



高等数学 解题指南

北京大学数学科学学院

周建莹 李正元 编

6

北京大学出版社

高等数学解题指南

北京大学数学科学学院

周建莹 李正元 编

北京大学出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题指南/周建莹,李正元编. —北京:北京大学出版社,
2002.10
ISBN 7-301-05853-5

I. 高… II. ①周… ②李… III. 高等数学-高等学校-解题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064390 号

书 名: 高等数学解题指南

著作责任者: 周建莹 李正元 编

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 7-301-05853-5/O · 0550

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 理科编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

890×1240 A5 开本 22.625 印张 610 千字

2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 25.00 元

内 容 简 介

本书是理工医农各专业的大学生学习“高等数学”课的辅导教材。两位作者在北京大学从事高等数学教学四十年，具有丰富的教学经验，深知学生的疑难与困惑。他们围绕该课的基本内容与教学要求，根据学生初学时遇到的难点与易犯的错误，通过精心挑选的典型例题进行分析、讲解与评注，给出归纳和总结，以帮助学生更好地理解“高等数学”课的内容，掌握其基本理论和正确的解题方法与技巧。全书共分 13 章，内容包括：一元微积分，空间解析几何，多元微积分，无穷级数（包含傅里叶级数）与常微分方程等。在每一节中，设有基本理论内容提要，典型例题的讲解与分析，以及供学生自己做的练习题等部分，书末附有练习题的答案。为了适应不同程度学生的要求，本书还较系统地讲解了适量的综合题和一定难度的例题（以 * 号标出），这些内容不仅可以开拓学生的解题思路，帮助学生学好高等数学，而且还可作为考研复习之用。

本书可作为综合大学、理工科大学、高等师范学校理工医农各专业大学生学习高等数学的学习辅导书，也可供成人教育、自学考试的学生阅读，对青年教师及报考研究生的大学生来说，本书也是较好的教学参考书和考研复习用书。

作者简介

周建莹 北京大学数学科学学院教授。1960年毕业于北京大学数学力学系,从事高等数学教学工作四十年,具有丰富的教学经验;周建莹教授对高等数学中的典型例题和解题方法有系统的归纳、总结,编写的教材有《高等数学(生化医农类)》(1985年第1版,2002年修订版,北京大学出版社)、《高等数学简明教程》(北京大学出版社,1999)。

李正元 北京大学数学科学学院教授。1963年毕业于北京大学数学力学系,从事高等数学、数学分析等课程教学工作四十年,具有丰富的教学经验;李正元教授对高等数学解题思路、方法与技巧有深入研究、系统归纳和总结,编写的教材和学习辅导书有《高等数学》、《数学复习全书》、《数学分析》、《数学分析习题集》。

目 录

第一章 微积分的准备知识	(1)
§ 1 函数	(1)
内容提要	(1)
典型例题分析	(3)
本节小结	(8)
练习题 1.1	(9)
§ 2 极限的概念、性质和若干求极限的方法	(9)
内容提要	(9)
典型例题分析	(13)
本节小结	(33)
练习题 1.2	(34)
§ 3 函数的连续性,连续函数的性质	(34)
内容提要	(34)
典型例题分析	(36)
本节小结	(43)
练习题 1.3	(43)
第二章 微商(导数)与微分	(45)
§ 1 微商概念及其运算	(45)
内容提要	(45)
典型例题分析	(48)
本节小结	(67)
练习题 2.1	(67)
§ 2 微分的概念及其运算	(69)
内容提要	(69)
典型例题分析	(72)
本节小结	(76)

