高中数学
综合解题方法

孔令颐

清华大学出版社

高中数学综合解题方法

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是清华大学附中高中毕业班的教学参考书，目的是引导学生巩固深化、融会贯通全部高中数学知识，从而提高数学的分析解题能力。

全书内容包括代数、三角函数、立体几何、平面解析几何、微积分初步等。每部分都有基本概念的简述、例题分析、练习题与答案。书后有附录，包括概率、逻辑代数、不定积分、定积分及其应用的基本知识和题目，供学生提高之用。本书高中毕业生、自学青年及高中教师均可使用。

(京)新登字158号

高中数学综合解题方法

孔令颐

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京市昌平印刷厂　印刷

新华书店总店科技发行所发行

☆

开本：787×1092　1/32　印张：14.25　字数：320千字

1987年1月第1版　1992年12月第5次印刷

印数：132001—142000

ISBN 7-302-00116-2/G·27

定价：5.20元

前　言

高中数学是按代数、几何、三角、解析几何分别讲授的，而实际的数学问题往往须用几门数学知识的综合方法才能解决。因此学生到了高三阶段，教师需要引导学生把学过的知识综合起来，联系起来，使其系统化。同时把重要部分、难点、易错部分突出出来，并加以分析，以便对高中数学的基本概念和基本方法有一个比较清晰、完整的认识，提高综合解题能力，为进一步学习或参加工作打下良好的基础。

为达此目的，我曾在清华附中实践多年。本书是我多年从事高三数学教学的经验总结，可作高三数学的补充教材，供中学师生和广大自学青年参考。

本书编写过程中得到了杨玉琴老师和曹树杰老师的很大帮助，清华大学应用数学系副教授程紫明、李文汉二同志仔细审阅了全部书稿，在此一并致谢。

孔　令　颐

目　　录

一、代　　数

代数是中学数学的基础，学好数学，首先要学好代数。代数的一些方法，在中学的数学、物理、化学课程中，都有广泛的应用。

具有了因式分解的意识、方程的观点，掌握了函数的概念和坐标的方法，才算对代数这门学科入了门。

（一）因 式 分 解

1. 作用

例 1.：化简 $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$

解法 1：原式$=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+1)^2}$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(4-2\sqrt{3})}{4^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(4-2\sqrt{3})}{4}$$

$$=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$$

这个解法，没有因式分解的意识

解法 2：

$$原式=\frac{1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$$

第二种解法考虑到了因式分解的可能性，结果显得方便多了。

例 2：已知 $\frac{x}{x^2+x+1}=a$ （$a\neq 0$，$a\neq\frac{1}{2}$）计算

$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$ 的值。

解：原式 $=\frac{x\cdot x}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

$$=\frac{x}{x^2+x+1}\cdot\frac{1}{\frac{x^2+x+1}{x}-2}$$

$$=a\cdot\frac{1}{\frac{1}{a}-2}=\frac{a^2}{1-2a}$$

如果不用因式分解，直接代入$\frac{x}{x^2+x+1}=a$是不可能的。

例 3：直线 $y=x+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，当 m 为何值时，直线与椭圆相切、相交、相离？

解法 1：　以 $y=x+m$ 代入椭圆方程得：

$$9x^2+16(x+m)^2=9\times16$$

整理得：

$$25x^2+32mx+16m^2-144=0$$

$$\begin{aligned}\Delta&=(32m)^2-4\cdot25\cdot(16m^2-144)\\&=-576m^2+14400\end{aligned}$$

当　$-576m^2+14400>0$ 时，

即　$m^2<\frac{14400}{576}=25$,

$-5<m<5$　时，直线与椭圆相交。

当 $m>5$ 或 $m<-5$ 时，直线与椭圆相离。

当 $m=\pm5$ 时，直线与椭圆相切。

这个方法又是缺乏因式分解的意识。作了许多先乘后又除的“虚功”。我们采用下列方法较为合理。

解法 2：　以 $y=x+m$ 代入椭圆方程得：

$$9x^2+16(x+m)^2=9\times16$$

整理得，

$$25x^2+32mx+16m^2-9\times16=0$$

$$\begin{aligned}\Delta&=(2^5m)^2-4\cdot25\cdot16(m^2-9)\\&=2^6(2^4m^2-25m^2+25\times9)\end{aligned}$$

