# 高等数学

# 例题与习题

龚成通　李红英　王刚　　主编

华东理工大学出版社

# 高等数学例题与习题

华东理工大学数学系编

龚成通　李红英　王刚　主编

华东理工大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学例题与习题/龚成通,李红英,王刚主编.
上海:华东理工大学出版社,2002.10
ISBN 7-5628-1327-2

Ⅰ.高... Ⅱ.①龚...②李...③王... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 079198 号

**高等数学例题与习题**

主编 龚成通 李红英 王刚

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版** | 华东理工大学出版社 | **开本** | 787×1 092 16 |
| **社址** | 上海市梅陇路 130 号 | **印张** | 30.5 |
| **邮编** | 200237 **电话** (021)64250306 | **字数** | 916 千字 |
| **网址** | www.hdlgpress.com.cn | **版次** | 2002 年 10 月第 1 版 |
| **发行** | 新华书店上海发行所 | **印次** | 2002 年 10 月第 1 次 |
| **印刷** | 上海展望印刷厂 | **印数** | 1-6050 册 |

ISBN 7-5628-1327-2/O·69

定价:35.00 元

## 内 容 提 要

本书是根据教育部高等数学教学大纲编写的教学参考书，为兼顾考研复习之需要，把本不属教学大纲而属考研大纲的内容也都编了进来.

本书由四部分组成：一、例题选讲　内容覆盖面全，选题有典型意义，分析精辟，注释更是画龙点睛；二、习题操练　其中 A 类题多数属基本题、B 类题则接近考研要求，也是期中、期末考试的最高要求；三、阶段自测　分三类(A 多学时、B 经济类、C 少学时)四个阶段(上、下两个学期，期中、期末)共 12 份试卷，其中 B、C 因教学进度相近而合为一份试卷，每份试卷前都标有覆盖范围，供各类学生选用；四、答案提示　计算题都有答案，证明题都有提示，综合题有简解或详解.

本书适用于理工类各院校各专业的学生，希望能为初涉高等数学的同学释疑解难、指点迷津，同时也帮助考研的学生去闯关夺隘、攀登高峰.

本书可作为高等数学习题课或第二课堂的教材.

# 序

早就听龚成通老师说要主编一本“高等数学的例题与习题”，现在终于看到了这本书。

随着人们对高等数学教学重视程度的不断提高，高等数学的辅助教材也呈现出了一片百花齐放、欣欣向荣的局面。对于放在我面前的这一本书，老实说，粗看几页，我的感觉是本书与别的书的确有点不一样，别的书简明扼要，而本书文字“啰嗦”、篇幅“冗长”。真好像是在看京剧时，舞台边上打出的一道道醒目的字幕，显得有点多余；又好像是在听音乐会时，有人在你耳畔絮絮叨叨地解说这段音乐讲的是什么什么内容，又应该如何如何去理解，有点令人生厌。但是随着深入、仔细地展开阅读，我逐渐地感觉到了作者们的良苦用心。他们不是在与我们行内的人进行对话，而是在对众多初涉高等数学的学生进行辅导。认真地想一下，一个对京剧不甚了解的人，不正很需要这些幻灯字幕吗？一个不大会欣赏音乐的人，不正很需要这些絮絮叨叨的解说词吗？

作为高等数学的辅助教材，如果再用一定的篇幅去罗列、整理、归纳本属于教科书上的教学内容、计算公式、基本概念，确实没有多少必要。本书作者把着眼点放在解题之前的分析与解题之后的小结上，充分展示了解题过程的来龙去脉，给学生留下了极大的思考空间；作者既注意到通过解题示范达到帮助学生巩固基础知识的目的，更注意到通过解题分析与小结提高学生综合运用各方面知识的能力。对学生真正有用的东西，学生真正感兴趣的东西，作者不惜用重墨浓彩来描绘，这就是本书的主要特色。

若把高等数学喻之为一出京剧或一场音乐会，我相信本书的出版定能帮助大家更快地步入此高雅艺术的殿堂，因而本人乐于为之作序。

苏化明

2002.10

---

苏化明：全国非数学类专业数学基础课程教学指导委员会《大学数学》杂志主编

# 前　言

走进大学校门，你的第一节课就是高等数学，一节课下来你会感到非常紧张，一星期下来，你会感到太累了，觉得“高数”这道坎似乎太高了！其实你确实是已经很努力了，只是由于高等数学的教学时数有限，课堂上不可能举更多的例题，也不可能对每个例题都细细剖析。难怪不少同学感到“堂上内容都能懂，课外作业做不全”。没有大量的例题供揣摩，没有适当的解剖分析作示范，能学好高数确是不大容易的。

