全国各类成人高等学校招生考试专用教材

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》配套教材

目标经典教材系列

Classic Textbook Series

Advanced Mathematics (II)

高等数学

专科起点升本科

含解题指导

With tips to problems

（二）

主编 何怡生

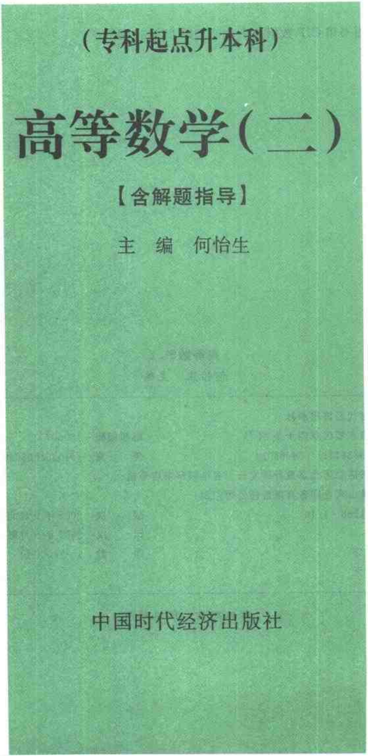
最新版

中国时代经济出版社

目标经典教材系列

全国各类成人高等学校招生考试专用教材

《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》配套教材



图书在版编目(CIP)数据

高等数学.2/何怡生主编.—北京:中国时代经济出版社,2002.9
全国各类成人高校(专升本)招生考试专用教材
ISBN 7—80169—293—4

Ⅰ.高… Ⅱ.何… Ⅲ.高等数学—成人教育:高等教育—升学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第067468号

高等数学.2

何怡生 主编

出 版	中国时代经济出版社		
地 址	北京市东城区东四十条24号	邮政编码	100007
电 话	(010)88361317 64066019	传 真	(010)64066026
发行经销	新华书店总店北京发行所发行 各地新华书店经销		
印 刷	北京泰山兴业印务有限责任公司印刷		
开 本	850×1168 1/16	版 次	2002年9月北京第1版
印 张	16	印 次	2002年9月第1次印刷
字 数	395千字	印 数	1—10000册
定 价	24.00元		

说　明

为了使考试科目的设置更加适应成人高等教育的特点,有利于提高成人高校招生的生源质量及今后的培养,有利于考试的组织和管理,教育部决定从2003年起,对现行全国成人高校招生考试科目设置做进一步的调整。

专科起点升本科统考科目按学科门类设置,不再按生源类别设置。统考科目为政治、外语和1门专业基础课。专业基础课根据各学科门类的特点设置8门,由招生院校按专业的需要规定考生应试其中一门(见下表)。各门试题满分为150分,考试时间为150分钟。

专科起点升本科各学科门类考试科目设置一览表

<table>
<tr><th rowspan="2">报考学科门类以及一级学科</th><th colspan="2">统一命题考试科目</th><th rowspan="2">专业课</th></tr>
<tr><th>公共课</th><th>专业基础课</th></tr>
<tr><td>哲学、文学(艺术类除外)、历史学以及中医学类(一级学科)</td><td rowspan="8">政治
外语</td><td>大学语文</td><td rowspan="8">由招生院校自定</td></tr>
<tr><td>艺术类(一级学科)</td><td>艺术概论</td></tr>
<tr><td>工学、理学(生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类等四个一级学科除外)</td><td>高等数学(一)</td></tr>
<tr><td>经济学、管理学以及职业教育类、生物科学类、地理科学类、环境科学类、心理学类、药学类等六个一级学科</td><td>高等数学(二)</td></tr>
<tr><td>法学</td><td>民法</td></tr>
<tr><td>教育学(职业教育类一级学科除外)</td><td>教育理论</td></tr>
<tr><td>农学</td><td>生态学基础</td></tr>
<tr><td>医学(中医学类、药学类等两个一级学科除外)</td><td>医学综合</td></tr>
</table>

同时,教育部于2002年8月颁布了新的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》,新大纲从考试内容、题型、命题方向等方面都作了一系列重大调整。

