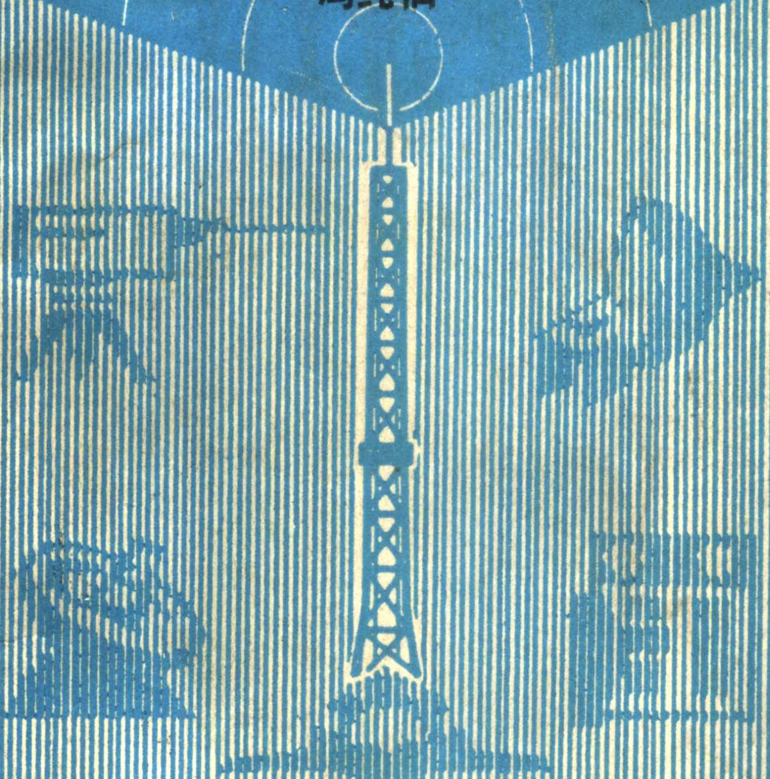
高等学校教材

非线性控制系统分析与设计

冯纯伯



东南大学出版社

高等学校教材

非线性控制系统分析与设计

冯纯伯

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是经电子工业部自动控制教材编审组评审通过的全国统编教材，也是作者冯纯伯教授在长期从事自动控制理论研究的基础上新近完成的一部力作。本书由编审组主任委员、学部委员张钟俊教授担任主审。

本书共分五章，第一章引论，介绍非线性控制系统的研究对象、研究方法并概述全书的基本内容；第二章李亚普诺夫稳定性，系统地介绍李亚普诺夫稳定性的基本定理及其证明和构造李亚普诺夫函数的方法；第三章输入输出特性分析，介绍泛函分析方法的应用；第四章描述函数法及其应用，介绍如何用描述函数法设计校正系统；第五章变结构控制，介绍变结构控制的理论、设计方法及其应用。

本书以介绍方法为主，这是国内第一本既注意非线性系统的分析，又较深入地论述了非线性控制系统综合设计的专著性教材。书中既反映了多年来非线性控制方面已经取得的基本成果，也反映了近年来研究工作的新动向。

本书主要作为控制类自动化专业研究生或本科生的教材，亦可供从事控制理论研究及其应用开发的广大科技人员参考。

责任编辑　陈天授
责任校对　王小宁

非线性控制系统分析与设计

冯　纯　伯

东南大学出版社出版

南京四牌楼2号

江苏省新华书店发行　　南京人民印刷厂印刷

开本850×1168毫米1/32　印张12　字数311千

1990年9月第1版　　1990年9月第1次印刷

印数：1—1500册

ISBN　7—81023—313—0

TP·24　　　　定价：2.80元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986～1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　　言

本教材系按电子工业部的工科电子类专业教材1986—1990年编审出版规划，由高等学校《计算机与自动控制》专业教材编审委员会《自动控制》教材编审小组评选审定，并推荐出版。责任编委张钟俊。