编写本书就是为了帮助你过好“高数”这道坎，为了将过去的“高数高数，令人望而却步”的贬词，改变成“高数高数，助你走上成功之路”的美名。

高等数学的辅导教材各种各样，各有特色：有人专讲解题技巧，其解法之精妙确令同行眼界一开，令学生惊奇赞叹；有人把高数知识点滴不漏地进行图表化、系统化、网络化，使人一目了然；也有人把例题的解题过程写得非常详尽，一个等号都不拉下，让人一看就懂。既然有人已经这样写过了，我们就不再做重复工作了。我们的观点与做法是：再高超的解题技巧，也不过是雕虫小技，一目了然的东西，往往是留不下什么深刻的印象，一看就懂必然是一放就忘，而我们准备把更多的功夫放在“解题”之外：在解题之前作一些深入与详尽的分析，我们不是请同学们来欣赏我们的解题过程，而是想让同学们从我们所作的这些分析中悟出该如何着手设计解题过程；而在解题之后，我们要指导大家好好总结一下这一解法有什么特点，利用这一解法还可解决那些类似的问题，能不能对这里的结论作出一些推论，使之得到推广使用。我们不准备在你的面前表演魔术，这除了使你惊奇、赞叹之外，你还能有多大的收获，还不是把这些雕虫小技的西洋镜拆穿；教会你几招，说不定什么时候，你的帽子里飞出来的不是一只鸽子，而是一群天鹅，那么你就彻底成功了。

由此我们觉得系统性与典型性很难兼顾，只能在强调典型性时适当考虑到系统性；由此我们更觉得很难做到由浅入深，只能做到深入浅出，从而我们在各个章节选择例题时对于综合性问题作了最充分的考虑。

我们编写本书的愿望是美好的，但是实现这样的愿望，总要在使用过几轮并逐步改进后才会得以实现，为此我们恳请专家学者、同行师长、学生朋友们多提宝贵意见，希望你们提得越多越好、越早越好，更希望大家能指出些实质性的问题，并提出改进意见。我们对你所提的意见，将会以适当的方式表示感谢，以至邀请你来和我们共同参与修订再版。

作者的电子信箱是ctgong2001@yahoo.com.cn

本书是在华东理工大学数学系王宗尧主任组织下编写的，先后参与研讨并提供资料的老师有（以拼音为序，下同）：曹宵临、陈秀华、方民、龚成通、江志松、李红英、刘剑平、施劲松、唐雪芬、王刚、许树声、殷锡鸣和张明尧等老师。提供初稿的老师有：曹宵临、龚成通、李红英、刘剑平、王刚和殷锡鸣。原始初稿由龚成通、李红英和王刚进行加工整理，陈秀华、江志松和施劲松等老师参与编写了部分习题解答，陈秀华、许树声、张起云等老师对打印稿分头进行了仔细阅读并修改。最后全书由龚成通进行了统稿。王行愚校长对本书的编写与出版始终表示了关心，尤其希望我们能赶在校庆50周年之际出版。我们还要感谢在本书编写出版过程中给予过各种支持的领导、老师和学生朋友，这里特别要感谢的是教务处的刘伯祥老师和出版

社的朱广忠和王席溱老师，他们为本书的出版作出了很大的实质性的支持。

作者在编写本书时，参阅了全国工科数学课程指导委员会编写的《高等数学释疑解难》和《工科数学——考研专辑》，美国（普特南）、俄罗斯历届大学生高等数学竞赛的有关资料。

最后要感谢全国非数学类专业数学基础课程教学指导（分）委员会《大学数学》杂志主编苏化明教授，他为本书的编写提出了很多有益的建议和修改意见并为之作序增色。

龚成通、李红英、王刚

2002.9.30

# 目　　录

# 第 1 节　函　　数

**[例 1]**　函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ 和 $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 是否为同一个函数？为什么？

**解**　这两个函数不是同一个函数. 因为虽然在 $(1,\infty)$ [$f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域]上它们有相同的对应规则，但 $g(x)$ 的定义域 $(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$ 与 $f(x)$ 的定义域 $(1,\infty)$ 不同.