$=2^6(-9m^2+25\times 9)$

$=2^6\cdot 9(25-m^2)$

当 $25-m^2>0$ 即 $-5<m<5$ 时，相交

当 $m>5$ 或 $m<-5$ 时，相离

当 $m=\pm 5$ 时，相切

很明显这样作法比较合理，避免了大数相乘、除，出错误的可能性也就大大减少了。

因式分解的结果，往往把一个高次的问题变成一个较低次的问题。例如高次方程：

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ 若能把 $f(x)$ 分解因式为：

$f(x)=Q(x)\cdot g(x)$ 就化成解两个较为低次的方程：$Q(x)=0$ 和 $g(x)=0$

如果能分解成几个一次因式的积，

$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)$$

那末高次方程 $f(x)=0$ 的解集为

$\{x_1, x_2\cdots\cdots x_n\}$（这是诸 x_i 不等时的解集表示法。）

例 4：已知 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$

求证 $\dfrac{1}{x^{2n+1}}+\dfrac{1}{y^{2n+1}}+\dfrac{1}{z^{2n+1}}=\dfrac{1}{(x+y+z)^{2n+1}}$

解：把已知条件去分母后得一个三次式：

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)=xyz$$

如能分解成一次因式，问题也许好证得多，于是判断一下：

原式可化为：$x^2(y+z)+(y+z)^2x+yz(y+z)=0$ 显然

可分解为：

$$(y+z)[x^2+(y+z)x+yz]=0$$

$$(y+z)(x+y)(x+z)=0$$

即 $x=-y$，或 $y=-z$，或 $z=-x$

当 $x=-y$ 时，

则等式的左边是：

$$\frac{1}{(-y)^{2n+1}}+\frac{1}{y^{2n+1}}+\frac{1}{z^{2n+1}}=\frac{1}{z^{2n+1}}$$

等式的右边是

$$\frac{1}{(-y+y+z)^{2n+1}}=\frac{1}{z^{2n+1}}$$

左边＝右边

∴ 等式成立

当 $y=-z$ 或 $z=-x$ 时，同理可以证明原式成立.

要有因式分解的意识，就是说在解题时，只要有可能，我们总是判断一下，是否可以分解因式，从而使计算简化，或证明容易。

2. 基本问题

第一、能否分解，这是因式分解的基本问题。

第二、是否分解彻底了，这问题与条件有关。一般地说，因式分解是指在有理数范围内分解，分解到不能再分解为止。如果要求在其他范围内分解，一定要加以说明．如果在复数范围内分解，一般要分解到一次因式为止。

例 1：$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$ （有理数范围）

$=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$（实数范围）

$=(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)$（复数范围）

以后，不加说明，分解因式都在有理数范围内进行。

有时根据解决问题的需要，分解因式可以不管什么范围，也不一定非要分解到一次因式。

例 2：化简：

$$\frac{(x-2y)(x+2y-\sqrt{2xy})}{[x^{\frac{3}{2}}+(2y)^{\frac{3}{2}}](\sqrt{x}-\sqrt{2y})}$$

解：

$$原式=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2y})(\sqrt{x}+\sqrt{2y})(x+2y-\sqrt{2xy})}{[x^{\frac{1}{2}}+(2y)^{\frac{1}{2}}][x+2y-(2xy)^{\frac{1}{2}}](\sqrt{x}-\sqrt{2y})}$$

$=1$

因式分解时，综合除法是非常有用的，必须很好掌握。

多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$，可用综合除法求得其商式和余数。

例3：求 $(3x^4-2x^3-4x-24)\div(x-2)$ 的商式和余数。

解：

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -2 & +0 & -4 & -24 & 2 \\ & +6 & +8 & +16 & +24 & \\ \hline 3 & +4 & +8 & +12 & +0 & \end{array}$$

∴ 商式是 $3x^3+4x^2+8x+12$，余数为0。

注意：缺项补零。

具体过程如下：

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -2 & +0 & -4 & -24 & 2 \\ \hline 3 & & & & & \end{array}$$

∵除以 $x-2$，∴用2

零表示缺项。

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -2 & +0 & -4 & -24 & 2 \\ & +6 & & & & \\ \hline 3 & +4 & & & & \end{array}$$

$6=2\times3$

$4=-2+6$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -2 & +0 & -4 & -24 & 2 \\ & +6 & +8 & & & \\ \hline 3 & +4 & +8 & & & \end{array}$$

$8=2\times4$

$8=0+8$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & -2 & +0 & -4 & -24 & 2 \\ & +6 & +8 & +16 & & \\ \hline 3 & +4 & +8 & +12 & & \end{array}$$