该教材由东南大学冯纯伯教授编著，中国科学院学部委员、上海交通大学张钟俊教授主审。

编著者从系统特性分析和综合设计两个方面阐述非线性控制系统的一般问题，探讨其分析方法及进行设计的工程途径，力图使读者对非线性控制系统有较深入的了解，以期为今后研究非线性控制系统或处理非线性问题打下较坚实的理论基础。全书共分五章。第一章引论，介绍非线性控制系统的研究对象，一般问题、处理方法和全书的基本内容。第二章李亚普诺夫稳定性，系统地介绍李亚普诺夫稳定性的基本定理，构造李亚普诺夫函数的方法。第三章输入输出特性分析，介绍泛函分析方法在分析非线性控制系统中的应用。第四章描述函数法及其应用，着重介绍如何应用描述函数法设计非线性控制器。第五章变结构控制，介绍变结构控制的理论，系统地介绍了单变量及多变量、线性和非线性系统的滑模控制的设计方法，附有一些应用实例。以上各章内容均可独立。全书参考学时数为60学时，适用于高年级大学生及研究生选用，在教学中可根据需要选择合适的章节。

本书在编写过程中承蒙张钟俊教授细心校阅，并提出许多宝贵意见，对此编著者表示衷心感谢。

非线性控制系统理论涉及面十分广泛，一本教材难以概全。近年来用微分几何方法分析某一类非线性系统取得了良好的成果，作者本拟在第六章中介绍这方面内容，但为学时数和本书篇

幅所限，只能割爱。有兴趣的读者请参阅有关专著。

由于编著者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

冯　纯　伯

1990年2月

目　录

第一章　引　论

第二章　李亚普诺夫(Ляпунов)稳定性

第三章 输入输出特性分析

第四章 描述函数法及其应用

第五章 变结构控制

第一章 引论

§1.1 非线性控制系统概述

许多控制系统都具有非线性特性。例如随动系统的齿轮传动具有齿隙和干磨擦等，许多执行机构都不可能无限制地增加其输出功率，因此就存在饱和非线性特性。以上所举的例子中的非线性是由于系统的不完善而产生的，这种不完善实际上是不可避免的。有些非线性是系统动态特性本身所固有的。例如高速运动的机械手各关节之间有哥氏力的耦合，这种耦合是非线性的，如果要研究机械手高速运动的控制就必须考虑非线性的耦合。电力系统中传输功率与各发电机之间相角差的正弦成正比，如果要研究电力系统中的大范围运动时，就必须考虑非线性特性的影响。还有一类对象本身虽然是线性的，但为了对它进行高质量的控制，常常在控制系统中有意识地引进非线性的控制规律。例如时间最短控制就要采用*bang-bang*控制，它是非线性的。严格说来，非线性是普遍存在的，非线性系统才是最一般的系统，线性系统只是其中的特殊例子。非线性特性千差万别，不可能有统一的普遍适用的处理办法。而线性系统则大为简单，可以用线性常微分方程来描述。解线性常微分方程已有成熟的方法，因此线性控制系统理论取得了很大的成就。对比之下非线性微分方程只有在个别情况下才有解析解。这给非线性控制系统的研究带来极大的困难。

非线性系统和线性系统之间的本质差别可概括为以下两点：

1.对于线性系统重叠原理可以应用，对于非线性系统因为特性不是线性的，因此重叠原理不能应用。对于重叠原理可以应用的系统，分析大为简单，小信号和大信号作用下的结果应该一致。对于重叠原理不能应用的系统，分析大为复杂，大信号和小

信号作用的结果可以大不相同。

2.一般来说对于非线性系统不能求得完整的解(*Closed form solution*)。目前的数学工具还远远不够。因此一般只能对非线性系统的运动情况作一些估计，例如对系统的稳定性、动态品质等作一些估计。

我们知道线性控制系统中的运动只可能有几种情况：如衰减的或发散的振荡或不振荡运动，或临界的振荡等等。非线性系统中的运动要复杂得多，可以是振荡的或不振荡的过程，这种振荡严格说来不一定能用调和函数来表示；可以是稳定的或不稳定的，这种稳定可以是全局的，也可能是局部的；可以出现振荡的极限环，这种极限环可能有多个；还可能出现混沌(*Chaos*)现象，既非稳定的极限环，又非无限制的发散。总之，非线性系统中的现象要复杂得多。