**注**　根据函数的定义可知，函数概念有两大要素：定义域和对应规则. 只有当两个函数的定义域和对应规则都相同时，才可认为它们是同一个函数.

**[例 2]**　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2)$，解下列各题：

(1) 求函数 $f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+f(7-x)$ 的定义域；

(2) 若函数 $f(2x-a)+f(x-a)$ 的定义域不是空集，求 $a$ 的范围.

**解**　(1) $f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$ 的定义域可由 $0\leqslant\dfrac{x}{2}-1<2$ 解得为 $[2,6)$. $f(7-x)$ 的定义域可由不等式 $0\leqslant 7-x<2$ 解得为 $(5,7]$.

由此可知，函数 $f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+f(7-x)$ 的定义域为 $[2,6)\cap(5,7]$，即 $5<x<6$.

(2) 由本例(1)的方法可知，$f(2x-a)$ 的定义域 $\left[\dfrac{a}{2},1+\dfrac{a}{2}\right)$；$f(x-a)$ 的定义域为 $[a,a+2)$. 这两个区间有交的条件为“较小”的区间 $\left[\dfrac{a}{2},1+\dfrac{a}{2}\right)$ 的左端点或右端点落在“较大”区间 $[a,a+2)$ 内，即 $a\leqslant\dfrac{a}{2}<a+2$ 或 $a<1+\dfrac{a}{2}\leqslant a+2$，

得 $a$ 的范围为
$$\{-4<a\leqslant 0\}\cup\{-2\leqslant a<2\},$$
即
$$-4<a\leqslant 2.$$

**注**　本例(2)中若将“较小”与“较大”的关系倒置，则会遗漏“较小”区间含于“较大”区间内这种情况.

**[例 3]**　设 $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x^2), & |x|<1\\ 1, & |x|\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x, & x<-1\\ \sqrt{1+x}, & x\geqslant -1\end{cases}$，求 $f(x)+g(x)$.

**分析**　在进行两个分段函数四则运算时，由于分界点不尽相同，即使分界点相同，还要看该点处函数值的定义以及左右两边各段上表达式，所以最好的办法是列表讨论. 最后一行便是计算结果.

**解**

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $[1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1 | $\ln(1-x^2)$ | 1 |
| $g(x)$ | $x$ | 0 | $\sqrt{1+x}$ | $\sqrt{1+x}$ |
| $f(x)+g(x)$ | $1+x$ | 1 | $\ln(1-x^2)+\sqrt{1+x}$ | $1+\sqrt{1+x}$ |

**[例 4]**　设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ x-1, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}\arcsin x, & |x|\leqslant 1\\ \arctan x, & |x|>1\end{cases}$，求 $g[f(x)]$.

**解** $g[f(x)]=\begin{cases}\arcsin f(x), & |f(x)|\leqslant 1\\ \arctan f(x), & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}\arcsin(x+1), & -2\leqslant x\leqslant 0\\ \arcsin(x-1), & 0<x\leqslant 2\\ \arctan(x+1), & x<-2\\ \arctan(x-1), & x>2\end{cases}$

［例 5］ 设对任一非零实数 $x$ 总有 $\frac{1}{2}f\left(\frac{2}{x}\right)+3f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{2}-\frac{17}{x}$，求 $f(x)$.

**分析** 解这类问题，须找出这样的换元：在将$\frac{2}{x}$变成为$\frac{u}{3}$的同时将$\frac{x}{3}$变成$\frac{2}{u}$，这样的换元显然就是 $x=\frac{6}{u}$.

**解** 令 $x=\frac{6}{u}$，则有
$$\frac{1}{2}f\left(\frac{u}{3}\right)+3f\left(\frac{2}{u}\right)=\frac{3}{u}-\frac{17}{6}u,$$
即
$$\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{3}\right)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{3}{x}-\frac{17}{6}x,$$
与原方程联立，解得
$$f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{3}-\frac{6}{x},$$
即
$$f(x)=x-\frac{2}{x}.$$

［例 6］ 下列函数是否为周期函数（如果是，则求出其周期，若不是请说明原因）：

(1) $f(x)=\sin 12x+\cos 18x$； (2) $f(x)=\cos\sqrt{2}x+\sin \pi x$； (3) $f(x)=\cos(x^2)$.