本套教材正是在这种背景下重新编写的,并改由中国时代经济出版社出版。

本套教材于1998年首次出版,其间经过4年的反复修订,质量不断提高。由于其独具的特点和风格,深得广大师生的好评和认可,成为最畅销的专升本复习教材之一。

由于科目调整和大纲变化较大,我们对所有科目都进行了重新编写。使各科充分体现新大纲要求的"着重考查考生的基本素质、注重考查考生对基础知识的把握和分析问题、解决问题的实际能力……"。

重编后的《高等数学(二)》具有如下特点:

1. 紧扣高等数学(二)复习考试大纲。全书以章为单位,按照考试大纲所提出的不同层次的要求进行编写,覆盖了全部考试知识点。因此,它可以作为一本复习考试可信赖的教科书。

2. 每一章,作者既有对知识要点的系统性讲解,又有典型例题的解题指导,还设计编写了适当的"思考与练习",并附有"提示与答案",从而帮助考生系统又全面地学习所学知识。这本书的可

操作性强。

3. 本书最后给出了两套综合测试题及参考答案，可以帮助考生做好应试复习。

4. 本书还附有教育部制订《高等数学（二）》标准样卷和专升本[高等数学（二）]复习考试大纲。

此外，为了直观地突出重点、难点，我们采用双色印刷的新颖形式；并采用了新的教材开本，便于考生翻阅学习。

本书作为专升本复习考试——高等数学（二）的教材，既可以被用作教师对考生进行辅导的教科书，也可以供考生自学使用。

本书由何怡生教授主编，参与本书编写工作的还有史炳星和刘加霞同志。本书的编写者多年来一直从事专升本考前辅导工作，具有丰富的教学经验。

为了把本书编写的更好，敬请数学学科的专家和广大师生批评指正，待再版时进一步修订完善。

编　者

2002 年 9 月

目　录

第一章　函数、极限和连续

§1　函　　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义　设x,y是某一变化过程中的两个变量.如果对于实数集D中的每个值x,变量y依照某一规律f总有惟一确定的值与之对应,则称变量y为x的一个函数,记为

$$y = f(x)$$

其中x称为自变量,y称为因变量或函数.自变量的取值范围D称为函数的定义域,记为$D(f)$;函数值的集合称为函数的值域,记为$Z(f)$.

函数定义表明,对应规律与定义域是函数定义的两个要素.对应规律是用记号$f(\ )$来表示的.当自变量x取某一定值a时,函数$y=f(x)$的对应值记为$f(a)$,有时也记为$y|_{x=a}$.关于函数的定义域,可分两种情况讨论:在实际问题中,函数的定义域由问题的实际意义来确定;当函数只由解析表达式给出时,它的定义域就是使表达式有意义的自变量所取的值的集合,这时定义域往往省略不写.二要素确定以后,函数关系完全确定.

两个函数相等的充分必要条件是它们的对应规律和定义域都相同.

例如$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$,$g(x)=x+2$就是两个不同的函数.这是因为(1)对应规律不同:尽管当$x\neq 2$时,$f(x)=g(x)=x+2$,但当$x=2$时,$f(x)$没有对应值,而$g(x)$有对应值$g(2)$;(2)定义域不同:$f(x)$的定义域为$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$,而$g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

2. 函数的表示法

常用的函数表示法有解析法,列表法和图象法.

(1) 解析法(公式法)

对自变量和常数施加四则运算、乘方、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式.用解析表达式表示两个变量之间的函数关系的方法称为解析法.解析法是函数的主要表示方法,这是因为对解析式可以进行各种运算,以便研究函数的性质.

(2) 列表法

用含有一系列自变量的值和函数的对应值的表格来表示函数关系的方法称为列表法.例如,常用的平方表,平方根表,对数表,三角函数表等,都是用列表法表示函数关系的.在研究社会经济现象时,常采用列表法.

(3) 图象法

设函数$y=f(x)$的定义域为D.如果用D中的每个x值及其对应的函数值$f(x)$作成数对$(x,f(x))$,那么在坐标平而上以数对$(x,f(x))(x\in D)$为坐标的点的集合称为函数$y=f(x)$的图象.利用函数的图象表示它的对应规律的方法称为图象法.