由于许多控制系统中都有非线性，有些非线性对系统的运行是有害的，应设法克服它的有害影响。有些非线性是有益的，应在设计时予以考虑。因此从事控制工作的工程师和研究人员早就对非线性控制系统的研究予以很大的关注。多年来在这方面已经积累了许多成果。但由于非线性系统的复杂性，在这方面的研究工作有相当大的困难，因此研究成果还远不能满足实际需要，在这方面有待研究的问题还很多。近年来由于工程实际的需要以及人们对提高控制系统智能化程度的重视，研究工作者对非线性系统理论给予很大的关注，希望能够取得新的重要进展。

前面提到非线性是普遍存在的，线性系统只是一个特例，但这决不能贬低线性系统理论的重要性。线性系统理论仍然是系统理论的基础。许多非线性系统的极限或临界情况是线性系统，许多非线性系统是由线性系统组合、引伸或改造而来。因此研究非线性系统理应首先要对线性系统理论有较深入的了解。事实上许多非线性系统的分析方法要借助于线性系统理论的成果。

§1.2 非线性控制系统的数学方程

对于非线性系统人们常常采用微分方程或非线性算子方程来描述，本节介绍非线性控制系统的微分方程描述方法。

相当广泛的一类非线性系统可用 n 阶常微分方程来描述，

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}=h\left[t,y(t),\ \dot{y}(t),\cdots,\ \frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}},u(t)\right],\quad t\geqslant 0 \tag{1.2.1}$$

其中$u(t)$为输入，$y(t)$为输出。若定义

$$\begin{aligned}
x_1(t)&=y(t),\\
x_2(t)&=\dot{y}(t),\\
&\vdots\\
x_n(t)&=\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}},
\end{aligned}$$

则单一的(1.2.1)式可改写为 n 个一阶方程的方程组：

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1(t)&=x_2(t)\\
\dot{x}_2(t)&=x_3(t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_{n-1}(t)&=x_n(t)\\
\dot{x}_n(t)&=h[t,x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),u(t)].
\end{aligned}\right\}\tag{1.2.2}$$

如果定义向量$\mathbf{x}(\cdot):R_+\to R^n$，$\mathbf{f}:R_+\times R^n\times R\to R^n$如下：

$$\mathbf{x}(t)=[x_1(t),\cdots,x_n(t)]^T$$

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x},u)=[x_2,x_3\cdots,x_n,h(t,x_1,\cdots,x_n,u)]^T$$

则(1.2.2)方程组可写成向量微分方程的形式：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}[t,\mathbf{x}(t),u(t)],\quad t\geqslant 0 \qquad (1.2.3)$$

式中x为状态向量，x_1至x_n为其状态变量。在上面的推导中设$u(t)$为单变量，若系统中有多个输入，则式(1.2.3)的形式仍然可用，此时$u(t)$为向量。

今后我们就用式(1.2.3)来描述一般非线性控制系统。

对于一个用式(1.2.3)描述的非线性控制系统，我们希望对于每一个输入$u(t)$以下情况得以成立：

(1)式(1.2.3)至少存在一个解(解的存在性)，

(2)式(1.2.3)只存在一个解(解的唯一性)，

(3)对于时间半轴$[0,\infty)$上式(1.2.3)只存在一个解，

(4)在$[0,\infty)$轴上式(1.2.3)只存在一个解，而且这个解与初值$\mathbf{x}(0)$存在连续变化的关系。

以上是我们的期望，这些要求是相当强的，只有对f函数提出相当严格的要求才能实现。我们可以举出以下一些不符合上述要求的例子。

例1 $\dot{x}(t)=\dfrac{1}{2x(t)}$，$t\geqslant 0$，$x(0)=0$，此方程有以下两个解 $x_1(t)=t^{1/2}$，$x_2(t)=-t^{1/2}$，
这就是说上列条件(1)成立，但条件(2)不成立。