**解** (1) 由于 $\sin 12x$ 和 $\cos 18x$ 的周期分别为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{\pi}{9}$，可知 $f(x)=\sin 12x+\cos 18x$ 是周期函数，其周期为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{\pi}{9}$的最小公倍数$\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为 $f_1(x)=\cos\sqrt{2}x$ 的周期 $T_1=\sqrt{2}\pi$，$f_2(x)=\sin\pi x$ 的周期为 $T_2=2$，而$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$不是有理数，所以 $T_1$ 和 $T_2$ 无最小公倍数，即 $f_1(x)$和 $f_2(x)$无公共周期，所以 $f(x)$不是周期函数.

(3) 所有使 $f(x)=1$ 的点为 $x_n=\pm\sqrt{2n\pi}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，每相邻两点之间的距离为
$$d_n=\left|\pm\sqrt{2(n+1)\pi}\mp\sqrt{2n\pi}\right|=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
随着 $n$ 的增加而越来越小，以至趋于零，这显然有悖于周期函数的定义，因此函数 $f(x)$不是周期函数.

**注** 本例(3)也可以用反证法来说明：若 $f(x)=\cos(x^2)$ 是周期函数，设其周期为 $T$，则由
$$f(T)=f(0),$$
得 $\cos T^2=1$，从而可知 $T=\sqrt{2\pi}$.

由
$$\begin{aligned}0&=f(T+\sqrt{\pi})-f(\sqrt{\pi})=\cos(3\pi+2\sqrt{2}\pi)-\cos\pi\\&=1-\cos(2\sqrt{2}\pi)\neq 0,\end{aligned}$$
得到矛盾.

［例 7］ 将函数 $f(x)=e^{x-x^2}$ $(x\in\mathbf{R})$ 分解为定义在 R 上的一个奇函数与一个偶函数的和，试问：这样的分解是否惟一？

**分析与解** 设满足题意要求的分解是可行的，即存在一个奇函数 $\varphi(x)$和一个偶函数 $\psi(x)$，使成立

$$f(x)=\varphi(x)+\psi(x),$$

我们可以试着用奇函数和偶函数的定义把 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 求出来. 因为

$$f(-x)=\varphi(-x)+\psi(-x)=-\varphi(x)+\psi(x),$$

从以上两式可得　$\varphi(x)+\psi(x)=e^{x-x^2}$, $-\varphi(x)+\psi(x)=e^{-x-x^2}$,

由此解得　$\varphi(x)=\frac{1}{2}(e^{x-x^2}-e^{-x-x^2})$, $\psi(x)=\frac{1}{2}(e^{x-x^2}+e^{-x-x^2})$,

即得分解式为　$e^{x-x^2}=\frac{1}{2}(e^{x-x^2}-e^{-x-x^2})+\frac{1}{2}(e^{x-x^2}+e^{-x-x^2})$.

又由于在求 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 时, 实质上是解了一个二元一次线性方程组, 由于该方程组的两个未知量 $\varphi$、$\psi$ 的系数之比为 $\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}$, 可知该线性方程组的解是惟一的. 从而可知这样的分解也是惟一的.

［**例 8**］　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数, 且 $f(x)\neq 0$, 求 $g\left(\frac{3}{f(2x-1)}\right)$ 的反函数.

**分析**　由反函数定义知, 可从关系式 $y=f(x)$ 中解出 $x=g(y)$; 也可从关系式 $y=g(x)$ 中解出 $x=f(y)$.

**解**　因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数, 所以可由 $v=f(u)$ 解得 $u=g(v)$, 反之亦然. 故可由

$$y=g\left(\frac{3}{f(2x-1)}\right), \text{ 得} \frac{3}{f(2x-1)}=f(y).$$

再由　$f(2x-1)=\frac{3}{f(y)}$, 得 $2x-1=g\left(\frac{3}{f(y)}\right)$,

即 $x=\frac{1}{2}\left[1+g\left(\frac{3}{f(y)}\right)\right]$. 可知所求反函数为

$$y=\frac{1}{2}\left[1+g\left(\frac{3}{f(x)}\right)\right].$$

［**例 9**］　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 曲线 $y=f(x)$ 有一个对称中心 $(a,b)$ 和一条对称轴 $x=c(c\neq a)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

**证明**　由曲线 $y=f(x)$ 有一个对称中心 $(a,b)$, 可知对一切 $x$ 有

$$f(x)+f(2a-x)=2b \tag{1}$$

由曲线 $y=f(x)$ 有一条对称轴 $x=c$, 可知对一切 $x$ 有

$$f(x)=f(2c-x) \tag{2}$$

由(1), (2)两式可得

$$\begin{aligned} f(x)&=2b-f(2a-x)=2b-f[2c-(2a-x)]\\ &=2b-f(2c-2a+x) \end{aligned} \tag{3}$$

再次使用(3)式, 得

$$\begin{aligned} f(2c-2a+x)&=2b-f[(2c-2a)+(2c-2a+x)]\\ &=2b-f(4c-4a+x) \end{aligned} \tag{4}$$

(4)式代入(3)式, 得

$$f(x)=f(4c-4a+x),$$

所以函数 $f(x)$是以 $4\mid c-a\mid$ 为周期的周期函数.

