理工科数学速成深化复习精讲

上册

黄庆祥 何灿芝主编

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_a^b f_i(x)dx$$

湖南科学技术出版社

理工科数学速成深化复习精讲

上册

主　编　黄庆祥　何灿芝
副主编　张杰恒　胡耀荣
编　者　黄庆祥　何灿芝　张杰恒
　　　　胡耀荣　罗　汉　周润兰
　　　　邓爱珍　肖双发

湖南科学技术出版社

湘新登字 004 号

理工科数学速成深化复习精讲（上册）

黄庆祥　何灿芝主编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路 3 号）

湖南省新华书店经销

湖南省新华印刷二厂印刷

（印装质量问题请直接与本厂联系）

厂址：邵阳市双坡岭

邮码：422001

*

1995 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

开本：787×1092 毫米　1/32　印张：19.5　上册字数：252,000

印数：1——6,100

ISBN 7—5357—0515—4

O·60　二册套价：18.10 元

地科 171—10

内 容 简 介

全书分上、下两册，上册共十讲，包括一元函数和多元函数的微积分学；下册共六讲，包括微分方程、无穷级数和工程数学与经济数学的主要内容。

该书围绕高等数学与工程数学的重点与难点进行科学总结、深化提高。以论述基本概念，理论和方法为主，结合典型例题指导解题技巧。各讲之后配有适量习题与综合题，并附有提示和答案。该书是报考硕士生的速见成效的复习用书，也是本科生复习、总结、提高和教师教学的有益数学参考书。

前　言

《理工科数学速成深化复习精讲》一书，针对高等数学和工程数学（包括线性代数，概率统计与经济数学，复变函数）的重点内容及难点部分，进行系统的复习与深化，能较好地解决目前在高等数学和工程数学的教学、评估与统考中出现的纵向深、横向广，方法灵活，技巧性强等问题。是理想的“高等数学”速成深化复习的参考书。

全书共分十六讲。第一至第十三讲为高等数学的重点内容，第十四、十五和十六讲分别为“线性代数”，“概率统计与经济数学”和“复变函数”的主要内容。论述上不是按传统的以知识的前后次序的系统而是以重点内容与方法为纲进行综合性阐述，充分体现出速成深化，总结复习的特点。该书重点突出，难点分散，内容精且适量。论述简练，深入浅出。不但对有关基本概念的含义、基本定理的运用、方法的引进和演算技巧等作了精辟的阐述与系统的总结，而且还精选了不少极富有解剖、思考价值的典型例题。每讲后面附有适量的习题，并配有提示或答案。最后附有 1994 年硕士生入学统考题供读者参考与自检。

本书是大学（含成教系列）理、工、经济、管理各专业学生学习高等数学的参考书，特别是大学进行高等数学教学评估，会考和参加研究生入学考试的难得的复习教材。也是高等数学自学者的“良师益友”。对从事高等数学教学的教师也是有益的

参考书。

武汉大学齐民友教授曾为本书初版作序，谨致谢忱。初版问世后曾得到各界好评并提出宝贵意见，顺此完善重寄出版之际向有关同志致谢。

编　者

1994 年 6 月

目　　录

第一讲　巧用微积分知识解决函数的极限、连续问题

一、不容忽视的几个函数方面的问题

毫无凝问，读者们对函数及其有关特性的定义几乎都能逐字逐句地述出。然而，遇到有一定难度的题目时就不一定能顺利地解出。这一方面是对概念理解不透，另一方面也有技巧上的问题。本节先引述几个定义，再举若干范例，以期对读者进一步理解函数方面的几个定义及有关概念和掌握解题技巧有所俾益。

1. 函数及其特性概述

定义 1　设 S 为某一实数的集合。若当变量 x 取 S 中一值时，变量 y 就有完全确定的值与之对应，则称 y 为 x 的函数，记为

$$y = f(x), x \in s.$$

S 称为函数 $f(x)$ 的定义域。所有函数值(y 值) 的集合叫函数的值域。

在函数问题的讨论中，除定义域外，经常碰到的是下列函数的几个基本特性的问题。

1) 函数的有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 S。若存在正数 M，使得对 S 上的任意一点 x，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 是有界的，否则，称 $f(x)$ 是无界的。

2) 函数的单调性　设 $f(x)$ 定义于区间 (a,b) 内。若对于任意的 $x_1 < x_2, x_1 \in (a,b), x_2 \in (a,b)$，有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是(严格) 单调增加(减少) 的。如果是 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$)，则称

$f(x)$ 在(a,b) 内是非减(增)的。

3) 函数的奇偶性　若函数 $f(x)$ 在对称区间$(-a,a)$ 内有定义且 $f(-x)=f(x)$($f(-x)=-f(x)$)则称 $f(x)$ 在$(-a,a)$ 内为偶(奇)函数。

4) 函数的周期性　给出函数 $f(x)$,若存在一个非零的数 T,使得对于定义域内的任何 x,均有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 叫 $f(x)$ 的周期。通常 T 是指最小正周期。

2. 范例

例 1　设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[f\cdots f}_{n\text{个}f}(x)]\}$ 且 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

求 $f_n(x)$.

