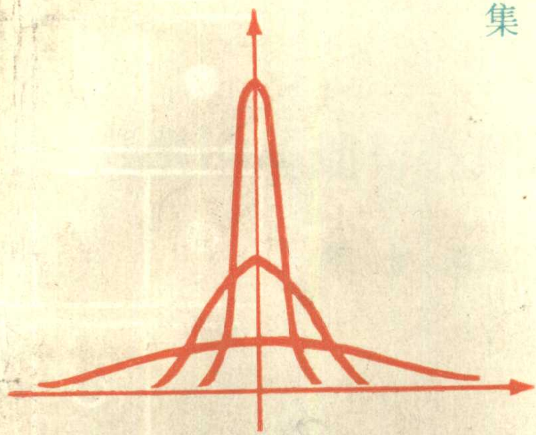
集智　编著



概率论基础与数理统计初步

江西人民出版社

数 学 小 丛 书

概率论基础与数理统计初步

集 智 编著

江 西 人 民 出 版 社
一九八一年·南昌

数 学 小 丛 书

概率论基础与数理统计初步

集 智 编著

江西人民出版社出版
（南昌百花洲3号）
江西省新华书店发行　江西新华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 9.625 字数 220,000
1981年10月第1版 1981年10月江西第1次印刷
印数：1—6,800

统一书号：7110·301　　定价：0.80元

目　录

第一章　排列与组合

在计算事件的概率时，需要一些排列与组合的基本知识。现分别把排列与组合的基本知识作一介绍。

§1　排　　列

一　排列的定义

首先分析两个例子：

（1）从三个不同的数字 2 、 3 、 5 里，每次取出两个不同的数字进行排列，一共可以组成多少个两位数？

从 2 、 3 、 5 三个数字里选出一个数字排在十位上有 3 种选法，每次选定一个数字排在十位上后，再选另一个数字排在个位上有 2 种方法．例如，选 2 排在十位上后，再选另一个数字排在个位上的方法有 2 种，就是选 3 或选 5 ；所以一共可以组成 $3 \times 2 = 6$ 个两位数，就是23、25、32、35、52、53。从这 6 个两位数里可以看出，第一个两位数和第三个两位数中选出的两个两位数字是相同的，即 2 和 3 ，，但是它们所排列的位置却不同。第一个两位数是选 2 排在十位上，3 排在个位上；第三个两位数是选 3 排在十位上，2 排在个位上。所以这是两种不同的选法，它们的特点就是排列的顺序不一样：23和32。同理可以说明25和52是两种不同的选法，35和53是两种不同的选法。

（2）从甲、乙、丙三个学生中，选一个学生当班长，一个学生当副班长，可以有几种选法？

从甲、乙、丙三个学生中选一个学生当班长有 3 种方法。而不论选谁当班长后，再选另一个学生当副班长的方法有 2 种。例如，选甲学生当副班长后，再选一个学生当副班长的方法有 2 种，即选乙学生或丙学生。所以，选一个学生当班长，一个学生当副班长的方法共有 $3\times2=6$ 种。

从上面两个例子中可以看出：两个例子所研究的对象是不同的，例 1 是 2 、 3 、 5 三个数字，例 2 是甲、乙、丙三个学生（以后我们把所研究的对象统称为元素）；同时它们所研究的问题也不一样 例 1 是要知道不同的两位数有几个，例 2 是要知道选法有几种。但是，我们可以看到，这两个问题有共同的特点：实质上，它们都是研究“从 3 个不同的元素里，每次取出 2 个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，一共有多少种不同的排法”。

上面问题里的“ 3 个”和“ 2 个”在实际中还可以推广到“m 个”和“n个。一般地说：

从 m 个元素里，每次取出 n 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 m 个元素里取出 n 个元素的一种排列。按照这个定义，在例 1 里的每一个两位数，在例 2 里的每一种选法，都是从 3 个元素里取出 2 个元素的一种排列。

这里必须说明一点，上面给出的这个排列的定义，其中 m 个元素、n 个元素都不一定是各不相同的，在这一节里，我们只研究从 m 个各不相同的元素里每次取出 $n(1\leqslant n\leqslant m)$ 个各不相同的元素的排列，即所说的从 m 个元素里每次取出 n 个元素的排列，都是指这样的排列。