**[例 10]** 设函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,存在正数 $T$ 及 $k(k\neq 1)$,使对任一实数 $x$ 有 $f(x+T)=kf(x)$. 证明:$f(x)$必可分解为一个指数函数与一个周期函数之积.

**分析** 若这样的分解成立,即存在指数 $a^x$ 及周期函数 $g(x)$(猜测其周期应为 $T$),为使其结论成立.看能不能先把 $a$ 或 $g(x)$求出来.

由 $f(x+T)=kf(x)$ 得 $a^{x+T}g(x+T)=ka^xg(x)$. 再利用 $g(x)$的周期性,即 $g(x+T)=g(x)$,得 $a^T=k$,即 $a=k^{\frac{1}{T}}$.

**证明** 设 $g(x)=f(x)\cdot k^{-\frac{x}{T}}$,

则
$$g(x+T)=f(x+T)k^{-\frac{x+T}{T}}=kf(x)k^{-\frac{x+T}{T}}$$
$$=f(x)k^{\frac{-x}{T}}=g(x),$$

可知 $g(x)$ 是 $T$ 的周期函数,从而得到满足要求的分解式
$$f(x)=(k^{\frac{1}{T}})^xg(x).$$

**[例 11]** 设 $f(x)$是严格单调增加的函数,且对一切实数 $x$ 有 $f[f(x)]=x$,证明对一切实数 $x$ 有 $f(x)=x$.

**证明** 用反证法.

若等式 $f(x)=x$ 并非对一切实数都成立,则必存在实数 $a$,使 $f(a)=b$,且 $b\neq a$. 不妨设 $b>a$,由于 $f(x)$是严格单调增加函数,所以有 $f(b)>f(a)$. 另一方面由于 $f[f(a)]=a$,可得 $f(b)=a$. 又根据 $f(b)>f(a)$ 可知 $a>b$,这就与上面的假设 $b>a$ 矛盾,命题从而得证.

**注** 在解(或证明)高等数学问题时,必须全面考虑各种可能的情况,但对各种不同情况的处理方法很可能是完全类似的,这时我们就选定某种情况,加以详细论述,其余情况不再一一赘述,就会有所谓的"不妨设". 如本例中本应对 $b>a$ 的情况也要加以讨论,但其处理方法完全一样,从而一句"不妨设"就可以轻轻地一笔带过了. 但要注意,处理方法不完全类似的问题,不可轻易地以"不妨设"来忽略其它不同的情况.

## 习 题 A

**1.** 填空题

(1) $f(x)$的定义域是$[-1,1)$,则函数 $f(1-2x)+f(3x)$ 的定义域为________;

(2) 若函数 $f(x)=\arcsin\left(\dfrac{3+\cos x}{a}\right)$ 的定义域不是空集,则常数 $a$ 必须满足________;

(3) 若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^3+x}{x^4+1}$,则 $f(x)=$ ________;

(4) 设 $\varphi(x)=\ln x$, $\varphi[g(x)]=x^2+1+\ln 3$,则 $g(x)=$ ________;

(5) 设 $f(x)=\begin{cases}1-x & x\leqslant 1\\ \ln x & x>1\end{cases}$,则 $f[f(x)]=$ ________;

(6) 函数 $f(x)=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ________;

(7) 若函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$,则 $a=$ ________, $b=$ ________;

(8) 函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,则曲线 $y=f(a+2x)+f(b-2x)$ 关于直线 $x=$ ________ 对称;

(9) 若 $f(x)$是奇函数,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=1-\mid x-1\mid$,则 $x<0$ 时,$f(x)=$ ________;

(10) 若 $f(x)$是以 $T=10$ 为周期的周期函数,在区间$[95,105)$上 $f(x)=x$,则在$[0,10)$上,$f(x)=$ ________.

