国家工科数学课程教学基地系列教材

数学实验简明教程

电子科技大学应用数学系　编著

电子科技大学出版社

9↓

国家工科数学课程教学基地系列教材

数学实验简明教程

电子科技大学应用数学系　编著

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学实验简明教程/电子科技大学应用数学系编著．成都:电子科技大学出版社,2001.9

ISBN 7-81065-774-7

Ⅰ.数... Ⅱ.电... Ⅲ.数学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.O1-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 058470 号

内容简介

本书结合《微积分》和《线性代数》的内容,以数学软件 MATLAB 和 Mathematica 为操作平台,从计算机应用角度讲数学,并适当介绍数学建模的方法和思想。内容包括:线性代数方法,微积分方法,线性方程组问题,矩阵方幂和特征值问题,函数极值与非线性方程求解问题,常微分方程问题,线性规划问题,计算机图形与算法。附录中介绍了数学建模实验。本书可做高等工科院校的数学实验课教材或参考书,也可供工程技术人员参考。

数学实验简明教程

电子科技大学应用数学系 编著

出　　版:电子科技大学出版社
(成都建设北路二段四号　邮编:610054)
责任编辑:徐守铭
发　　行:新华书店经销
印　　刷:四川导向印务有限公司
开　　本:850×1168　1/32　印张 5.125　字数 137 千字
版　　次:2001 年 9 月第一版
印　　次:2001 年 9 月第一次印刷
书　　号:ISBN 7-81065-774-7/O·28
印　　数:1—5000 册
定　　价:8.00 元

前　言

进入21世纪，信息全球化过程加快。多媒体和网络技术的出现，早已把数学研究和数学教学推向一个数字化生存的新环境。计算机进入大学数学课堂，是教育信息化过程的必然，这导致了数学教育的大变革。“数学实验”课把探索和发现看作教学过程的重要部分，打破传统教育的思路，孕育出新的数学教学模式。新教学模式不仅体现了当代大学数学课堂的大信息量和快节奏特点，而且改变以教师为中心的模式，提倡以学生为主体的个性化、自主化学习。

信息时代的人类文明是伴随大量数学问题的研究和探索前进的，数学家利用计算机解决数学难题给我们以深刻启示。

“四色定理”的计算机证明以1 200小时机器运行实现了人工几百年无法完成的事。

因特网上“梅森素数寻找”在两年内找到了三个大梅森素数。

大型计算机上31亿个碱基对的定位计算实现了人类基因草图这项世纪发明。

………………

由于计算机科学技术的发展，相当一部分数学方法已经被软件化（或算法化），成为“数学技术”。科学家用数学技术研究数学问题（探索、猜想、求解、验证），解决实际应用问题（建立模型、求数值解、进行计算机模拟），逐步形成了数学科学中一个新的极具生命力的分支 —— 数学实验。

第一，数学实验是一种科研方法，应用这种方法有利于人类提出猜想，验证定理，纠正谬误。第二，数学实验是一种技术，这种技术适用于解决大量实际问题。从工程问题到理论问题，从社会科学到生命科学 …… 第三，数学实验也是一种学习手段，学习者借助计算机对

数学概念、定理、命题进行多方位的演示或验证，获得在传统学习环境中无法获得的知识信息。

数学实验的教学模式可以分为以下几种：与《微积分》合作模式、数学建模实验模式、数值实验模式和数学专题研究模式。其中，第一种模式将《微积分》为代表的数学课程（包括线性代数、概率论与数理统计等）中的某些内容与计算机结合，以数学软件为操作平台，引导学生自己动手，从计算机应用角度学习数学，把书本知识变为自己的知识。利用计算机解决一些实际问题，从中学习数学建模的思想方法。在我国部分高等院校，这种教学模式已经成为与微积分、线性代数、概率论与数理统计等课程同步开设的重要教学环节。