我们运用排列的定义时，必须注意以下两点：

（1）要取出 n 个元素；

（2）要按照一定顺序排成一列。

如果两种排列所含的元素不完全一样，那么就是不同的排列；如果两种排列所含的元素虽然完全一样，但排的顺序不同，那么也是不同的排列。当两种排列的元素完全一样，并且所排的顺序又完全相同，这样的两种排列才是相同的排列。例如，排列23和排列35是两种不同的排列，排列23和排列32也是两种不同的排列；而排列23和排列23是两种相同的排列。

在排列的定义里，如果 $m>n$，这样的排列叫做选排列；如果 $m=n$，这样的排列叫做全排列。m 个元素的任何两种不同的全排列所含有的元素完全一样，只是元素排列的顺序不完全相同。

二　排列的种数及其计算

1　排列的种数

我们先看由三个元素所作成的各种不同的排列。如果用 a、b 和 c 来表示这三个元素，则可作成的排列如下：

取1个元素的排列：a,b,c，共3种；

取2个元素的排列：ab,ac,bc,ba,ca,cb，共6种；

取3个元素的排列：abc,acb,bac,bca,cab,cba，共 6 种

一般说来，由已知 m 个元素所作成的种种排列，可能为取1，取2，取3，……以至取 m 个元素所作成的排列。

由 m 个元素中取 n 个元素所作成的不同排列的种数，我们用 A_m^n 来表示。A_m^n 是一个数，是从 m 个元素里每次取出 n 个元素的所有的排列的种数。应该注意的是，既要把它同固定的一种排列区分清楚，也要把它同“从 m 元素里每次取出 n 个元素的所有不同的排列”区分清楚。例如，从3个元素 a、b、c 里每

次取出 2 个元素的一种排列，是指“从 3 个元素 a,b,c 里，每次取出 2 个元素，按照一定的顺序排成一列”这一件事；从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的所有不同的排列，是指 ab,ac,ba,bc,ca,cb；而 A_3^2 是从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的所有不同的排列的种数，$A_3^2=6$，就是 A_3^2 表示数 6。

我们通常用符号 P_m 表示 m 个元素的全排列的种数，就是说：

$$\boxed{p_m = A_m^m}$$

2　排列种数的计算

1）推导计算 A_m^n 的公式

上面虽然介绍了写出从 m 个元素里每次取出 n 个元素的所有不同的排列的方法，但是当 m 和 n 比较大的时候，要把所有不同的排列都写出来是很困难的．在一般情况下，常常只要求我们计算出所有不同的排列的种数，却不要求写出所有的排列．这就必须推导计算 A_m^n 的公式．

我们看一下由 m 个元素来作排列的方法：

假设我们有 m 个元素 a、b、c、…、k、l．首先看由它们之中每次取 1 个元素的排列，这应有 m 种，就是 $A_m^1=m$．

现在我们作每次取 2 个元素的排列，显然应该在前边所作出的每次取 1 个元素的各排列的后面，分别加上除已经被取出的这个元素以外的 $m-1$ 个元素中的某一个，这 $m-1$ 个元素中的每一个都要轮加一次，即在元素 a 后分别加上除 a 以外，元素 b、c、…、k、l；在元素 b 后分别加上除 b 以外的元素 a、c、…、k、l，等等．这样我们就得到每次取 2 个元素的各排列，现在把它们排列如下：

$$m\text{行}\begin{cases} ab, ac, ad, \cdots, ak, al\ (\text{共} m-1 \text{种排列})\text{；} \\ ba, bc, bd, \cdots, bk, bl\ (\text{共} m-1 \text{种排列})\text{；} \\ ca, cb, cd, \cdots, ck, cl\ (\text{共} m-1 \text{种排列})\text{；} \\ la, lb, lc, \cdots, kl\ (\text{共} m-1 \text{种排列})\text{。} \end{cases}$$