**2.** 选择题

(1) 下列结论中正确的是 ( )

(A) 周期函数必有最小正周期.

(B) 若 $f(x)$ 是周期函数，则 $f(x^2)$ 肯定不是周期函数.

(C) 若 $(-\infty, +\infty)$ 上有 $f(x) \leqslant M < 0$，则 $\dfrac{1}{M} \leqslant \dfrac{1}{f(x)} < 0$.

(D) 若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上每一点处都有定义，则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有界.

(2) 若 $f(x)$ 及其反函数 $f^{-1}(x)$ 都是严格单调增函数，则曲线 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ ( )

(A) 完全重合. (B) 不可能有交点.

(C) 至多有一个交点. (D) 以上都不对.

(3) 周期函数 $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ 的最小正周期是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{4}$. (B) $\dfrac{\pi}{2}$. (C) $\pi$. (D) $2\pi$.

(4) 下列各函数中不是周期函数的是 ( )

(A) $\cos(\sin|x|)$. (B) $(\sin|x|)^2$. (C) $\sin(\sin|x|)$. (D) $e^{\sin|x|} + e^{-\sin|x|}$.

(5) $f(x)$ 是严格单调增的函数，则下列函数中不一定严格单调增的是 ( )

(A) $f^2(x)$. (B) $f[f(x)]$. (C) $e^{f(x)}$. (D) $f(e^x)$.

(6) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且 $0 \leqslant f(x) \leqslant M$，则下列函数中必有界的是 ( )

(A) $\dfrac{1}{f(x)}$. (B) $\ln f(x)$. (C) $e^{\frac{1}{f(x)}}$. (D) $e^{-\frac{1}{f(x)}}$.

(7) 曲线 $y = f(x)$ 关于直线 $y = x$ 对称的必要条件是 ( )

(A) $f(x) = x$. (B) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. (C) $f(x) = -x$. (D) $f[f(x)] = x$.

(8) $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为反函数，则 $f\left[\dfrac{1}{2}g(3x)\right]$ 的反函数是 ( )

(A) $g\left[\dfrac{1}{2}f(3x)\right]$. (B) $\dfrac{1}{3}f[2g(x)]$. (C) $g\left[2f\left(\dfrac{x}{3}\right)\right]$. (D) $2g\left[\dfrac{1}{3}f(x)\right]$.

(9) 若函数 $f(x)$ 是周期函数，则曲线 $y = f(x)$ ( )

(A) 既有对称轴，也有对称中心. (B) 必有对称轴，但不一定有对称中心.

(C) 必有对称中心，但不一定有对称轴. (D) 不一定有对称轴，也不一定有对称中心.

(10) 若对一切实数 $x$，都有 $f(x) = -f(x+5)$，则曲线 $y = f(x)$ ( )

(A) 关于直线 $x = \dfrac{5}{2}$ 对称.

(B) 关于点 $\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$ 对称.

(C) 向左(或右)平移 10 个单位，与原曲线相重合.

(D) 以上都不对.

**3.** 下列各组函数中的两个函数 $f$ 和 $g$ 是否为同一个函数？为什么？

(1) $y = f(x) = \ln x$, $v = g(u) = 3\ln u^{\frac{1}{3}}$;

(2) $y = f(x) = x^5$, $x = g(y) = y^{\frac{1}{5}}$.

**4.** 求下列函数的反函数：

(1) $y = \sqrt{e^x - 1}\ (x \geqslant 0)$; (2) $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$; (3) $y = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}$.

**5.** 设 $f(x) = 3x + 4$，分别求出下列各式中的函数 $g(x)$：

(1) $g[f(x)]=4x+3$；　(2) $f[g(x)]=4x+3$；　(3) $f\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]=4x+3$.

**6.** 设 $f(x)=\begin{cases}-2-x & x<-1\\ x & |x|\leqslant 1\\ 2-x & x>1\end{cases}$，求(1) $f(x+2)$；(2) $f(x)+f(x+2)$.

**7.** (1) 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ $(|x|<1)$，证明 $f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)=f(a)+f(b)$；

(2) 设 $f(x)=\arctan x$，证明 $f\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right)=f(a)+f(b)$.

**8.** 求下列各函数方程的解(即求出满足等式的未知函数 $f(x)$)：

(1) $f\left(\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)=x\ln x$；　(2) $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-1$；　(3) $f(3+x)+2f(1-x)=x^2$.