练习题 2.2	(77)
第三章 微分中值定理及其应用	(78)
§ 1 微分中值定理	(78)
内容提要	(78)
典型例题分析	(80)
本节小结	(103)
练习题 3.1	(104)
§ 2 函数的单调性、极值、最值问题	(104)
内容提要	(104)
典型例题分析	(106)
本节小结	(125)
练习题 3.2	(126)
§ 3 函数的凹凸性、拐点、函数作图法	(127)
内容提要	(127)
典型例题分析	(129)
本节小结	(135)
练习题 3.3	(135)
§ 4 求未定式的极限	(136)
内容提要	(136)
典型例题分析	(137)
本节小结	(146)
练习题 3.4	(147)
§ 5 泰勒公式及其应用	(147)
内容提要	(147)
典型例题分析	(150)
本节小结	(163)
练习题 3.5	(164)
第四章 不定积分	(166)
§ 1 原函数与不定积分的概念	(166)
内容提要	(166)
典型例题分析	(168)

本节小结	(174)
练习题 4.1	(174)
§ 2 不定积分的两个计算法则——换元积分法 与分部积分法	(175)
内容提要	(175)
典型例题分析	(178)
本节小结	(189)
练习题 4.2	(190)
§ 3 几类可求积的初等函数的积分法	(190)
内容提要	(190)
典型例题分析	(195)
本节小结	(205)
练习题 4.3	(206)
第五章 定积分	(207)
§ 1 定积分的概念与性质	(207)
内容提要	(207)
典型例题分析	(210)
本节小结	(217)
练习题 5.1	(218)
§ 2 定积分的换元积分法与分部积分法, 变上限的 定积分	(219)
内容提要	(219)
典型例题分析	(221)
本节小结	(252)
练习题 5.2	(252)
§ 3 定积分的应用与广义积分	(253)
内容提要	(253)
典型例题分析	(259)
本节小结	(277)
练习题 5.3	(278)
第六章 空间解析几何	(280)

§ 1 空间直角坐标系,向量及其运算	(280)
内容提要	(280)
典型例题分析	(284)
本节小结	(291)
练习题 6.1	(291)
§ 2 直线、平面与二次曲面	(292)
内容提要	(292)
典型例题分析	(296)
本节小结	(312)
练习题 6.2	(312)
第七章 多元函数微分学	(314)
§ 1 多元函数的概念、极限与连续性	(314)
内容提要	(314)
典型例题分析	(316)
练习题 7.1	(322)
§ 2 偏微商与全微分	(323)
内容提要	(323)
典型例题分析	(325)
练习题 7.2	(335)
§ 3 方向导数与梯度	(336)
内容提要	(336)
典型例题分析	(338)
本节小结	(340)
练习题 7.3	(341)
§ 4 复合函数与隐函数的微分法	(342)
内容提要	(342)
典型例题分析	(344)
本节小结	(352)
练习题 7.4	(353)
§ 5 高阶偏导数,复合函数及隐函数的高阶偏导数	(354)
内容提要	(354)

典型例题分析	(356)
本节小结	(364)
练习题 7.5	(365)
§ 6 空间曲线的切线与法平面,曲面的切平面	
与法线	(366)
内容提要	(366)
典型例题分析	(368)
本节小结	(372)
练习题 7.6	(372)
§ 7 多元函数微分学在极值问题中的应用	(373)
内容提要	(373)
典型例题分析	(375)
本节小结	(381)
练习题 7.7	(381)
§ 8 二元函数的泰勒公式	(382)
内容提要	(382)
典型例题分析	(384)
练习题 7.8	(385)
第八章 重积分	(386)
§ 1 二重积分	(386)
内容提要	(386)
典型例题分析	(390)
本节小结	(401)
练习题 8.1	(403)
§ 2 三重积分	(405)
内容提要	(405)
典型例题分析	(409)
本节小结	(420)
练习题 8.2	(421)
§ 3 重积分的应用	(423)
内容提要	(423)