由此看出，在每次取1个元素的各排列上，分别加上剩下的$m-1$个元素中的某一个，便得到$m-1$种每次取2个元素的排列。因为共有m个元素，所以每次取2个元素的排列数为$(m-1)m$，这个数就是从m个元素中每次取2个元素的全部排列的种数，所以得

$$A_m^2 = m(m-1)$$

再看从m个元素中每次取3个元素的排列情况。在上面所作出的每次取2个元素的各排列后，分别加上$m-2$个剩余元素中的某一个，这样我们又得到每次取3个元素的排列，现在把它们排列如下：

$$(m-1)m\text{行}\begin{cases} abc, abd, \cdots, abk, abl\ (\text{共} m-2 \text{种排列})\text{；} \\ acb, acd, \cdots, ack, acl\ (\text{共} m-2 \text{种排列})\text{；} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ lka, lkb, \cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{共} m-2 \text{种排列})\text{。} \end{cases}$$

因为每次取2个元素的排列数等于$m(m-1)$，由每种这样的排列上可以得到$(m-2)$个每次取3个元素的排列，所以每次取3个元素的排列数为：

$$(m-2)[m(m-1)] = m(m-1)(m-2)$$

于是

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2)$$

同理可得：

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

$$A_m^5 = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

$$A_m^6 = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)$$

一般地

$$\boxed{A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1\leqslant n\leqslant m),}$$

这就是求排列数的公式，可以把它叙述如下：

由 m 个元素中每次取 n 个元素的排列数，等于 n 个连续整数的积，其中最大的整数是 m。

例如：

$$A_4^2 = 4\times 3 = 12;$$

$$A_4^3 = 4\times 3\times 2 = 24;$$

$$A_5^3 = 5\times 4\times 3 = 60;$$

$$A_8^4 = 8\times 7\times 6\times 5 = 1680.$$

2）推导计算 p_m 的公式

在上面的推导中，使 $n=m$ 就可以推导出计算 p_m 的公式，就是：

$$p_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\cdots(m-m+2)(m-m+1)$$

$$\boxed{p_m = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1}$$

通常用符号"$m!$"表示 $m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1$，"$m!$"读作"$m$ 的阶乘"。这就是说 $p_m = m!$，所以这个公式可以叙述如下：

m 个元素的排列数等于自然数 1 到 m 的连乘积。

$$p_9 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 362880$$

3）例题

在这里主要是运用公式

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$$

来解几道例题．从这个公式中，我们可以看出以下几点：

1° 第一个因数是m，后面的每个因数都比它前面的一个因数少1；

2° 共有n个因数；

3° 最后一个因数是$m-n+1$。

在解排列的应用题时，首先必须认真审题，看看这个问题能不能归结为排列问题来求解．如果能够的话，就再考虑以下几点：m个不同元素是什么，n个元素是指什么，从m个元素里每次取出n个元素的每一种排列对应的是表示什么事情．

例1 某人有6本不同的书籍，把其中的3本排在书架上，一共有多少种不同的排法？

解：很明显，这个问题可以归结为排列问题来解决．这里的元素是书籍，从6个不同的元素里每次取出3个元素的一个排列对应的是把6本书籍中的3本书籍排在书架上的一种排法．故书籍的排法的种数等于排列的种数A_6^3。

即 $$A_6^3 = 6\times5\times4 = 120$$

答：一共有120种不同的排法．

例2 一条铁路线上有10个车站，一共需要多少种不同的车票？

解：因为每种车票只能适用于由一个车站到另一个车站，而且由甲站到乙站的车票不同于由乙站到甲站的车票．这样，这个问题就可以归结为从8个元素里每次取出2个元素的排列问题来解．这里，10个车站是10个元素；从10个元素里每次取出2个元素的一种排列对应一种车票．因此，所要求的车票种

数就等于排列的种数A_{10}^2。

而 $$A_{10}^2=10\times 9=90$$

答：一共需要90种车票.