**9.** 若 $f(x)$存在反函数，且 $f[f(x)]=f(x)$，证明 $f(x)=x$.

**10.** 判断下列结论是否正确，必须写出判断依据.

(1) 若 $f(x)$分别在 $(-\infty,a]$ 及$(a,+\infty)$ 上严格单调增，则 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增；

(2) 若 $f(x)$和 $g(x)$都是周期函数，则 $f(x)+g(x)$ 也一定是周期函数；

(3) 若 $f(x)$单调减，$g(x)$单调增，则 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$都单调递减；

(4) $f(x)$和 $g(x)$都是非常数的奇函数，则 $f(x)+g(x)$ 不能是偶函数；

(5) 只有严格单调函数，才有反函数.

**11.** 下列函数是否为周期函数？若判定为“是”，请求出周期；若判定为“否”，请说明其依据：

(1) $f(x)=\sin x+\sin 3x$；　(2) $f(x)=\sin x\cdot\sin 3x$；　(3) $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}$.

**12.** 若函数 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，$a>0$，$b>0$，试证明：

$$af(a)+bf(b)\leqslant(a+b)f(a+b).$$

## 习　题　B

**1.** 验证函数

$$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

满足 $f(x_1)=y_1$、$f(x_2)=y_2$ 和 $f(x_3)=y_3(x_1<x_2<x_3)$. 仿此写出次数不超过 3 的多项式函数 $\varphi(x)$，使它满足 $\varphi(x_k)=y_k(k=1,2,3,4,\ x_1<x_2<x_3<x_4)$.

**2.** 函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，曲线 $y=f(x)$ 有两条对称轴 $x=a$ 和 $x=b$ $(b>a)$，证明：函数 $f(x)$是周期函数.

**3.** 设 $f(x)=x+\sin x$，求曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的交点坐标.

**4.** 函数 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且存在正数 $a$ 和 $b$，使对一切实数 $x$，有

$$f(x+a)=b+\sqrt{2bf(x)-f^2(x)}.$$

证明：$f(x)$是以 $2a$ 为周期的周期函数.

**5.** 求 $f(x)$，使对除了 $x=0$，1 点外的所有点 $x$，都有 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x$.

**6.** 求函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数.

## 第 2 节　函数的极限

［例 1］　从极限的定义出发证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+5}{x^3+2x-3}=1$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\ln x=\ln 2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1-0}(x+2\sqrt{1-x})=1$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 3}x^2\neq 9.01$.

**解**　(1) **分析**　对于任意给定的正数 $\varepsilon$，令 $\left|\dfrac{2x+5}{x^3+2x-3}-1\right|<\varepsilon$，即 $\dfrac{|x-2||x^2+2x+4|}{|x^3+2x-3|}<\varepsilon$ 成立，为获得 $\delta$ 的存在性，可将 $\dfrac{|x^2+2x+4|}{|x^3+2x-3|}$ 适当放大. 在 $x\to 2$ 时，总可令 $|x-2|<0.5(=\delta_1)$，即 $1.5<x<2.5$，于是有

$$|x^2+2x+4|<\frac{61}{4},\ |x^3+2x-3|>\frac{27}{8}.$$

即
$$\frac{|x-2||x^2+2x+4|}{|x^3+2x-3|}<\frac{122}{27}|x-2|.$$

再令 $\dfrac{122}{27}|x-2|<\varepsilon$，得 $|x-2|<\delta_2=\dfrac{27}{122}\varepsilon$.

**证明**　对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left(0.5,\ \dfrac{27}{122}\varepsilon\right)$.

$$0<|x-2|<\delta\Rightarrow\begin{cases}0<|x-2|<0.5 & \Rightarrow |x^3+2x-3|>\dfrac{27}{8},\ |x^2+2x+4|<\dfrac{61}{4}\\[2mm] 0<|x-2|<\dfrac{27}{122}\varepsilon & \Rightarrow \dfrac{122}{27}|x-2|<\varepsilon\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{2x+5}{x^3+2x-3}-1\right|=\frac{|x-2||x^2+2x+4|}{|x^3+2x-3|}<\frac{27}{122}|x-2|<\varepsilon,$$

所以有
$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x^3+2x-3}=1.$$

**注**　1) 为方便计，往往将分析过程与证明过程不加分隔，连起来作为证明的整体(见本例中以下各小题)，即便如此，读者仍应清楚，这里的一“令”再“令”，实质上都只是分析过程.

2) 为证明 $\delta$ 的存在性，初学者总想找出精确的 $\delta$ 来，这往往是很麻烦的(甚至是无法做到的)，其实也是不必要的，要知道 $\delta$ 本不是惟一的，找到一个合适的 $\delta$ 后，比它小的任一正数也都可以取为 $\delta$.