典型例题分析	(424)
本节小结	(435)
练习题 8.3	(435)
第九章 曲线积分与格林公式	(438)
§ 1 曲线积分的概念与计算	(438)
内容提要	(438)
典型例题分析	(441)
本节小结	(450)
练习题 9.1	(451)
§ 2 格林公式及其应用	(453)
内容提要	(453)
典型例题分析	(454)
本节小结	(459)
练习题 9.2	(460)
§ 3 第二型曲线积分与路径无关问题, $Pdx+Qdy$ 的原函数问题	(461)
内容提要	(461)
典型例题分析	(464)
本节小结	(470)
练习题 9.3	(471)
第十章 曲面积分, 高斯公式与斯托克斯公式	(472)
§ 1 曲面积分的概念与计算	(472)
内容提要	(472)
典型例题分析	(475)
本节小结	(486)
练习题 10.1	(486)
§ 2 高斯公式, 向量场的通量与散度	(488)
内容提要	(488)
典型例题分析	(489)
本节小结	(491)
练习题 10.2	(492)

§ 3	斯托克斯公式, 向量场的环量与旋度	(493)
	内容提要	(493)
	典型例题分析	(495)
	本节小结	(499)
	练习题 10.3	(499)
§ 4	算子符号 ∇ 及其性质, 散度与旋度计算	(500)
	内容提要	(500)
	典型例题分析	(501)
	练习题 10.4	(503)
第十一章 无穷级数		(504)
§ 1	级数的基本概念与性质	(504)
	内容提要	(504)
	典型例题分析	(505)
	本节小结	(508)
	练习题 11.1	(508)
§ 2	级数的收敛性判别法	(509)
	内容提要	(509)
	典型例题分析	(511)
	本节小结	(524)
	练习题 11.2	(524)
§ 3	幂级数的收敛域与幂级数的性质	(526)
	内容提要	(526)
	典型例题分析	(528)
	本节小结	(536)
	练习题 11.3	(538)
§ 4	函数的幂级数展开	(538)
	内容提要	(538)
	典型例题分析	(541)
	本节小结	(547)
	练习题 11.4	(548)
§ 5	傅里叶级数	(548)

内容提要	(548)
典型例题分析	(553)
练习题 11.5	(561)
§ 6 函数项级数	(562)
内容提要	(562)
典型例题分析	(564)
本节小结	(570)
练习题 11.6	(571)

第十二章 含参变量的积分, 傅里叶变换

与傅里叶积分	(572)
§ 1 含参变量的常义积分所确定的函数及其性质	(572)
内容提要	(572)
典型例题分析	(573)
练习题 12.1	(577)
§ 2 含参变量的无穷积分的一致收敛性	(577)
内容提要	(577)
典型例题分析	(579)
本节小结	(581)
练习题 12.2	(581)
§ 3 含参变量的无穷积分的性质	(581)
内容提要	(581)
典型例题分析	(582)
本节小结	(589)
练习题 12.3	(589)
§ 4 Γ 函数与 B 函数	(590)
内容提要	(590)
典型例题分析	(591)
本节小结	(594)
练习题 12.4	(594)
§ 5 傅里叶变换与傅里叶积分的定义, 计算傅里叶变换 与作频谱图	(594)

内容提要	(594)
典型例题分析	(597)
本节小结	(601)
练习题 12.5	(601)
§ 6 傅氏积分的收敛性与函数的傅氏积分展开	(601)
内容提要	(601)
典型例题分析	(602)
练习题 12.6	(604)
§ 7 傅氏变换的性质	(604)
内容提要	(604)
典型例题分析	(606)
本节小结	(611)
练习题 12.7	(611)
第十三章 常微分方程	(612)
§ 1 基本概念	(612)
内容提要	(612)
典型例题分析	(613)
练习题 13.1	(614)
§ 2 一阶微分方程的解法	(614)
内容提要	(614)
典型例题分析	(618)
本节小结	(626)
练习题 13.2	(626)
§ 3 二阶线性微分方程	(628)
内容提要	(628)
典型例题分析	(632)
本节小结	(643)
练习题 13.3	(644)
§ 4 几种特殊类型的高阶微分方程	(645)
内容提要	(645)
典型例题分析	(646)

练习题 13.4	(647)
§ 5 含有两个未知函数的常系数线性微分方程组	(647)
内容提要	(647)
典型例题分析	(648)
练习题 13.5	(649)
§ 6 微分方程的应用	(649)
内容提要	(649)
典型例题分析	(649)
练习题 13.6	(656)
练习题答案与提示	(658)

