主编 刘绍亮 副主编 葛万霞

北京经济学院出版社

$$\Delta = \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

线性代数与线性规划

XIANXINGDAISHUYU
XIANXINGGUIHUA

财经类院校基础数学(二)

线性代数与线性规划

主　编　刘绍亮
副主编　葛万霞

北京经济学院出版社

1992. 北京

（京）新登字 211 号

线性代数与线性规划

Xianxingdaishu Yu Xianxingguihua

刘绍亮　主编

北京经济学院出版社出版

（北京市朝阳区红庙）

北京市通县永乐印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092 毫米　32 开本　7.75 印张　173 千字

1992 年 8 月第 1 版　　1992 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

印数：00 001—5 000

ISBN 7-5638-0323-8/O·6

定价：4.50 元

编者的话

本书是在北京经济学院使用多年的教材《线性代数讲义》、《线性规划讲义》的基础上修订编写的。其中，线性代数部分根据国家教育委员会高等教育司 1989 年 12 月 20 日出版的《经济数学基础》教学大纲的要求，增加了非负矩阵、对角占优矩阵及向量与矩阵的级数等。

本书着重介绍了线性代数的基本知识和方法，以及线性代数在经济中的重要应用。可作为经济院校《线性代数》课程的教材和选修课程《线性规划》的教学参考书。总教学时数约 85 课时。适当删减部分内容也可供 68 学时讲授。

参加本书编写的有：

葛万霞（第一、四章）

刘建南（第二、六章）

宋　薇（第五章）

张丽丽（第八、九章）

刘绍亮（第三、七章）

限于水平，书中难免有疏漏之处，敬请读者指正。

编者　1991 年 5 月

目　　录

第一章　n 阶行列式

在初等代数里，我们讨论二元、三元一次方程组时，引入了二阶、三阶行列式。

定义　　二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

在本章中我们将讨论 n 阶行列式的定义、性质、降阶展开定理，以及利用行列式来解 n 元线性方程组等问题。

§1.1　排　　列

一、　n 阶排列

定义 1.1　由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数字组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列。

例如，132 是一个三阶排列，4123 是一个四阶排列，35412 是一个五阶排列，……，而由 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有 n 阶排列的种数是 $n!$

二、逆序数与奇偶排列

$1,2,\cdots,n$ 是一个 n 阶排列，这个排列是从左向右按递增的顺序排列起来的，我们称之为自然顺序的排列。

定义 1.2　在一个排列中，如果一对数的前后位置与自然顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序。一个排列中逆序的总数，称之为排列的逆序数。

例如，在 2431 中，21、43、41、31 是逆序，所以 2431 的逆序数是 4；同理，45321 的逆序数是 9。

如何计算逆序数呢？

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 阶排列，考虑 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果排在 j_i 前面且比 j_i 大的元素有 t_i 个，就说 j_i 的逆序数是 t_i 个，而全体元素的逆序数之和即是这个排列的逆序数，即

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i.$$

例如，求排列 45321 及 23514 的逆序数。

$$t(45321)=0+0+2+3+4=9;$$

$$t(23514)=0+0+0+3+1=4.$$

定义 1.3　逆序数是偶数的排列称之为偶排列，逆序数是奇数的排列称之为奇排列。

例如，45321 是奇排列，23514 是偶排列。逆序数是零的排列，也称之为偶排列。

三、对换

定义 1.4　把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列，这样一个变换称为一个对换。

对换可以在相邻的两个元素之间进行，也可以在不相邻的两个元素之间进行。关于对换，我们有下面的定理。

定理 1.1　对换改变排列的奇偶性。

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

〔证明〕 (1)先证相邻对换。

排列 $a_1\cdots a_l a\ b\ b_1\cdots b_m$ 经过 a 与 b 的对换，变成 $a_1\cdots a_l b\ a\ b_1\cdots b_m$。显然 $a_1,\cdots,a_l,b_1,\cdots,b_m$ 这些元素在此对换下，其逆序数不变，因此只考虑 a、b 二元素。若 $a<b$，对换后 a 的逆序数增加一个，b 的逆序数不变；若 $a>b$，对换后 b 的逆序数减少一个，a 的逆序数不变。总之，无论逆序数是增加还是减少，都只变化了一个，从而改变了排列的奇偶性。所以，若对换在相邻元素之间进行，定理得证。

(2)再证不相邻对换。

排列 $a_1\cdots a_l a\ b_1\cdots b_m b\ c_1\cdots c_n$，经过 a、b 对换，变成 $a_1\cdots a_l b\ b_1\cdots b_m a\ c_1\cdots c_n$，容易看出这样一个对换可以通过一系列相邻对换来实现。

先将原排列中的 a 向右依次与 $b_1,\cdots,b_m$ 进行 m 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m a\ b\ c_1\cdots c_n$，再将 b 向左依次与 $a,b_m,\cdots,b_1$ 进行 $m+1$ 次相邻对换，即可将原排列变成 $a_1\cdots a_l b\ b_1\cdots b_m a\ c_1\cdots c_n$。由此可以看出，进行一次不相邻对换，可以通过进行 $2m+1$ 次相邻对换来实现。显然，奇数次相邻对换的结果，最终改变排列的奇偶性。

综合(1)(2)可得，对换改变排列的奇偶性。

§1.2 n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式定义之前，先观察一下二阶、三阶行列式定义的特点。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

(1)二阶行列式是两个元素乘积的代数和，三阶行列式是三个元素乘积的代数和；

(2)每个乘积都是由位于不同行、不同列上的元素构成的；

(3)展开式由所有可能的乘积组成。

n 阶行列式的定义也具有上述特点。

定义 1.5 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和。这里 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项都按下列规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，带正号；否则，带负号。

