421

中興經營管理叢書

線 型 規 劃

—理論與應用—

(增訂版)

LINEAR PROGRAMMING

(THEORY AND APPLICATIONS)

葉 若 春 博士 編著

中 興 管 理 顧 問 公 司
發 行

中興經營管理叢書

線 型 規 劃

—理論與應用—

（增訂版）

LINEAR PROGRAMMING

(THEORY AND APPLICATIONS)

葉 若 春 博士編著

中 興 管 理 顧 問 公 司
發 行

中華民國五十八年十月初版
中華民國五十九年九月再版
中華民國六十四年八月增訂三版
中華民國六十九年一月增訂八版

中興經營管理叢書

線 型 規 劃

精裝本實價新台幣二百元整

編著者 葉 若 春

發行者 中興管理顧問公司
台北市民生東路六十六號
新力大樓五樓
電話：5616356 • 5616357
郵政劃撥儲金戶第 100952 號

印刷者 大嘉印刷事業有限公司
台北市松江路二九三號三〇九室
電話：5119576・5619012

行政院新聞局出版事業登記證：局版台業字第0040號

自　序

線型規劃在短短二十餘年間，不論理論與應用上，均發展神速，在軍事，農業，交通，運輸方面皆可應用，尤以工商企業界爲最。線型規劃係在線型不等式限制條件下，求解線型目標函數，限制條件可代表吾人有限之資源，目標函數則表示吾人預定之目標，故線型規劃，可供經理人員作爲執行決策之參考。

自 1947 年George B. Dantzig 等人員，爲美國空軍總部解決軍事計劃時，而獲得線型規劃之範式及求解之單純法 (Simplex Method) 後，美國空軍特設 SCOOP專案 (Scientific Computation of Optimum Programs)，研究線型規劃在軍事上之應用。在初期，線型規劃主要應用於企業界相互經濟關係之Leontief 氏輸入輸出模式 (Input - output Model) 及競局理論 (Game Theory) 中。惟在單純法前，如Hitchcook 氏 (1941)及Koopmans 氏 (1947) 已分別獨立解出運輸問題。自線型規劃問題於 1952 年初，由電子計算機獲得求解後，應用範圍迅即展開，且大型線型規劃問題，均可於短促時間內獲解，足爲各界所樂用。

線型規劃問題通常可分爲理論，計算與應用三方面敘述之，本書內容即按此編排，第一章介紹規劃之形式與簡單實例，第二章說明圖解法，並用以探悉線型規劃解答之各項性質，第三章複習所需基本數學，第四章第五章分別敘述各類解答之性質及理論分析，以建立理論基礎。第六章說明表列之求解——單純法，第七章介紹兩種單純法之變異——修正單純法與對偶單純法。第八章說明線型規劃之原始 (Primal) 與對偶 (Dual) 問題，第九章介紹最佳解敏度分析 (Sensitivity Analysis) 及模數線型規劃 (Parametric Linear Programming)。因運輸問題與指派問題，均爲線型規劃之特殊情形，故分別說明於第十及第十一章中。第十二、十三章介紹變數上限問題(Upper-

Aug 4 '71

bound Problem)，整數線型規劃(Integer Linear Programming)及分群原理(Decomposition Principle)，均係線型規劃擴充之技術，最後於第十四章介紹線型規劃之應用問題。且於每章末後，附以習題，藉供讀者練習。

美國大學部工業工程系，已將線型規劃列爲必修課程，而今國內方面，中正理工學院工業工程系自本學年起已修訂爲必修，中原理工學院亦早已列爲選修。本書之編著，藉供大學部工業工程系或商學院研究所"線型規劃"課程教科書之用，如每週講授三小時，可於一學期授畢。倘時間不足，可先按第一至第六章、第八章、第十、十一、十四章，講授線型規劃之重點，其次再按第七、九、十二及十三章次序講授。讀者如對矩陣以及凸集等均已熟習，則第三章可省略不授。本書亦可供各專業訓練班之教材，訓練班可分爲初級、高級兩班，初級以一至六章，第十、十一章及十四章部份爲主，而高級班以七、八、九、十二、十三及十四等章繼續講授，但亦可按本書章節，合併一次授畢。

本書第三章，特列所需基本數學之介紹，僅需具有大代數或線性代數基礎者，即可自行參閱，亦無困難，故本書亦可提供各界經理及技術人員之參考，俾使線型規劃之技術，應用於各類實際問題中。