图象法具有形象直观的特点，它能用几何图形的直观性来反映函数的增减性、奇偶性等性质.

二、分段函数

分段函数

在定义域的不同部分用不同的公式表示的函数称为分段函数. 例如

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

是定义在$(-\infty, +\infty)$的一个分段函数. 当自变量x取区间$(-\infty, 0)$内的数值时，对应的函数值y由公式$y = -x$计算；当x取区间$[0, +\infty)$上的数值时，y由公式$y = x$计算，它的图象如图 1-1.

又如

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

也是一个分段函数. 这个函数的定义域也是$(-\infty, +\infty)$，如图 1-2.

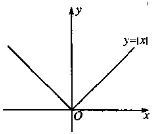


图 1-1

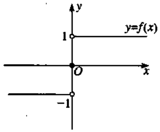


图 1-2

关于分段函数，要注意以下几点：

(1) 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各公式的取值范围的并集.

三、函数的简单性质

1. 函数的单调性

定义 设函数$y = f(x)$在区间I上有定义. 如果对于区间I上的任意两点x_1, x_2，当$x_1 < x_2$时，总有$f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数$f(x)$在I上是单调增加的；如果当$x_1 < x_2$时，总有$f(x_1) < f(x_2)$，则称$f(x)$在I上是严格单调增加的；

如果对于区间I上的任意两点x_1, x_2，当$x_1 < x_2$时，总有$f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称函数$f(x)$在I上是单调减少的；如果当$x_1 < x_2$时，总有$f(x_1) > f(x_2)$，则称$f(x)$在I上是严格单调减少的.

例如，函数$y = x^2$在$[0, +\infty)$上是单调增加的，而在$(-\infty, 0]$上是单调减少的.

在区间(a, b)内严格单调增加的函数的图象是从左下方上升到右上方的，如图 1-3，严格单调减少的函数的图象是从左上方下降到右下方的，如图 1-4.

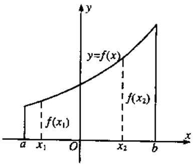


图 1-3

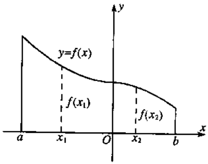


图 1-4

2. 函数的奇偶性

定义　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任何 $x\in D$，总有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任何 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

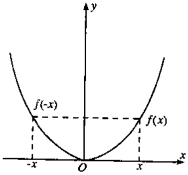


图 1-5

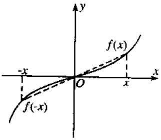


图 1-6

偶函数的图象关于 y 轴对称，如图 1-5.

奇函数的图象关于原点对称，如图 1-6.

注　(1) 很多函数既不是奇函数，也不是偶函数，如 $y=2x-1$，$y=\sin x+1$ 等.

(2) 函数 $y=0$，$-\infty<x<+\infty$，既是奇函数，又是偶函数.

3. 函数的有界性

定义　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在一个正数 M，使得对于任何 $x\in I$，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的几何意义是，曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的部分总是夹在两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间，如图 1-7.

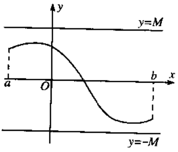


图 1-7

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，而在

$\left[\frac{1}{10},1\right]$上有界.

4. 函数的周期性

定义　设 $y=f(x)$ 是定义在某一数集 X 上的函数. 如果存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得对于任何 $x\in X$，总有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为数集 X 上的周期函数，称满足这个等式的最小正数 T 为函数的周期.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期函数，它们的周期均为 2π.

又如，函数 $y=\tan x$，$(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z)$ 也是周期函数，它的周期为 π.

函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性均为函数在定义域或定义域内的某个区间上的整体性质，它既与函数的对应规律(一般由解析式表述)有关，又与函数的定义域有关. 解析式相同而定义域不同的函数可能有不同的增减性等性质.

四、反函数

1. 反函数的定义

定义　设已知函数为

$$y=f(x) \tag{1}$$

如果把 y 当作自变量，x 当作函数，则由关系(1)所确定的函数

$$x=\varphi(y)$$

称为函数 $f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，而 $f(x)$ 称为直接函数.

