高等学校试用教材

数学分析

(卷 III)

秦曾复 朱学炎 编

高等教育出版社

高等学校试用教材

数学分析

卷 III

秦曾复 朱学炎 编

高等教育出版社

内容提要

本书为综合大学力学专业的数学基础课教材. 全书分三卷出版，本书为卷 III.

内容包括：偏导数及雅可比阵，隐函数的理论与应用，含参变量积分，重积分，曲线积分和曲面积分，数量场和向量场.

本书与数学系的数学分析相比较，在原则上不降低数学要求的同时，增加了数学的基本概念与物理原型之间的联系以及侧重于数学在实际中的应用并适当地扩大知识面. 因此，本书除可作为力学专业的基础课教材外，还可供物理类各专业、应用数学专业及数学类其它各专业的学生和教师使用.

(京)112号

高等学校试用教材

数学分析

卷 III

秦曾复　朱学炎　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 9.5　字数 220 000

1992年 5 月第 1 版　1992年 5 月第 1 次印刷

印数 0001—930

ISBN7-04-003479-4/O·1053

定价 3.45元

卷 III 目 录

第12章　偏导数及雅可比阵

现在，我们开始讨论多元函数的微分．先讲偏导数，再讲全微分．最后，作为向量值函数的导数，引进雅可比阵．

§1　偏导数与全微分

对于二元函数

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in\mathscr{D},$$

如果固定其中的一个自变量，譬如说 $y\equiv y_0$，那末因变量 z 实际上是自变量 x 的一元函数，从而可以求出这个一元函数的导数，这就是一个偏导数．

偏导数　设 n 元函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathscr{D},$$

在点 $P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 的近旁，固定 $x_2\equiv x_2^{(0)},\cdots,x_n\equiv x_n^{(0)}$；单独地给 x_1 一个改变量 Δx_1．如果存在极限

$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})-f(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})}{\Delta x_1},$$

则称函数 f 在点 P_0 关于 x_1 可偏导，记为

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=f_{x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}),$$

其中左边的$\dfrac{\partial y}{\partial x_1}$是因变量 y 关于自变量 x_1 偏导数的记号，右边的 $f_{x_1}(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 是上述极限，叫做偏导数值．

类似地，可以定义$\dfrac{\partial y}{\partial x_2},\cdots,\dfrac{\partial y}{\partial x_n}$等等．如果，在一个范围(区域)

内点点有偏导数，则形成偏导函数的概念．例如

$$\frac{\partial y}{\partial x_{i_0}}=f_{x_{i_0}}(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathscr{D}.$$

从数量关系来分析，偏导数是因变量关于个别自变量的变化率，在这个意义上它也可以叫做部分导数．

例如，气体状态方程

$$p=\frac{RT}{V}.$$

当我们考察压力 p 关于体积 V 的变化率时，相当于将温度 T 视为常量，只对 V 求导：

$$\frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2}.$$

$\frac{\partial p}{\partial V}<0$ 说明，在等温过程中，压力增大，体积就要缩小；反之，压力减小，气体体积则会相应地膨胀．

通常，计算偏导数可以采用一元函数的求导办法．例如，对于二元函数

$$f(x,y)=e^{x^2y}\sin(x^2+2y^3),$$

将 y 视为常量，关于 x 求导，即得

$$f_x(x,y)=2xye^{x^2y}\sin(x^2+2y^3)+2xe^{x^2y}\cos(x^2+2y^3);$$

同样地，将 x 视为常量，关于 y 求导，则得

$$f_y(x,y)=x^2e^{x^2y}\sin(x^2+2y^3)+6y^2e^{x^2y}\cos(x^2+2y^3).$$

从几何上看，二元函数

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in\mathscr{D}$$

表现为一张曲面；$y\equiv y_0$ 是一张平面．再者，

$$\begin{cases}x=x,\\ y=y_0,\\ z=f(x,y_0)\end{cases}$$

是用单参数 x 表示的一条曲线. 它是一条平面曲线，落在平面 $y=y_0$ 上. 这条曲线切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦记为 $\cos(\boldsymbol{\tau},x)$，$\cos(\boldsymbol{\tau},y)$，$\cos(\boldsymbol{\tau},z)$. 显然，$\cos(\boldsymbol{\tau},y)=0$；并且 $\cos(\boldsymbol{\tau},x):\cos(\boldsymbol{\tau},z)=1:fx$. 所以，这条曲线当 $x=x_0$ 时的切向量 $\boldsymbol{\tau}=(1,0,f_x(x_0,y_0))$. 也就是说，偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 的几何意义仍然是曲线切线的斜率(图12-1).