$16=2\times8$

$12=-4+16$

3. 方法

初中学过的方法，可用这样的话来概括：一提、二代、三分组，以及二次三项式的分解法。

一提指的是提取公因式，二代指的是代乘法公式。其中主要的公式如下：

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2;$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

$$a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$$

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots\cdots+b^{2n})$$

三分组指的是前面两种方法不能解决问题时，可以把原式分成几组，从而找出分解因式的路子。使用这个方法时，有时还需要用拆项或加、减项的方法。

例 1：分解因式： $3x^2+4xy+y^2-2x-1$

解： 原式 $=4x^2+4xy+y^2-2x-1-x^2$

$$=(2x+y)^2-(x+1)^2$$

$$=[2x+y-(x+1)][2x+y+(x+1)]$$

$$=(x+y-1)(3x+y+1)$$

例 2：分解因式： x^5+2x^2-x+1

解： 原式 $=x^5+x^2+x^2-x+1$

$$=x^2(x^3+1)+x^2-x+1$$

$$=x^2(x+1)(x^2-x+1)+(x^2-x+1)$$

$$=(x^2-x+1)(x^3+x^2+1)$$

注意分组后应有公因式

例 3：分解因式： x^5+x+1

解： 原式 $=x^5+x+1+x^4+x^3+x^2-x^4-x^3-x^2$

$$=(x^5-x^4+x^2)+(x^4-x^3+x)+(x^3-x^2+1)$$

$$=x^2(x^3-x^2+1)+x(x^3-x^2+1)+(x^3-x^2+1)$$

$$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$$

显然，例 3 的分组方法是不易看出的，因此总想找到更为一般的方法。但这些方法很重要，今后遇到分解因式的问题，首先要考虑到这些方法。

二次三项式的分解也是十分重要的，如十字相乘法，求根公式法、配方法等，其中配方法特别重要。

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\triangle}{4a}$$

当 a、b、c、x 都为实数时，$\triangle<0$，则二次三项式就不可能等于零。

例 4：已知a_1，a_2，a_3，a_4 为实数，且 $a_i\neq0(i=1,2,3,4)$，$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2a_4(a_1+a_3)+a_2^2+a_3^2=0$

求证：　a_1,a_2,a_3 成等比数列，公比为 a_4

解法 1：$\because a_1$、$a_2\neq0$，$\therefore$左边可以认为是 a_4 的二次三项式，它的判别式为：

$$\triangle=4a_2^2(a_1+a_3)^2-4(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)$$
$$=4[2a_2^2a_1a_3-a_2^4-a_1^2a_3^2]$$
$$=-4(a_2^2-a_1a_3)^2$$

又因为 a_1，a_2，a_3，a_4 都为实数，

$$\triangle=-4(a_2^2-a_1a_3)^2\leqslant0$$

从配方可知 $\triangle<0$ 时，二次三项式不可能为零。但此二次三项式为零，所以只有 $\triangle=0$，

即
$$a_2^2=a_1a_3$$

则
$$a_4=\frac{2a_2(a_1+a_3)}{2(a_1^2+a_2^2)}$$
$$=\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1^2+a_1a_3}$$
$$=\frac{a_2}{a_1}$$

这说明：a_1，a_2，a_3 成等比数列，且公比为 a_4

解法 2：上面的方法实质上是配方，所以可直接用配方法（也可直接代前面的配方公式）。

原式的左边$=(a_1^2+a_2^2)\left[a_4-\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1^2+a_2^2}\right]^2+\frac{4(a_1a_3-a_2^2)^2}{4(a_1^2+a_2^2)}$

要使上式等于零，只有：

$a_4=\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1^2+a_2^2}$，$a_1a_3=a_2^2$（$\because a_1,a_2,a_3,a_4$ 为 $\neq 0$ 的实数）

解法 3：因为原式是两个平方的和，那么可以用配两个平方和的简便方法。

原式的左边$=[(a_1a_4)^2-2a_1a_2a_4+a_2^2]+[(a_2a_4)^2-2a_2a_3a_4+a_3^2]=(a_1a_4-a_2)^2+(a_2a_4-a_3)^2$

$\because$ a_1，a_2，a_3，a_4 为实数，得：

$$a_1a_4-a_2=0，\ a_2a_4-a_3=0$$

即 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=a_4$

$\therefore$ 原题得证。

此题还可以这样分析，已知是一个条件，要证的是两个

等式。要使一个等式变成两个等式，在实数条件下，只要能配成两个平方的和即可办到。

一般配方法，常常是配去一次项，如前面的配方公式：$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$ 但在特殊情况下，也可以配去常数项。

例 5：分解因式 $x^4+x^2y^2+y^4$ 到复数范围内。

解法 1：把 x^2 看成未知量，就成了 x^2 的二次三项式，可以用配方法来分解因式。

$$原式=\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^4$$

$$=\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y^2i\right)\left(x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y^2i\right)$$

$$=\left[x^2+y^2\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right]\left[x^2+y^2\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right]$$

$$=\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)$$

解法 2：把 y^4 看成常数，配去常数 y^4 更为方便

$$原式=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$

$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

$$=\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)$$