例 3　在一班里有 9 种学科，每天要讲 4 种不同的学科，那么一天的课程表有多少种排法？

解：很明显，这个问题也可以归结为排列问题来解，即这个问题可以归结为从 9 个元素里每次取出 4 个元素的排列问题来解. 这里，9 种学科是 9 个元素；从 9 个元素里每次取出 4 个元素的一种排列对应一种课程表的排法. 因此，所要求的一天内课程表的排法的种数等于排列的种数A_9^4。

即 $$A_9^4=9\times 8\times 7\times 6=3024$$

答：共有 3024 种排法。

例 4　12个人坐在12把椅子上，问有多少种不同的坐法？

解：这个问题也可以归结为排列问题来解，即可以归结为从12个元素里每次取12个元素的排列问题来解. 因此，不同坐法的种数等于p_{12}

即 $$p_{12}=12\times 11\times 10,\cdots,2\times 1=479001600$$

答：共有 479001600 种不同的坐法。

§ 2　组　　合

一　组合的定义

首先分析几个具体例子：

(1) 从甲、乙、丙三个学生中选出两个代表参加县里的劳模会，一共有几种选法？

容易看出，选代表的方法有三种，就是选甲、乙；选甲、丙；选乙、丙．这些结果都与顺序无关（就是说，选出甲、乙当代表与选出乙、甲当代表是一样的）．我们也可以这样想，如果甲当代表，那么选代表的方法就有选甲、乙和选甲、丙两种；如果甲不当代表，那么选代表的就只有选乙、丙一种．因此，一共只有这三种方法．

现在来比较一下，这个问题与前面讲的“从甲、乙、丙三个学生中，选一个人当班长，一个人当副班长，可以有几种选法”究竟有什么区别．前面我们已经讲过，“选甲学生当班长，乙学生当副班长”与“选乙学生当班长，甲学生当副班长”这两种选法的顺序不同，是两种不同的选法．因为选出的人虽然都是甲学生和乙学生，但是他们的分工却不同，所以是两种不同的选法．而在本节所讲的“选甲学生、乙学生当代表”与“选乙学生、甲学生当代表”实际上是相同的，是一种选法而不是两种选法，就是说，“选甲学生、乙学生当代表”，是不需要考虑顺序的．

（2）从不在一条直线上的三点A、B、C里，每次取出两个点连结成一条直线，可以得到几条直线？

我们在学习平面几何的时候知道，过任何两点可以引一条直线，并且只能引一条直线，所以过A、B只能连接成一条直线；同样，过点A、C只能连一条直线，过B、C也都只能连结成一条直线，因此，可以得到三条直线AB、BC、AC．就是说，“过两点连结成直线”是不需要考虑顺序的．

上面分析的这两个例题是不同的，例1是求代表的选法有几种，例2是求连结的直线有几条；但是，它们有共同点，就是这两个例题实质上都是研究“从3个不同的元素里每次取出2个不同的元素，不管怎样的顺序并成一组，一共有多少种不

同的组”的问题．“从3个不同的元素里每次取出2个不同的元素，不管怎样的顺序并成一组”，对例1来说，就是表示“从3个学生中，每次选两个当代表”；对例2来说，就是表示“从3个点里，每次取出两点连结成一条直线”．“从3个不同的元素里，每次取出2个元素，不管怎样的顺序并成一组”，还可以表示其他的实际内容．

同理，我们还可以把上述问题加以推广．一般地说：**从m个元素里，每次取出n个元素，不管怎样的顺序并成一组，叫做从m个元素里每次取出n个元素的一个组合．**

这里要说明一点，就是组合定义中的“m个元素”，“n个元素”，都不一定是各不相同的．但在这一节里，我们只研究从m个各不相同的元素里，每次取出n个$(1\leqslant n\leqslant m)$各不相同的元素的组合，即所说的从$m$个元素里每次取出$n$个元素的组合，都是指这样的组合．

从排列和组合的定义可以看出，虽然都是“每次取出n个元素”，但是，排列必须考虑顺序，组合不须考虑顺序．也就是说，在取出的n个元素里，排列是“按照一定的顺序排成一排”，而组合是“不管怎样的顺序并成一组”．只有很好的理解这一点，才能深刻理解排列与组合这两个概念的区别．