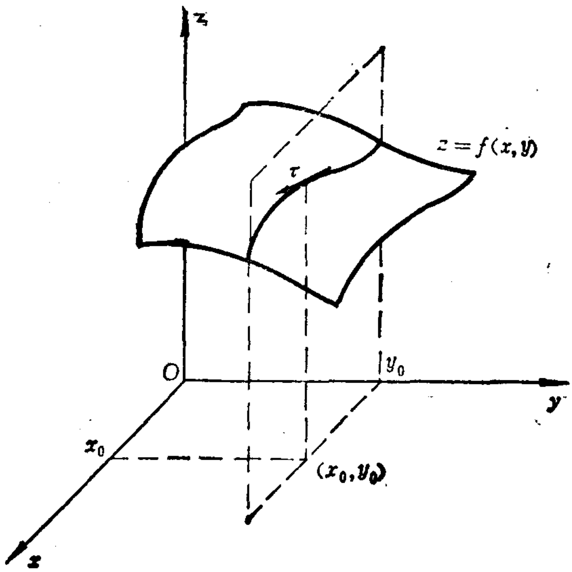

图 12-1

我们记得，对于一元函数来说：可导必定连续；连续未必可导. 那末，就多元函数而言，可偏导与连续的关系如何呢？

定理 1 如果二元函数 f 在点 (x_0,y_0) 关于 x 可偏导，则 f 在点 (x_0,y_0) 具有关于 x 的连续性：

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x,y_0)=f(x_0,y_0).$$

证明 按偏导数定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f_x(x_0,y_0).$$

此即

$$f(x_0+\Delta x, y_0)=f(x_0, y_0)+f_x(x_0, y_0)\Delta x+o(\Delta x).$$

由此得出

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0)=f(x_0, y_0).$$

证毕.

一般地,函数关于哪一个自变量可偏导,则它具有关于该自变量的连续性.

值得注意,尽管函数关于它的每一个自变量可偏导,仍然得不出总体上的连续性.

例

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

不难计算

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x, 0)-f(0,0)}{\Delta x}=0.$$

同样地,

$$f_y(0,0)=0.$$

就是说,在原点$(0,0)$, f关于x可偏导并且关于y可偏导.

但沿不同的射线

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2}=\frac{m}{1+m^2},$$

这说明f在原点$(0,0)$不连续.

此外,连续性不足以保证可偏导.

例

$$f(x, y)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}.$$

显然,f在原点$(0,0)$连续,但在这一点关于x和关于y皆不可偏导.

综上所述，对于多元函数来讲：关于哪个自变量可偏导必有关于该自变量的连续性；关于每一个自变量可偏导还不一定具有多元函数的连续性；连续未必可偏导.

可微性与全微分

相对于偏导数，就有全微分概念. 先象一元函数那样，对可微性下定义.

二元函数

$$z=f(x,y)$$

在点(x_0,y_0)如果就自变量 x 和 y 任意的改变量 Δx 和 Δy，其因变量 z 相应的改变量 Δz 总能分解成两个部分：自变量改变量的线性部分 $A\Delta x+B\Delta y$ 和高阶部分 $o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，即有

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),\end{aligned}$$

那末称 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)可微. 否则，就叫做不可微.

显然，从上述定义直接得出：可微⇒连续. 进一步还有：可微⇒可偏导. 事实上，设二元函数 f 在点(x_0,y_0) 可微，于是，由 Δz 的表达式，当固定 y 时就有

$$\begin{aligned}f_x(x_0,y_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=A.\end{aligned}$$

类似地，有

$$f_y(x_0,y_0)=B.$$

由此可见，在 f 可微的前提下，线性部分中的两个系数必定是 f 的两个偏导数. 这样，在 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 的情况下，就有 f 在点(x_0,y_0)的全微分表达式

$$dz=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy.$$

例如，对于

$$z=e^{x^2y}\sin(x^2+2y^3),$$

它的全微分是

$$dz=2xe^{x^2y}[y\sin(x^2+2y^3)+\cos(x^2+2y^3)]dx$$
$$+e^{x^2y}[x^2\sin(x^2+2y^3)+6y^2\cos(x^2+2y^3)]dy.$$

下面的两个例子，说明不可微情况.

因为对于一元函数：可微$\Leftrightarrow$可导，所以自然会问对于多元函数：可微$\Leftrightarrow$可偏导？上面已经指出：可微$\Rightarrow$可偏导．但反之不然：可偏导$\nRightarrow$可微.

例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

前面曾经计算过

$$f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0.$$

可是

$$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]$$
$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\neq o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

即 f 在点$(0,0)$不可微.

这个例子表明，f 在点(x_0,y_0)关于 x 和关于 y 皆可偏导，不足以保证 f 在点(x_0,y_0)可微.