用数学式子表示如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $j_1j_2\cdots j_n$ 的所有 n 阶排列求和，故 n 阶行列式共有 $n!$ 项。显然，当 $n=1$ 时，一阶行列式等于元素本身。

由于行标与列标的位置是对称的，于是定义也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

利用行列式的定义来计算 n 阶行列式，当 n 较大时是非常复杂的。只有一些特殊的行列式，可以利用定义来计算，举例如下：

〔例 1〕 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值。

其中 $a_{ij}=0$，当 $i<j$ 时，且 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$。

〔解〕 D 是 n 阶行列式，有 $n!$ 项，但 D 中有很多元素都是零，现在考察哪些项不为零。第一行只有 $a_{11}\neq 0$，因为行列式的项是取自不同行、不同列的元素，故将第一行第一列划去，不再取其中的元素。那么，第二行只能取 $a_{22}\neq 0$，依此类推。即 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$这一项不为零，其它项均为零，又由于 $t(1\ 2\ \cdots\ n)=0$，符号为正，于是可得 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

此行列式我们称之为下三角形行列式。

同理，上三角形行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，$a_{ij}=0(i>j)$.

由此可得，上、下三角形行列式等于主对角线(左上角到右下角)上的元素的乘积。

特殊情形：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，而 $a_{ij}=0(i\neq j)$。这种行列式我们称之为对角形行列式。

〔例 2〕 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

其中当 $i+j\leqslant n$ 时，$a_{ij}=0$；当 $i+j=n+1$ 时，$a_{ij}\neq 0$。

〔解〕 与例 1 类似，只有副对角线(右上角到左下角)上的元素的乘积 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项不为 0，所不同的是关于符号的讨论。其列标排列的逆序数为 $t[n(n-1)\cdots 321]=\frac{1}{2}n(n-1)$，所以 $D=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$.

§1.3 n 阶行列式的性质

为了计算行列式并运用行列式这一工具，我们首先讨论行列式的性质。

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等，

$$即 \qquad D=D^T.$$

〔证明〕　将行标按自然顺序排列

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n};$$

将列标按自然顺序排列

$$D^T=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}.$$

因为 $j_1j_2\cdots j_n$ 和 $i_1i_2\cdots i_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 阶排列，且 D 和 D^T 都是对它们的所有 n 阶排列求和，所以 $D=D^T$。

因有性质 1，故一切性质对行列同样适用。

性质 1.2　用数 k 乘以行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘以此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

〔证明〕

$$\begin{aligned} 左 &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots ka_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= 右。\end{aligned}$$

此性质也可以说，行列式中某一行(列)元素的公因子可

以提到行列式符号的外面。

在性质 1.2 中，如果取 $k=0$，即可得推论：如果行列式中有一行（列）元素全为 0，则行列式等于 0。

性质 1.3　若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则原行列式等于两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

〔证明〕

$$\begin{aligned}\text{左} &= \sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_n}(-1)^{t(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &\quad+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右}。\end{aligned}$$

显然性质 1.3 可推广到某一行（列）为多个数之和的情形。

推论　若行列式的某一行（列）的元素都是 m 个数的和，则原行列式等于 m 个行列式的和。

性质 1.4　互换行列式两行（列），行列式改变符号。即

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i) \\ , \\ (k) \\ \\ \\ \end{matrix}$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=-D_1$.

〔证明〕 令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1l} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{il} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kl} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nl} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $p\neq i,k$ 时，$a_{pq}=b_{pq}$；

当 $p=i,k$ 时，$a_{iq}=b_{kq}$，$a_{kq}=b_{iq}$.

$$\begin{aligned} D_1 &= \Sigma(-1)^{t(q_1\cdots q_i\cdots q_k\cdots q_n)}b_{1q_1}\cdots b_{iq_i}\cdots b_{kq_k}\cdots b_{nq_n} \\ &= \Sigma(-1)^{t(q_1\cdots q_i\cdots q_k\cdots q_n)}a_{1q_1}\cdots a_{kq_i}\cdots a_{iq_k}\cdots a_{nq_n} \\ &= \Sigma(-1)^{t(q_1\cdots q_i\cdots q_k\cdots q_n)}a_{1q_1}\cdots a_{iq_k}\cdots a_{kq_i}\cdots a_{nq_n} \end{aligned}$$

$$=-\Sigma(-1)^{t(q_1\cdots q_k\cdots q_i\cdots q_n)}a_{1q_1}\cdots a_{iq_k}\cdots a_{kq_i}\cdots a_{nq_n}$$

$$=-D.$$

所以，$D=-D_1$.

性质 1.5　如果行列式中有两行(列)对应元素相等，则行列式等于零。

〔证明〕　设行列式为 D，将相同的两行(列)交换位置，根据性质 1.4，有 $D=-D$，所以 $D=0$。

性质 1.6　行列式中如果有两行(列)对应元素成比例，则行列式等于零。

根据性质 1.2，性质 1.5 易得证。

性质 1.7　把行列式某一行(列)的 l 倍加到另一行(列)上去，行列式值不变。

根据性质 1.3，性质 1.6 易得证。

以上诸条性质及它们的推论，是我们进行行列式计算的主要依据。

〔例 1〕　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$.

〔解〕　因为 D 中第一列与第二列成比例，根据性质 6，所以 $D=0$。

计算行列式时，通常利用行列式的性质，把它化成上三角形行列式来计算。

〔例 2〕计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

〔解〕