为了证明不等式 $f(x)<\varepsilon$ 解的存在性，可将 $f(x)$ 适当放大为 $g(x)$［即 $f(x)\leqslant g(x)$］，这样只要证明不等式 $g(x)<\varepsilon$ 解的存在性就可以了. 对于本例这类问题应先将 $|f(x)-A|$ 化为 $|\varphi(x)||x-x_0|$，再在限制条件 $|x-x_0|<\delta_1$ 下，将 $|\varphi(x)|$ 放大为常数 $\mu$. 在 $x\to x_0$ 时，这样的限制条件是合理的，须注意的是 $\delta_1$ 应尽量取得小一些，如本题中应取 $\delta_1<1$ (解题过程中取为 $\delta_1=0.5$).

**证明**　(2) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，为使 $|\ln x-\ln 2|<\varepsilon$，即 $\left|\ln\left(1+\dfrac{x-2}{2}\right)\right|<\varepsilon$ 成立，应有

$$e^{-\varepsilon}<1+\frac{x-2}{2}<e^{\varepsilon},\ -2(1-e^{-\varepsilon})<x-2<2(e^{\varepsilon}-1)$$

可取
$$\delta=\min[2(1-e^{-\varepsilon}),\ 2(e^{\varepsilon}-1)]=2(1-e^{-\varepsilon}),$$

显然当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$|\ln x-\ln 2|<\varepsilon$$

成立，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\ln x=\ln 2.$

(3) 对于任意给定的正数 $\varepsilon$，令

$$|x+2\sqrt{1-x}-1|<\varepsilon,\text{即}\sqrt{1-x}\,|2-\sqrt{1-x}|<\varepsilon$$

成立，可将左式中 $|2-\sqrt{1-x}|$ 在限制条件下放大，令 $-1<x-1<0$，即在 $x_0=1$ 的半径为 $\delta_1=1$ 的左邻域内，

$$\sqrt{1-x}\,|2-\sqrt{1-x}|<2\sqrt{1-x}.$$

于是可取 $\delta=\min\left(1,\dfrac{\varepsilon^2}{4}\right)$，当 $-\delta<x-1<0$ 时，有

$$|(x+2\sqrt{1-x})-1|=\sqrt{1-x}\,|2-\sqrt{1-x}|<2\sqrt{1-x}<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1-0}(x+2\sqrt{1-x})=1.$

(4) 若用"$\varepsilon-\delta$"语言来描述 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$ 应是：

$$\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x_1\in\hat{N}(x_0,\delta)\Rightarrow|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

取 $\varepsilon_0=0.001$，对于任意的 $\delta>0$，取

$$x_1=\min\left(3.001,\ 3+\frac{\delta}{2}\right),$$

则必有 $x_1\in\hat{N}(3,\delta)$，且

$$|x_1^2-9.01|\geqslant|3.001^2-9.01|=0.003\,999>0.001=\varepsilon_0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 3}x^2\neq 9.01.$

**[例 2]** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(\neq 0)$，试从定义出发证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f^2(x)}=\dfrac{1}{A^2}.$

**证明** 由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(\neq 0)$，可知对于取定的 $\varepsilon=\dfrac{|A|}{2}$，必存在 $\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，有 $|f(x)-A|<\dfrac{|A|}{2}$，从而有

$$A-\frac{|A|}{2}<f(x)<A+\frac{|A|}{2},\ \frac{|A|}{2}<f(x)<\frac{10}{2}|A|$$

可知 $\left|\dfrac{1}{f^2(x)}-\dfrac{1}{A^2}\right|=\dfrac{|f(x)+A|\,|f(x)-A|}{f^2(x)A^2}\leqslant\dfrac{(|f(x)|+|A|)\,|f(x)-A|}{f^2(x)A^2}<\dfrac{3}{|A|^3}$ $|f(x)-A|$，另又可由定义可知：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $|f(x)-A|<\dfrac{|A|^3}{10}\varepsilon.$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{1}{f^2(x)}-\frac{1}{A^2}\right|<\frac{10}{|A|^3}|f(x)-A|<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f^2(x)}=\dfrac{1}{A^2}.$