定义表明，反函数的定义域和值域分别是直接函数的值域和定义域.

实际上，$y=f(x)$ 也是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，因此，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也可以写成 $y=f^{-1}(x)$. 这时我们说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

2. 严格单调函数的反函数

一般说来，一个函数不一定存在反函数. 下面给出函数存在反函数的一个充分条件.

定理 1.1.1 如果函数

$$y=f(x),\quad D(f)=X,\quad Z(f)=Y$$

是严格单调增加(或减少)的，则 $f(x)$ 存在反函数

$$x=\varphi(y), D(\varphi)=Y, Z(\varphi)=X,$$

并且反函数 $x=\varphi(y)$ 在 Y 上也是严格单调增加或减少的.

求反函数的步骤：

(1) 判断函数 $y=f(x)$ 是否存在反函数. 如果 $f(x)$ 存在反函数，则从直接函数 $y=f(x)$ 中解出

$$x=\varphi(y).$$

(2) 将上式中的 x 与 y 分别换成 y 与 x，得

$$y=\varphi(x).$$

这就是 $y=f(x)$ 的反函数.

例如，求函数 $y=f(x)=10^x$ 的反函数的步骤是

(1) 由 $y=10^x$ 在$(-\infty,+\infty)$内严格增加，根据定理 1.1.1 可知，$f(x)$ 存在反函数. 然后由 $y=10^x$ 求出

$$x=\lg y,\qquad 0<y<+\infty.$$

(2) 将上式中的 x,y 分别换为 y,x，便得 $f^{-1}(x)=\lg x, 0<x<+\infty$.

3. 反函数的图象

由于函数 $y=f(x)$ 的反函数(如果存在)有两种形式：$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$，所以 $f(x)$ 的反函数的图象可分两种情况讨论.

(1) 函数 $y=f(x)$ 的图象与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图象是同一曲线，如图 1-8. 要求反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图象，只须画出 $y=f(x)$ 的图象.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 要求反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象，只须作出 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 的轴对称图形，如图 1-9.

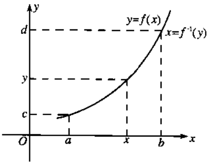


图 1-8

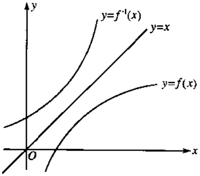


图 1-9

五、函数的四则运算与复合运算

1. 函数的四则运算

设 $f(x), x\in D_1$；$g(x), x\in D_2$ 为两个函数. $D_1\cap D_2\neq\varnothing$，则函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和、差、积与商分别指函数

$$f(x)+g(x), x\in D_1\cap D_2,$$
$$f(x)-g(x), x\in D_1\cap D_2,$$
$$f(x)g(x), x\in D_1\cap D_2,$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D_1\cap(D_2-\{x\mid g(x)=0, x\in D_2\})$$

例如，函数 $f(x)=x^3, -\infty<x<+\infty$ 与 $g(x)=\lg x, 0<x<+\infty$ 的和与商分别是函数

$$f(x)+g(x)=x^3+\lg x,\qquad 0<x<+\infty,$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^3}{\lg x}, 0<x<1 \text{ 或 } 1<x<+\infty$$

2. 复合函数

定义　设 y 是 u 的函数

$$y=f(u)$$

而 u 又是 x 的函数

$$u=\varphi(x)$$

如果当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域的某个子集 X 内取值时，$u=\varphi(x)$ 的值使 $f(u)$ 有定义，则 y 成为

x 的函数，记作

$$y = f(\varphi(x)).$$

上式称为复合函数，或称为由函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数，它的定义域为 X，u 称为中间变量.

例如，设 $y = f(u) = \sqrt{u}$，$u = \varphi(x) = x^2 - 1$，则由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数为 $y = f(\varphi(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$.

应该指出，定义中"函数 $u = \varphi(x)$ 的值使 $f(u)$ 有定义"是构成复合函数的必要条件. 如果不注意这一点，而是任取两个函数，再形式地复合起来，就不一定能得到复合函数.