读者也许记得，上面例子中的函数 f 在点$(0,0)$ 是不连续的．因此可能提出这样的问题：f 在点(x_0,y_0)连续，并且关于 x 和关于 y 皆可偏导，能得出 f 在点(x_0,y_0) 的可微性吗？不能．试看下面例子.

例

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

容易验证，f在点$(0,0)$连续，$f_x(0,0)=0$ 和 $f_y(0,0)=0$，但 f 在点$(0,0)$不可微.

通常，为了保证可微性，有如下的充分条件.

定理 2　如果函数 f 在点(x_0, y_0) 的近旁可偏导，并且偏导函数 $f_x(x,y)$和 $f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，那末 f 在点(x_0,y_0) 可微.

证明　按照可微性定义，借助于一元函数的微分中值定理，有

$$\begin{aligned}
&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\
&=[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)]\\
&\quad+[f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\\
&=f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\\
&\hfill 0<\theta_1, \theta_2<1.
\end{aligned}$$

因为 f_x 和 f_y 在点(x_0,y_0)连续，所以当$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$ 时成立

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+o(1),$$

$$f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+o(1).$$

由此得出

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y +o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

即 f 在点(x_0,y_0)可微. 证毕.

值得指出的是，偏导函数连续是可微的充分条件，并非必要.

例

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

请读者验证，f_x 和 f_y 在点$(0,0)$不连续，但 f 在点$(0,0)$可微.

高阶偏导数与高阶全微分

设二元函数

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in\mathscr{D}$$

有偏导函数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)\text{和}\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y),\quad (x,y)\in\mathscr{D}.$$

它们仍然是 x, y 的函数，所以又可以求它们的偏导数，于是产生高阶偏导数.

二阶偏导数，有以下四种：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_x(x,y)=f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y)=f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}f_y(x,y)=f_{yy}(x,y).$$

这里特别要注意的是两个混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. 前者是先关于 x 求偏导再关于 y 求偏导；后者是先关于 y 求偏导再关于 x 求偏导. 偏导的次序颠倒了，结果可能不相同.

例如，

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

首先，两个一阶偏导函数为

$$f_x(x,y)=\begin{cases} y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

然后，计算两个混合偏导数：

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(0,0+\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=-1;$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y(0+\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=1.$$

这提醒我们，一般地说在混合偏导数中偏导算子$\frac{\partial}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial y}$不可交换.

为了保证偏导算子可交换，即两个混合偏导数相等，有如下的定理：

定理 3 如果 f_{xy} 和 f_{yx} 在(x_0, y_0)连续，那末成立

$$f_{xy}(x_0, y_0)=f_{yx}(x_0, y_0).$$

证明 引进辅助函数

$$\varphi(x)=f(x, y_0+\Delta y)-f(x, y_0),$$

于是

$$\begin{aligned}&[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)]-[f(x_0, y_0+\Delta y)\\&\quad -f(x_0, y_0)]\\&=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x\\&=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)]\Delta x\\&=f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,\quad 0<\theta_1, \theta_2<1.\end{aligned}$$

再引进辅助函数

$$\psi(y)=f(x_0+\Delta x, y)-f(x_0, y),$$

从而

$$\begin{aligned}&[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)]-[f(x_0+\Delta x, y_0)\\&\quad -f(x_0, y_0)]\\&=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y\\&=[f_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)-f_y(x_0, y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y\\&=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y,\quad 0<\theta_3, \theta_4<1.\end{aligned}$$

由此得出，

$$f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y).$$

利用连续性，结果是

$$f_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x,y_0+\theta_3\Delta y)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

证毕.

作为习题，请读者证明施瓦茨定理：若 f_{xy} 在点(x_0,y_0) 连续，f_{yx} 在点(x_0,y_0)存在，则成立 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

在数学物理问题中，通常不加声明地假设混合偏导数连续，因此不计求导次序，譬如$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}$就概括了六种不同次序的四阶混合偏导数：$f_{xxyy}$，$f_{xyxy}$，$f_{xyyx}$，$f_{yxxy}$，$f_{yxyx}$ 以及 f_{yyxx}.

关于高阶全微分，总的观念同一元函数一样：一阶微分的微分是二阶微分. 以此类推. 并且总是规定：自变量的高阶微分为零.

设二元函数

$$z=f(x,y).$$

它在具有连续偏导函数 f_x 和 f_y 的情况下，必定可微，用抽象一点的符号表示为：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

现在假设所有的二阶偏导函数 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx} 以及 f_{yy} 皆连续，因此上式再次可微，注意自变量 x 和 y 的二阶微分为零：$d^2x=0$，$d^2y=0$，于是有

$$d^2z=d(dz)=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$$

$$=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy$$