解　$f_2(x)=f\{f(x)\}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

$$f_3(x)=f\{f_2(x)\}=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

现设 $n=k$ 时,$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$,则当 $n=k+1$ 时,有

$$f_{k+1}(x)=f\{f_k(x)\}=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

故由数学归纳法知,$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

例 2 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f[f(x)]$,$f\{f[f(x)]\}$ 及其定义域

解 $\because$ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}, x\neq 1,$

$\therefore$ $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-f(x)}$(此时 $f(x)\neq 1$,即 $x\neq 0$)

$$=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}. \qquad (x\neq 0,1)$$

$f\{f[f(x)]\}=\dfrac{1}{1-f[f(x)]}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$(此时 $x\neq 0,1$)

故 $f[f(x)]$ 及 $f\{f[f(x)]\}$ 的定义域均是 $x\neq 0,1$ 的一切实数。

例 3 设函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$$

且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

解 由所给方程解得

$$f(\ln x)=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4x^2\ln x}}{2}=x(1\pm\sqrt{1-\ln x}).$$

令 $x=1$,由 $f(0)=0$,有

$f(0)=1\pm\sqrt{1-0}=0$,故应取

$$f(\ln x)=x(1-\sqrt{1-\ln x}).$$

令 $\ln x=t$,则 $x=e^t$,于是得

$$f(t)=e^t(1-\sqrt{1-t}).$$

故所求函数为

$$f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x}).$$

例 4 设 $f(x)$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$,已知 $f'(0)$ 存

在且对任何 x,ξ，恒有 $f(x+\xi)=f(x)+f(\xi)+2x\xi$，求 $f(x)$.

解 $\because$ $f'(0)=\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{f(0+\xi)-f(0)}{\xi}$，由

$f(0+\xi)=f(0)+f(\xi)$，得 $f(0)=0$.

$\therefore$ $f'(0)=\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

又由 $f(x+\xi)=f(x)+f(\xi)+2x\xi$，得

$$\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}+2x,$$

$\therefore$
$$\lim_{\xi\to 0}\frac{f(x+\xi)-f(x)}{\xi}=\lim_{\xi\to 0}\left[\frac{f(\xi)}{\xi}+2x\right]=f'(0)+2x.$$

故 $f'(x)$ 存在且 $f'(x)=f'(0)+2x$，

$\therefore$ $f(x)=f'(0)x+x^2+c$.

由 $f(0)=0$，得 $c=0$，

$\therefore$ $f(x)=f'(0)x+x^2$.

例 5 证明可导的偶(奇)函数的导数为奇(偶)函数

证 设 $f(x)$ 可导且为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$. 且

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[-(x+\Delta x)]-f(-x)}{\Delta x}\\&=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x-\Delta x)-f(-x)}{(-\Delta x)}\\&=-f'(-x).\end{aligned}$$
即 $f'(-x)=-f'(x)$.

故 $f'(x)$ 为奇函数。

同理可证可导的奇函数的导数为偶函数。

另解 应用复合函数的求导法则，由

$f(x)=f(-x)$($f(x)=-f(-x)$) 两边求导，结论即得证。

例 6 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 和 $f(x)$ 为单调非减函数，证明

若 $$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

则 $$\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)]$$

证 由于 $\varphi(x),\psi(x),f(x)$ 均为单调非减函数，且

$$\varphi(u) \leqslant f(u) \leqslant \psi(u),$$

故 $$\varphi[\varphi(x)] \leqslant \varphi[f(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant f[\psi(x)] \leqslant \psi[\psi(x)].$$

例 7 函数 $f(x)=\sin^2 x$ 及 $\varphi(x)=\sin x^2$ 是否为周期函数，若是，并求最小正周期。

解 1) $f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$,

故 $f(x)$ 为周期函数，其最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

2) $\varphi(x)=\sin x^2$ 不是周期函数，证明如下：

用反证法。不妨设 $T>0$ 是 $\varphi(x)$ 的周期(对 $T<0$ 的情况可用类似方法证明，则有

$$\sin(x+T)^2=\sin x^2, x\in R. \qquad ①$$

在 ① 中令 $x=0$，得 $\sin T^2=0$,

$\therefore$ $$T^2=k\pi, \text{即 } T=\sqrt{k\pi}\ (k\in N).$$

代入 ①，得

$$\sin(x+\sqrt{k\pi})^2=\sin x^2. \qquad ②$$

在 ② 中令 $x=\sqrt{2}T=\sqrt{2k\pi}$，得

$$\sin[(\sqrt{2}+1)^2 k\pi]=\sin 2k\pi=0,$$

$\therefore$ $$(\sqrt{2}+1)^2 k\pi=l\pi \qquad (l\in N), \text{即}$$

$$(\sqrt{2}+1)^2=\frac{l}{k} \qquad (k,l\in N).$$

由于 $(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$ 是无理数，而 $\frac{l}{k}$ 是有理数，故上述等式不能成立。因此 $\varphi(x)=\sin x^2$ 不是周期函数。