例如，由 $y = f(u) = \arcsin u$ 与 $u = \varphi(x) = 3 + \cos x$ 复合而成的函数 $y = \arcsin(3 + \cos x)$ 是没有定义的. 因为 $u = \varphi(x) = 3 + \cos x$ 的值总大于 1，它不能使 $f(u) = \arcsin u$ 有定义.

复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有更多的中间变量，如 u, v, w, t 等等.

六、基本初等函数

1. 常数函数

函数

$$y = C \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 C 是已知常数，称为常数函数. 它是有界偶函数. 常数函数的图象是经过点 $(0, C)$，且与 x 轴平行的直线，如图 1-10.

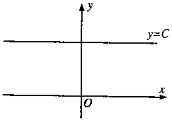


图 1-10

2. 幂函数

函数 $\qquad y = x^{\mu} \qquad$ (μ 为常数)

称为幂函数. 常用的幂函数有 $\mu = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1, -2$ 等几种情形. 当 $\mu = 1$ 时，$y = x$ 是正比例函数；当 $\mu = 2$ 时，$y = x^2$ 是最简单的二次函数，它的图象是抛物线；当 $\mu = -1$ 时，$y = \frac{1}{x}$ 是反比例函数，它的图象是双曲线.

幂函数的定义域与 μ 有关. 当 μ 为自然数时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$；当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时，定义域为 $[0, +\infty)$；当 $\mu = -1$ 时，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，然而无论 μ 为何值，$y = x^{\mu}$ 在 $(0, +\infty)$ 内总有定义. 在图 1-11 中，给出了幂函数 $y = x^{\mu}\left(\mu = 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, -\frac{1}{2}\right)$ 在第一象限内的图象.

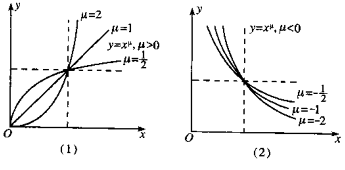


图 1-11

幂函数有以下性质：

(1) 当 $\mu > 0$ 时，$y = x^{\mu}$ 的图象经过点(0,0) 与点(1,1)；$y = x^{\mu}$ 在$(0, +\infty)$ 内严格单调增加且无界. (2) 当 $\mu < 0$ 时，$y = x^{\mu}$ 的图象经过点(1,1)，且以 x 轴和 y 轴为渐近线；$y = x^{\mu}$ 在$(0, +\infty)$ 内严格单调减少且无界.

3. 指数函数

函数
$$y = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$
称为指数函数. 以无理数 e = 2.71828… 为底的指数函数
$$y = e^x$$
是微积分中常用的指数函数.

指数函数 $y = a^x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$(0, +\infty)$.

指数函数有以下性质：

(1) 所有的指数函数的图象都在 x 轴的上方，都经过点(0,1)，且以 x 轴为渐近线.

(2) 当 $a > 1$ 时，$y = a^x$ 严格单调增加且无界；当 $0 < a < 1$ 时，$y = a^x$ 严格单调减少且无界.

(3) $y = a^x$ 的图象与 $y = a^{-x}$ 的图象关于 y 轴对称，如图 1-12.

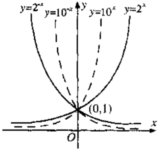


图 1-12

4. 对数函数

函数
$$y = \log_a x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$
称为对数函数. 当 $a = 10$ 时，$y = \log_a x$ 称为常用对数，记作 $y = \lg x$；当 $a = e$ 时，$y = \log_a x$ 称为自然对数，记作 $y = \ln x$. 对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数，所以，对数函数的定义域是$(0, +\infty)$，值域是$(-\infty, +\infty)$；对数函数 $y = \log_a x$ 的图象与指数函数 $y = a^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

对数函数有以下性质.

(1) 所有对数函数的图象都在右半平面，都经过点(1,0)，且以 y 轴为渐近线，如图 1-13.

(2) 当 $a > 1$ 时，$y = \log_a x$ 严格单调增加且无界；当 $0 < a < 1$ 时，$y = \log_a x$ 严格单调减少且无界.

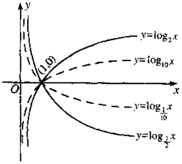


图 1-13

5. 三角函数

三角函数有
$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = \tan x,$$
$$y = \cot x, \qquad y = \sec x, \qquad y = \csc x,$$
其中自变量 x 以弧度为单位.

