在一个 n 阶逆阵 B , 满足 $AB=BA=I$, 则称 B 为 A 的逆阵, 记为 A^{-1} , A 也称为 B 的逆阵。一个矩阵有逆称为可逆矩阵, n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 是可逆矩阵, 则 A 必为满秩矩阵即 $\text{rank } A=n$ 。

求逆阵的方法除主元消去法外, 尚有其他方法。

1. 古典的方法

该方法在线性代数中已有叙述, 此处仅做简要回顾。如对 A 阵求逆其主要步骤为:

- 1) 用 A 的每个元素 a_{ij} 的相应的代数余子式代替 a_{ij} ;
- 2) 将由代数余子式组成的矩阵转置, 得一附加矩阵 $\text{adj } A$;
- 3) 用 $|A|$ 除以附加矩阵 $\text{adj } A$ 的各元素, 即

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A$$

试求:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ 的逆。}$$

(1) 求 A 的行列式的值 $|A| = 2 - 6 = -4$

(2) 形成代数余子式矩阵: $A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$, 故

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ 则}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

2. 矩阵分块求逆

高阶矩阵求逆相当麻烦, 用矩阵法解风网时, 要求逆的矩阵维数较高, 采用分块法对高阶矩阵求逆可大大提高计算速度、节省机时和内存。分块求逆就是将一个高阶矩阵