本書之出版，承蒙中國生產力及貿易中心高總經理禩瑾賜序，中山科學研究院計劃處劉處長元發之指導及全處同仁之鼓勵，又蒙大嘉打字印刷公司之製版印裝，謹此一併深誌感忱。

筆者學識淺陋，錯誤難免，敬祈專家先進暨讀者賜予指正，不勝感幸。

葉若春 謹識

中華民國五八年十月三日

目　　次

第一章 緒 論

§ 1-1 線型規劃(Linear Programming)問題

吾人執行一項工作時，均先樹立目標，經衡量現有資源即人力、物力、財力後，訂定可行辦法，稱之爲實施計劃，惟計劃之良窳，實賴於優良之決策。例如某公司可生產數種產品，惟如何運用現有資源以爭取最大利潤之目標，實賴於優良之決策——決定生產何種產品，然後始能訂定生產計劃。誠然，憑經驗判斷而定之決策，有時即爲最優者，惟鮮能萬事均達盡善盡美之境。

線型規劃問題係利用數學方法求解前項優良決策工具之一，且其應用範圍較任何其他方法爲廣，又因其解法——**單純法**(Simplex Method) 有其一定之規則可資遵循，即使不解其原理，任何人均可循規而求出答案，自電子計算機問世後，線型規劃問題更可由計算機解出，故工業界均樂於應用，不無因也。

線型規劃，顧名思義係解決線型方面之問題，亦即變數爲一次式者，例如 $3x_1+2x_2-5x_3$ 爲線型，而 $x_1x_2+2x_3+4x_4$ 及 $x_1^2+3x_2$ 等式均爲二次式或其他三次或以上者均屬非線型。

以數學公式對線型之定義則可列出如下：

(1) $f(kX)=kf(X)$

(2) $f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2)$

合於上二式之函數稱之謂線型，否則均屬非線型，例如

$f(X)=\dfrac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}$ 雖合於(1)式，然不合於(2)式，仍屬非線型。

§ 1-2 線型規劃簡單實

某傢俱公司可生產四種辦公桌，均需經過木工工廠及油漆工廠始

能完成，各辦公桌經各工廠所需人工小時如下表所列：

辦公桌 \ 工廠	A	B	C	D
木工工廠	4	9	7	10
油漆工廠	1	1	3	40

又設木工工廠及油漆工廠目前之可用人工小時數分別爲6000 及4000人工小時，倘辦公桌A,B,C,D之利潤各爲12,20,18及40元，假定該公司不擬擴展人力，在原料能充份供應下及出產產品均可銷售情況下，試告應生產辦公桌之種類及數量，始可獲得最大利潤之目標？

設各類辦公桌之生產數量分別爲x_A, x_B, x_C, x_D,

吾人之目標爲求總利潤最大，故應求$12x_A+20x_B+18x_C+40x_D$之總和爲最大，以數式表之則爲

$$\text{Max. } f(x)=12x_A+20x_B+18x_C+40x_D$$

由此式可知各x之數愈增則其利潤愈大惟x_A, x_B, x_C, x_D均不可能任意增加，因各工廠之可用人工小時不得超過6000及4000人工小時，故在前式之目標下，吾人尙須對其變數x加以限制，其限制條件應爲

$$(1)\quad 4x_A+9x_B+7x_C+10x_D \leqq 6000$$
$$(2)\quad x_A+x_B+3x_C+40x_D \leqq 4000$$

又因各類辦公桌之答案不能爲負數，故尙須限制

$$x_A, x_B, x_C \text{ 及 } x_D \text{ 均須} \geqq 0$$

綜結前述，本題若以線型規劃問題之形式表之則爲

$$\text{Max. } f(x)=12x_A+20x_B+18x_C+40x_D$$

$$\text{Subject to: } 4x_A+9x_B+7x_C+10x_D \leqq 6000$$

$$x_A+x_B+3x_C+40x_D \leqq 4000$$

$$x_A, x_B, x_C, x_D \geqq 0$$

式中 Subject to 表示各變數 x 受下列各條件之限制。

倘原料不能充份供應，設各辦公桌所需原料分別爲4,5,8,15單位，而該公司每月所能獲取之原料設爲 30000 單位，則吾人又可列出另一限制條件爲：

$$4x_A+5x_B+8x_C+15x_D \leqq 30000$$

將此限制條件合併前述式子內即可。

又若辦公桌D依銷售預測每月僅可能銷售 50 張，則需加入另一限制條件 $x_D \leqq 50$ 即可。

本題之答案，在此不予列出，待後即可知其解法。

§ 1-3 線型規劃之性質及其形式

由以上之簡單實例，可知線型規劃有其下列之性質：

(1) 目標之確定：例如上節之求取最大利潤是，或有時求取其最小值，此在線型規劃中稱之曰**目標函數**(Objective Function) 而此函數必須爲線型，即上節中之

$$\text{Max. } f(x)=12x_A+20x_B+18x_C+40x_D$$

一般之通式，目標函數可書爲

$$\text{Max. or Min. } f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$$

其中 x 爲變數而 c 則爲已知之係數，讀者當可了解 c 不能爲變數，否則目標函數將屬非線型，通常 c 稱之曰**價值係數**(Price Coefficients) 且其中 c 之值可正可負。