函数 $y = \sin x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$[-1, 1]$，它是奇函数，且是以 2π 为周期的周期函数，其图象如图 1-14.

函数 $y = \cos x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，值域是$[-1, 1]$，它是偶函数，且是以 2π 为周期的周期函数，其图象如图 1-15.

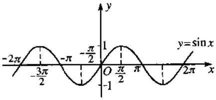


图 1-14

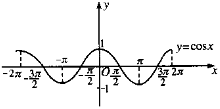


图 1-15

函数 $y=\tan x$ 的定义域是$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域是$(-\infty,+\infty)$.它是奇函数，且是以 π 为周期的周期函数，它的图象如图 1-16.

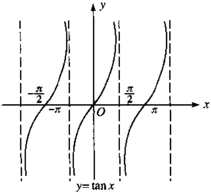


图 1-16

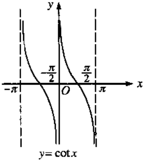


图 1-17

函数 $y=\cot x$ 的定义域是$(k\pi,k\pi+\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，值域是$(-\infty,+\infty)$.它是奇函数，且是以 π 为周期的周期函数，它的图象如图 1-17.

6. 反三角函数

反三角函数有

$$y=\arcsin x,\qquad y=\arccos x,$$
$$y=\arctan x,\qquad y=\operatorname{arccot} x.$$

函数 $y=\arcsin x$ 是指函数 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的反函数.函数 $y=\arcsin x$ 的定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.函数 $y=\arcsin x$ 在区间$[-1,1]$上是严格单调增加的，它的图象与 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的图象关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-18.

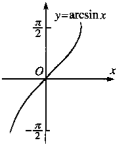


图 1-18

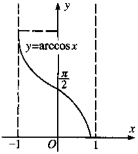


图 1-19

函数 $y=\arccos x$ 是指函数 $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 的反函数. 函数 $y=\arccos x$ 的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,\pi]$. 函数 $y=\arccos x$ 在区间 $[-1,1]$ 上是严格单调减少的，它的图象与 $y=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-19.

函数 $y=\arctan x$ 是指 $y=\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数. $y=\arctan x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，它在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调增加的. 函数 $y=\arctan x$ 的图象与 $y=\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-20.

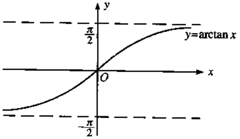


图 1-20

七、初等函数

由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除运算和有限次复合运算所得到的函数统称初等函数. 每个初等函数都可以用解析式表示.

例如

$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 是常数，n 是某个正整数；

$y=\sqrt{1+x+x^2}$；

$y=a\cos x+\sqrt{1-a^2\sin x}$，其中 a 是常数；

$y=x^{\sin x}-\dfrac{1}{x}-\ln(1+3x^2)$，

等都是初等函数.

我们不仅要会求两个或多个已知的基本初等函数的四则运算和复合运算的结果，还需要看出一个复合函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

例如，函数 $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ 是由一个幂函数和一个多项式

$$y=u^{\frac{1}{3}},u=x^2+1$$

复合而成的.

又如，函数 $y=\cos\sqrt{\ln x}$ 是由

$$y=\cos z,z=u^{\frac{1}{2}},u=\ln x$$

复合而成的.

典型例题分析

例 1 函数 $y=\sqrt{4-x}+\ln(x-1)$ 的定义域是(　　).

A. $(0,4]$　　　　B. $(1,4]$　　　　C. $(1,4)$　　　　D. $(1,+\infty)$

答　应选 B.

因为对于函数 $y_1=\sqrt{4-x}$，要求 $4-x\geqslant 0$，所以它的定义域是 $(-\infty,4]$；

对于函数 $y_2=\ln(x-1)$，要求 $x-1>0$，所以它的定义域是 $(1,+\infty)$；

给定函数 $y=y_1+y_2$ 的定义域是这两个定义域的交集 $(-\infty,4]\cap(1,+\infty)=(1,4]$.

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\tan x}$；　　　　(2) $y=\dfrac{2^x}{3x^2+2x-1}$.