由组合的定义可知，两个组合所含有的元素完全一样，就是相同的组合．例如在上面例1中，“选甲、乙两学生当代表”与“选乙、甲两学生当代表”是相同的两个组合．又知，从4个元素a、b、c、d里，每次取出3个元素的组合abc和组合bca就是相同的组合．如果两个组合里所含有的元素不完全一样，就是不同的组合．例如，组合abc和组合acd是不同的组合．

二　组合种数的计算

从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个不同的元素的所有不同的组合有 3 种：ab,ac,bc。也就是说，从 3 个元素里每次取出 2 个元素的所有不同组合的种数是 3．从 m 个元素里每次取出 n 个元素的所有不同的组合的种数，通常用符号 C_m^n 表示。

C_m^n 是一个数，要把它和“组合”区别清楚。例如，$C_3^2=3$，而从 3 个元素 a、b、c 里每次取出 2 个元素的所有不同的组合是 ab,ac,bc。现在来推导计算 C_m^n 的公式。

从排列和组合的定义可以看出，从 m 个元素里每次取出 n 个元素的排列，与从 m 个元素里每次取出 n 个元素的组合的区别，前者是每次取出 n 个元素后，还要按照一定的顺序摆成一排；而后者是每次取出 n 个元素，不管怎样的顺序并成一组。这样，从 m 个元素里每次取出 n 个元素的所有不同的排列的种数，和从 m 个元素里每次取出 n 个元素的所有不同的组合的种数，两者之间就有一定的关系。因此，如果我们能把这种关系找出来，利用计算排列的种数 A_m^n 的公式，就可以推导出计算组合的种数 C_m^n 的公式。

先看一个例子：从 4 个元素 a、b、c、d 里，每次取出 3 个元素的所有的组合是 abc,abd,acd，bcd 等 4 种（即 $C_4^3=4$）。如果把每一种组合里的 3 个元素摆成不同的顺序，可得到 p_3 种排列，现在有 C_4^3 种组合，所以一共有 $C_4^3\cdot p_3$ 种排列。把它们全部写出来，就是：

$$abc,abd,acd,bcd,acd,adb,adc,bdc,$$
$$bac,bad,cad,cbd,bca,bda,cda,cdb,$$
$$cab,dab,dac,dbc,cba,dba,dca,dcb.$$

而这些排列的种数，就是从 4 个元素 a 、 b 、 c 、 d 里每次取出 3 个元素的所有排列的种数 A_4^3。所以 A_4^3 是 C_4^3 的 P_3 倍。

一般地说，A_m^n 是 C_m^n 的 P_n 倍。这是因为，如果把每一种组合里的 n 个元素摆成不同的顺序可以得到 P_n 个排列，现在有 C_m^n 种组合，所以一共有 $C_m^n \cdot P_n$ 种排列，而这些排列的种数就是 A_m^n，这就是说：

$$A_m^n = P_n \cdot C_m^n,$$

所以

$$\boxed{C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} \quad (1 \leqslant n \leqslant m)}$$

因为

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!},$$

所以

$$\boxed{C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}}$$

还可以将上式进行变形：

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}$$

$$= \frac{m}{n} C_{m-1}^{n-1},$$

所以

$$\boxed{C_m^n = \frac{m}{n} C_{m-1}^{n-1}}$$

$$C_m^n=\frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(m+1)m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)}$$
$$=\frac{n+1}{m+1}C_{m+1}^{n+1}$$

所以

$$\boxed{C_m^n=\frac{n+1}{m+1}C_{m+1}^{n+1}}$$

$$C_m^n=\frac{n+1}{m-n}\cdot\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)}$$
$$=\frac{n+1}{m-n}C_m^{n+1}$$

$$\boxed{C_m^n=\frac{n+1}{m-n}C_m^{n+1}}$$

$$C_m^n=\frac{m}{m-n}\cdot\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}$$
$$=\frac{m}{m-n}C_{m-1}^n$$

所以

$$\boxed{C_m^n=\frac{m}{m-n}C_{m-1}^n}$$

三 组 合 的 性 质

1 $C_m^n=C_m^{m-n}$

证：因为

$$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

所以