例 8 求 $f(x)=x-[x]$ 的最小正周期，其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分（即若 $x=n+r$，n 为整数且 $0\leqslant r<1$，则 $[x]=n$）。

解 设 $x=n+r$，m 为整数，则

$$\begin{aligned}f(m+x)&=f(m+n+r)=m+n+r-[m+n+r]\\&=m+n+r-m-[n+r]=n+r-[n+r]\\&=f(n+r)=f(x).\end{aligned}$$

故一切整数 m 都是 $f(x)$ 的周期，而最小正周期为 1。

例 9 已知函数 $f(x)=3^x\quad 0\leqslant x\leqslant 4$。试先将此函数延拓到 $[-4,4]$ 上，使它成为偶函数，再延拓到整个数轴使成为以 8 为周期的函数。

解 先依 $f(-x)=f(x)=3^x$，可知延拓到 $[-4,4]$ 上的偶函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}3^x, & 0\leqslant x\leqslant 4;\\ 3^{-x}, & -4\leqslant x<0.\end{cases}$$

其次因周期 $T=8$，有 $\varphi(x)=\varphi(x+8k)$，k 为整数。故当 $0\leqslant x+8k\leqslant 4$，即 $-8k\leqslant x\leqslant 4-8k$ 时，有

$$\psi(x)=\varphi(x+8k)=3^{x+8k}.$$

而当 $-4\leqslant x+8k<0$，即 $-8k-4\leqslant x<-8k$ 时，有

$$\psi(x)=\varphi(x+8k)=3^{-(x+8k)}.$$

因此，延拓到整个数轴上的周期为 8 的偶函数为

$$\psi(x)=\begin{cases}3^{x+8k}, & -8k\leqslant x\leqslant 4-8k,\\ 3^{-(x+8k)}, & -8k-4\leqslant x<-8k.\end{cases}$$

例 10 证明 若对于函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 有等式 $f(x+T)=kf(x)$（其中 k 和 T 为正的常数），则

$$f(x)=a^x\varphi(x),$$

其中 a 为常数，而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数。

证 由假设 $k>0,T>0$，故可令 $a=k^{\frac{1}{T}}>0$，则 $a^T=k$，

于是有 $f(x+T)=a^T f(x)$.

现定义 $\varphi(x)=a^{-x}f(x)$，则有

$$\varphi(x+T)=a^{-(x+T)}f(x+T)=a^{-x-T}a^T f(x)$$

$=a^{-x}f(x)=\varphi(x)$，故 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数，于是有 $f(x)=a^x\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数。

二 求极限方法大全

求极限通常是用罗必塔法则，但很多题目，特别是关于数列的极限，用罗必塔法则无法解决，还需掌握更多的方法与技巧。我们将常用的方法整理、分类、归纳成如下十四种。

1. 极限定义与柯西准则法

定义 2 设$\{x_n\}$为一数列，A 为常数。若对任意给定的正数 ε，总存在相应的正整数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$（称$\{x_n\}$收敛于 A）.

定义 3 设 A 为常数，若对任意给定的正数 ε，总存在相应的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$（或正数 $X=X(\varepsilon)$），使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时（或 $|x|>X$ 时）都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \qquad (\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=A).$$

定理 1 （柯西极限存在准则 1） 数列$\{x_n\}$的极限存在的充要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 且 P 为任何正整数时，都有 $|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$

定理 2 （柯西极限存在准则 2）当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限存在的充要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$（或正数 $X=X(\varepsilon)$），使得对满足 $0<|x_1-$

$x_0| < \delta, 0 < |x_2 - x_0| < \delta$(或 $x_2 \geqslant x_1 > X$ 的任何 x_1 与 x_2，都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

例 1 证明数列 $x_n = \frac{\cos(1!)}{1 \cdot 2} + \frac{\cos(2!)}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos(n!)}{n(n+1)}(n = 1,2,\cdots)$ 的极限存在。

证
$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\cos(n+!)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)} \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1},$$

故对任何 $\varepsilon > 0$，当 $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$，即 $n > \left[\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right]$ 时，
$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

由柯西准则 1，知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

求极限除用定义，柯西 准则及极限的四则运算法则外，还有很多巧妙的方法。下文所介绍的各种方法需用到的概念，定理和公式(如罗必塔法则) 大多是读者所熟悉的，就不再引述(只通过例题说明)，只对读者感陌生的或在高等数学课程中没提及的定理和公式等，才于引述

2. 罗必塔法

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{tg}^n\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$.

解 此题是求数列的极限，不能直接应用罗必塔法则。但可考虑更一般的极限