解　(1) $y=\sqrt{\tan x}$，要求 $\tan x\geqslant 0$. 因为当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x\geqslant 0$，而 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数，所以在 $\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，$\left[2\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$，$\left[3\pi,\frac{7\pi}{2}\right)$，… 上，总有 $\tan x\geqslant 0$. 因此，函数的定义域

$$D=\left[k\pi,\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right),k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

(2) $y=\dfrac{2^x}{3x^2+2x-1}$，因为分式的分子在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，而分母不能为零，所以当分母不为零时函数有定义，即

$$3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)\neq 0,$$

即 $x\neq\dfrac{1}{3}$ 且 $x\neq -1$ 时，函数有定义，所以函数的定义域

$$D=(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right).$$

例 3　求函数 $y=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.

解　当 $\ln\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时，即

$$\ln\frac{5x-x^2}{4}\geqslant\ln 1$$

$$\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1,$$

$$x^2-5x+4\leqslant 0$$

时函数有定义，为此解不等式组

$$\begin{cases}x-4\geqslant 0,\\x-1\leqslant 0,\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x-4\leqslant 0,\\x-1\geqslant 0,\end{cases}$$

得无解或 $1\leqslant x\leqslant 4$. 所以函数的定义域是 $[1,4]$.

例 4　求函数 $y=\ln\dfrac{2x-1}{x+1}+\arccos\dfrac{3x-1}{2}$ 的定义域.

解　设 $y_1=\ln\dfrac{2x-1}{x+1}$，$y_2=\arccos\dfrac{3x-1}{2}$.

对于 y_1，要求 $\dfrac{2x-1}{x+1}>0$. 为此，解不等式组

$$\begin{cases}2x-1>0,\\x+1>0,\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}2x-1<0,\\x+1<0,\end{cases}$$

得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-1$. 所以 y_1 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

对于 y_2,由反余弦函数的定义可知,应有

$$-1\leqslant\frac{3x-1}{2}\leqslant 1,$$

$$-2\leqslant 3x-1\leqslant 2,$$

解之得

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1.$$

所以 y_2 的定义域是 $\left[-\frac{1}{3},1\right]$. 由于 $y=y_1+y_2$,所以函数 y 的定义域是上述两个定义域的交集,即

$$D=\left[(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\right]\cap\left[-\frac{1}{3},1\right]=\left(\frac{1}{2},1\right].$$

例 5 已知函数 $f(x)$ 的定义域是区间 (a,b),求 $f(2x-1)$ 的定义域.

解 由于 $f(x)$ 的定义域是 (a,b),因此,对于 $f(2x-1)$ 来说,只有当 $a<2x-1<b$ 时,$f(2x-1)$ 才有定义. 由 $a<2x-1<b$,得 $\frac{a+1}{2}<x<\frac{b+1}{2}$. 所以 $f(2x-1)$ 的定义域是 $\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right)$.

例 6 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

求 $f(-0.5)$,$f(0.5)$,$f(2)$ 及其定义域.

解 由于 $-0.5\in(-1,0)$,所以 $f(-0.5)$ 的值应根据第一段的公式来求,于是 $f(-0.5)=2^{-0.5}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. 同理有

$$f(0.5)=x\,|_{x=0.5}=0.5;$$

$$f(2)=x-1\,|_{x=2}=1.$$

$f(x)$ 的定义域是表示三个取值范围的区间的并集,即

$$D(f)=(-1,0)\cup[0,1)\cup[1,3]=(-1,3].$$

以上几例表明,当函数 $y=f(x)$ 是由解析式表示时,求函数的定义域可依据以下几条准则.

(1) 如果函数的解析式中含有分式,则分式的分母不能为零;

(2) 如果函数的解析式中含有偶次方根,则被开方式必须非负;

(3) 如果函数的解析式含有对数,则真数必须大于零;

(4) 如果函数的解析式含有反正弦函数或反余弦函数,则必须符合反正弦函数与反余弦函数的定义域. 例如,对于 arcsin $(2x+1)$,必须有 $|2x+1|\leqslant 1$;

(5) 如果函数的解析式由若干项组成,则定义域是各项定义域的交集;