例2 $\dot{x}(t)=1+x^2(t)$，$t\geqslant 0$，$x(0)=0$，此方程在$[0,1)$区间有唯一解

$$x(t)=\mathrm{tg}\, t$$

但在$[0,\infty)$区间不存在连续可微的解$x(t)$。这就是说上列条件(1)，(2)是满足的，但条件(3)不满足。

上面的例子和陈述说明式(1,2,3)解的存在性及唯一性是十分重要的。这一问题将在下节中讨论。

在上面的例子中系统可以有解析形式的解，这只是非常特殊的情况。一般情况下方程式的解即使存在也是表达不出来的，只

能对它进行近似的估计或数值计算。

式(1.2.3)代表最一般化的非线性控制系统的方程。如果f函数与t无关，则称此系统为自治(驻定)的，否则称为非自治(非驻定)的。

如果$u(t)=0$则

$$\dot{x}=f[t, x(t)],\quad t\geqslant 0,\quad x(0)=x_0 \qquad (1.2.4)$$

代表系统的自由运动。

在许多控制系统中输入量$u(t)$可以从函数f中分列出来，此时系统方程可写成以下形式：

$$\dot{x}=A(t, x)+B(t, x)u(t)。 \qquad (1.2.5)$$

称这样的系统是仿射的。它代表相当广泛的一类非线性系统，这类系统有其自身的特点。

对于系统(1.2.4)，若$x_0\in R^n$，并且

$$f(t, x_0)=0,\quad \forall t\geqslant t_0$$

则称x_0是系统(1.2.4)的平衡点。如果x_0是$t=t_0$时的平衡点，则x_0也是任一$t_1\geqslant t_0$时的平衡点。对于自治系统当然就不必指出平衡点和时间的关系。对于非自治系统这就很重要了。如果$x_0\in R^n$是系统(1.2.4)在$t=t_0$时的平衡点，则在$t_1\geqslant t_0$时

$$\dot{x}(t)=f[t, x(t)],\quad t\geqslant t_1;\quad x(t_1)=x_0$$

将以$x(t)=x_0$，$\forall t\geqslant t_1$为其唯一解。

对于线性系统平衡点总是唯一的，对于非线性系统情况则不同。于是我们给出以下定义：

如果在t_0时刻x_0是系统(1.2.4)的平衡点，且在x_0的邻域没有其它$t=t_0$时刻的平衡点，则称x_0是孤立的平衡点。

§1.3 关于非线性常微分方程的解的存在性及唯一性

上节中提出对于非线性控制我们要求系统方程是有解的，解是唯一的。这一问题很重要。本节将不加证明地介绍这方面的一些基本知识。对于这些结果的讨论已超出本书的范围，因此不引入证明。有兴趣的读者可以参考有关教材，例如文献[2，3]。

我们讨论方程(1.2.4)的解的存在及唯一的条件。分两种情况：

1.局部解情况

定理1.3.1 如果式(1.2.4)中的f对 t 和x是连续的，若存在有界常数T，r，h，k，使得

(1) $\|f(t,x)-f(t,y)\|\leqslant k\|x-y\|, \forall x,y\in B,$

$$\forall t\in[0,T], \tag{1.3.1}$$

其中$B=\{x\in R^n; \|x-x_0\|\leqslant r\}$代表$R^n$中的一个球，

(2) $$\|f(t,x_0)\|\leqslant h, \forall t\in[0,T], \tag{1.3.2}$$

则在满足以下条件的 δ 的区间[0，δ]中式(1.2.4)有一个唯一解。δ 应满足的条件是

$$h\delta\exp(k\delta)\leqslant r \tag{1.3.3}$$

$$\delta\leqslant\min\left(T, \frac{\rho}{k}, \frac{r}{h+hr}\right), \ \rho<1。 \tag{1.3.4}$$

定理中所列式（1.3.4）称为Lipschitz条件，k称为Lipschitz常数。式(1.3.1)表明只在局部区间满足Lipschitz条件，因此所讨论的解也是局部的。