第一章 微积分的准备知识

§ 1 函 数

内 容 提 要

1. 函数概念

函数的定义 设在某一过程中有两个变量 x 与 y , 若对变量 x 在其变化域 X 中的每一个值, 依照某一对应规则, 变量 y 都有惟一确定的一个值与之对应, 我们就称变量 y 是变量 x 的**函数**, 记作

$$y = f(x) \quad (x \in X).$$

这时称 x 为**自变量**, 称 y 为**因变量**. 自变量 x 的变化域 X 称为函数的**定义域**, 而相应的因变量 y 的变化域 Y 称为函数的**值域**.

函数的对应规则与定义域是函数定义中的两个要素.

2. 函数的图形

函数 $y=f(x)$ ($x \in X$) 的图形是指点集

$$\{(x, y) | y = f(x), x \in X\}.$$

一般情形下, 它是 Oxy 平面上的一条或几条曲线, 任何一条平行于 y 轴的直线, 与曲线 $y=f(x)$ 至多相交于一点.

3. 函数的几种常见特性

有界性 若存在一个实数 M , 使对一切 $x \in X$, 都有

$$f(x) \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界的, 并称 M 为 $f(x)$ 的一个**上界**.

类似地, 若存在一个实数 N , 使对一切 $x \in X$, 都有

$$f(x) \geq N,$$

则称 $f(x)$ 是**有下界的**, 并称 N 是 $f(x)$ 的一个**下界**.

既有上界又有下界的函数称为**有界函数**. 即若存在两个实数 M 与 N , 使得

$$N \leq f(x) \leq M, \quad \text{对任意的 } x \in X, \quad (1.1)$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是**有界函数**. 函数有界性的一个等价的定义是: 若存在大于零的常数 K , 使

$$|f(x)| \leq K, \quad \text{对任意的 } x \in X,$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是有界函数, 并称常数 K 为 $f(x)$ 在 X 上的一个界.

奇偶性 设有函数 $y=f(x), x \in X$, 其中 X 关于原点对称(即: 若 $x \in X$, 则 $-x \in X$).

若 $f(-x)=-f(x)$, 对任意的 $x \in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的奇函数.

若 $f(-x)=f(x)$, 对任意的 $x \in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的偶函数.

奇函数的图形对称于原点, 偶函数的图形对称于 y 轴.

单调性 对任给的 $x_1, x_2 \in X$, 若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调上升的(单调下降的). 在 X 上单调上升与单调下降统称为在 X 上单调. 单调上升(下降)也称为单调递增(递减). 又若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调上升或严格递增(严格单调下降或严格递减).

周期性 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上定义, 若存在常数 $l > 0$, 对任给的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x+l)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, l 为 $f(x)$ 的一个周期. 周期函数一定有无穷多个周期, 若其中有一个最小的正数 T , 则称 T 为周期函数的最小周期, 简称周期.

4. 复合函数

设有函数

$$y = f(u), u \in U; \quad u = \varphi(x), x \in X, \text{ 值域为 } U'.$$

若 $U' \subseteq U$, 则在 X 上确定了一个新函数

$$y = f[\varphi(x)], \quad x \in X,$$

称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数, u 称为中间变量.

5. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Y . 若对 Y 中每一个 y 值, 都可由方程 $y=f(x)$ 惟一地确定出一个 x 的值, 则得到一个定义在 Y 上的函数, 称为 $y=f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in Y.$$

易知, 严格单调函数必有反函数, 并且其反函数也是严格单调的.

函数 $y=f(x)$ ($x \in X$) 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ ($y \in Y$) 的图形在同一个坐标系中是相同的.

习惯上, 为了强调对应规律 f^{-1} , 并将因变量仍记作 y , 通常将反函数写为

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in Y,$$

它的图形与 $y=f(x)$ ($x \in X$) 的图形关于直线 $y=x$ 对称.