欲證明$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 爲線型甚易，因

$f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$，則

$$f(kx)=c_1(kx_1)+c_2(kx_2)+\cdots+c_n(kx_n)$$

$$=k(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)=kf(x)$$

又令x_A代表$x_{11},\cdots x_{1n}$之值，x_B代表$x_{21}\cdots x_{2n}$之值，則

$$f(x_A)=c_1x_{11}+c_2x_{12}+\cdots c_nx_{1n} \text{ 及}$$

$$f(x_B)=c_1x_{21}+c_2x_{22}+\cdots c_nx_{2n}$$

得$f(x_A+x_B)=c_1(x_{11}+x_{21})+c_2(x_{12}+x_{22})+\cdots+c_n(x_{1n}+x_{2n})$

$$=(c_1x_{11}+c_2x_{12}+\cdots+c_nx_{1n})+(c_1x_{21}+c_2x_{22}+\cdots+c_nx_{2n})$$

$$=f(x_A)+f(x_B)$$

由上可知目標函數之通式確屬線型

(2) 一組線型之限制條件：例如上節中之$4x_A+9x_B+7x_C+10x_D \leqq 6000$及$x_A+x_B+3x_C+40x_D \leqq 4000$是，其一般通式則爲$m$個線型之限制條件如下式：

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots\cdots\cdots + & a_{1n}x_n & \leqq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots\cdots\cdots + & a_{2n}x_n & \leqq & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots\cdots\cdots + & a_{mn}x_n & \leqq & b_m
\end{array}$$

其中$a_{11},a_{12},\cdots a_{1n},\cdots,a_{m1},\cdots a_{mn}$稱之曰**常係數**(Constant Coefficient)，又$b_1,b_2\cdots b_m$即簡稱之曰**常數**(Constant)，常係數與常數均可正可負，而m個線型之限制條件統稱之爲**結構限制條件**(Structural Constraints)。

當然所有常係數與常數均須爲已知，而且讀者亦可自證其m個限

制條件均屬線型，又 m 個限制條件之每一方程式中，均須表示其獨特之性質，例如

$$2x_1+3x_2 \leqq 6$$
$$4x_1+6x_2 \leqq 12.$$

兩限制條件，則可歸納成一個方程式，即一個限制條件即足。

(3) 變數爲正：例如上節中所有 x_A, x_B, x_C，及 x_D 均須爲正或零，稱之曰**非負數限制條件**(Non-negative Constraints)，而其通式則爲

$$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n \geqq 0$$

由上所述，吾人可將線型規劃問題，列出其通式如下：

$$\text{Max. or Min } f(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{aligned}\text{Subject to : } & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n \leqq b_1\\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n \leqq b_2\\ & \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\ \vdots\\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n \leqq b_m\\ & x_1, x_2, \cdots\cdots x_n \geqq 0\end{aligned}$$

上述之通式，倘在結構限制條件中方程式兩邊俱乘－1，則 $\leqq$ 可變成 $\geqq$，又如在不等式中，加上或減去一正值變數，則可將不等式改爲等式，故可知上述形式即已代表線型規劃之一般通式。

在此通式中，吾人又須注意者，即目標函數或結構限制條件，不論變數如何變大或減小，仍屬線型，亦即含有成正比（Proportionality）及所有項目可相互累加（Additivity）之假定。

由上述之通式，初步之想法，可任意湊出合於結構限制及非負數限制條件下之一組 n 個變數之值，倘能確定僅能獲得一組之值，則不

論目標函數爲極大或極小，此組值卽爲所求之答案，倘能湊出數組合於限制條件之值，則吾人可將此數組值分別代入目標函數中，比較後以求得其解，惟通常合於限制條件之組值爲無窮多，故此種方法通常爲不可行。

從另一方面觀察，可能限制條件之方程式相互矛盾，故可知線型規劃問題亦可能無解。或合於限制條件之某變數或數變數之值達於無窮大，則目標函數亦隨之無窮大或爲無窮小，當視其對應價值係數分別爲正或負而定。

又從上述通式中，吾人可察知當常係數及常數俱爲正數，倘目標函數爲求極小值時，則顯而易見所有變數俱爲零，雖問題有解，對吾人却失去其實際意義。

通常吾人解線型規劃問題時，卽係設法在無窮多組之答案下，取出一組值，適爲吾人所欲尋覓目標函數之極大或極小值，亦卽在許多可行之實施方案中，在人力、財力、物力種種限制條件下，獲得吾人最優之決策，以達成目標。

在實際問題中，列出線型規劃問題前，吾人必須確定所有價值係數，常係數及常數之值，有時，此種數值極易獲得，惟有時蒐集此項數值，却頗費時力。

§ 1-4 應用實例簡介

例一. 擬生產三種不同合金的線圈，線圈每 400 呎重 4 噸，試問在機器能量與未來銷售量之限制下，如何決定各種合金之生產量，以求得最大的利潤。其生產流程圖如下：