由定理1.3.1可得以下推论：

推论1.3.2 如果在$(0, x_0)$的邻域f对x的偏导存在并连续，对t的单边的偏导存在并连续，则式(1.2.4)在相当小的区间$[0, \delta]$内存在唯一解。

2.全局解情况

定理1.3.3 如果在$T\in[0,\infty)$区间中均存在有界常数k_T和h_T，使得

$$(1)\ \|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})-\mathbf{f}(t,\mathbf{y})\|\leqslant k_T\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in R^n,\quad \forall t\in[0,T] \tag{1.3.5}$$

$$(2)\ \|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0)\|\leqslant h_T,\ \forall t\in[0,T] \tag{1.3.6}$$

则式(1.2.4)在$[0, T]$，$\forall T\in[0, \infty)$区间内存在唯一解。

这里式(1.3.5)称为全局Lipschitz条件。粗略地说，如果系统在全局范围内满足Lipschitz条件，则在全局范围内，在区间$[0, \infty)$内系统有唯一解。

定理1.3.4 如果函数f满足定理1.3.3中所规定的条件，设$\mathbf{x}(\cdot)$和$\mathbf{y}(\cdot)$均满足式(1.2.4)，即

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}[t,\ \mathbf{x}(t)],\ \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{f}[t,\ \mathbf{y}(t)],\ \mathbf{y}(0)=\mathbf{y}_0$$

则对每一$\varepsilon>0$，存在相应的$\delta(\varepsilon, T)>0$，只要

$$\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0\|<\delta(\varepsilon, T),\ \forall T\in[0,\infty]$$

则有

$$\|\mathbf{x}(\cdot)-\mathbf{y}(\cdot)\|<\varepsilon$$

§1.4 二阶系统自由运动的分析

前面概要地介绍了非线性系统，作为开始在这一节中我们概要地、定性地讨论二阶系统的自由运动的情况，目的是以二阶系

统为例使读者对非线性系统中的自由运动有一个初步的印象。

二阶系统有其典型性，这是因为许多二阶系统都有其明确的物理背景；二阶系统的自由运动可以在一平面上表现出来，几何形象鲜明；以二阶线性系统为例，它的特征根可能是稳定的或不稳定的实根或复根，它的特征根的分布代表了可能的典型的方案，因此它的自由运动也有典型意义。由此可见先研究一般二阶系统的自由运动，建立起一些形象的概念是有益的。

二阶系统的自由运动可表为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=f_1[t,x_1(t),\ x_2(t)]\\ \dot{x}_2(t)&=f_2[t,x_1(t),\ x_2(t)]\end{aligned}\right\}\qquad(1.4.1)$$

以x_1和x_2为座标组成的平面称为状态平面，在该平面上画出的式(1.4.1)的图形称为状态平面轨迹。在特殊情况下当取$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$，此时绘出的图形称为相轨迹，它所在的平面称之为相平面。

为简单计我们只讨论驻定系统的情况，此时系统的一般方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=f_1[x_1(t),\ x_2(t)]\\ \dot{x}_2(t)&=f_2[x_1(t),\ x_2(t)]\end{aligned}\right\}\qquad(1.4.2)$$

根据上式对应于状态平面上的任一向量$[x_1,\ x_2]^T$有一个向量$[f_1(x_1,\ x_2),\ f_2(x_1,\ x_2)]^T$，这一向量的方向定义为

$$\theta_f(x)=\mathrm{arctg}\,\frac{f_2(x_1,\ x_2)}{f_1(x_1,\ x_2)}\qquad(1.4.3)$$

根据式(1.4.2)，$\theta_f(x)$所表示的方向是系统(1.4.2)在$\mathbf{x}$点的自由运动的方向，它表示系统轨迹在$\mathbf{x}$点的切线方向。由此自然可以理解向量$[f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)]^T=\mathbf{f}(\mathbf{x})$表示一个速度向量场。以上所述的概念显然可以推广到更高阶的系统。由此可见，研究