我校从 1997 年开始开设数学实验课，经历了对上述四种数学实验教学模式的探索和实践，在层次和规模上都有大的突破。数学实验从题材到内容都是博大的，这本书作为面向一年级大学生的简明教程，只是略见一斑。本书以数学软件 MATLAB 和 Mathematica 为操作平台，结合《微积分》和《线性代数》的内容，从计算机应用角度讲数学，并适当介绍数学建模的方法和思想。内容包括：线性代数方法，微积分方法，线性方程组问题，方阵的幂和特征值问题，函数极值与非线性方程求解问题，常微分方程问题，线性规划问题，计算机图形与算法。附录中介绍了数学建模实验。书中用到了数学软件的有关命令，为了使读者能在计算机上实现，完全按计算机软件的命令格式编排。如 Mathematica 软件中用 Sin[x]表示 $\sin x$，用 Lim 表示 lim 等。

本教材由钟尔杰、冷劲松编撰。第二章、第五章、第六章由冷劲松执笔，其余各章由钟尔杰执笔。参加教材修订工作的还有范小明、余时伟等老师。本书在写作过程中，自始自终得到成孝予教授、黄廷祝教授的关心和支持，电子科技大学教务处、应用数学系领导也给予了大力支持，我们借此机会向他们致以衷心的感谢。

数学实验课是一种新的数学教学模式，这种模式不同于传统的数学教育。数学实验也不同于物理和其它学科的“实验”，因为数学不是实验科学。实验代替不了证明，传统数学教育中培养学生严密的逻

辑思维能力训练仍然是不可缺少的。数学研究方法的多元化与数学教学模式的多元化体现了信息时代的特征。

正如信息时代需要持续创新一样，数学实验教材也应该随着教师教学思想的转变，学生学习态度的明确，以及人们使用计算机的总体水平提高而不断刷新。当教材要付印的时候，我们感到一种紧迫感，限于水平，其中难免疏漏，错误和不足之处还望读者指出。随着数学教学改革的不断深入，我们希望在数学实验的教学过程中，使教材在内容和形式上不断地完善，推陈出新。

编　者

2001 年 7 月于电子科技大学

目　录

第一章　线性代数方法

矩阵是人们用数学方法解决实际问题的重要工具，也是线性代数中一个基本概念。矩阵常用大写英文字母表示。一个 $m\times n$ 阶矩阵 A 是如下 m 行 n 列的数表

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

在计算机程序设计中，矩阵被称为二维数组，向量被称为一维数组。矩阵的每一行元素组成一个行向量，所以矩阵是有限个同维行向量的排列。本章结合数学软件 MATLAB 的计算机操作，介绍线性代数中的矩阵行变换、线性方程组解结构、向量组的线性相关性分析、矩阵的特征值与特征向量。两个常用的 MATLAB 命令是 rref 和 eig。

§1.1　矩阵的初等变换

一、初等行变换的背景

矩阵初等变换分行变换和列变换。初等行变换以矩阵的行向量为数据单元，进行运算将矩阵化为另一矩阵。矩阵的初等行变换有以下三种：

1. 交换矩阵中两个行向量的位置；
2. 用一个非零数乘以矩阵中某一个行向量；
3. 把矩阵中的某一个行向量乘以一个实数并加到矩阵中另一

个行向量上。

以上这三种运算，是根据数据处理的观点对解线性方程组消元法的概括。任一线性方程组所含全部数据都可用一个矩阵(增广矩阵)来表示，这种表示是惟一的。

例 1.1 求解方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

解：将方程组的系数矩阵和右端向量合并写成一个矩阵(增广矩阵)

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

对方程组的消元过程用矩阵的初等行变换实现，将矩阵 $\overline{A}$ 化简为行阶梯形矩阵

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

这一矩阵对应的方程组是

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = -1 \\ \qquad\quad -7x_3 = 2 \end{cases} \tag{1.2}$$

方程组(1.1)和方程组(1.2)等价，求解方程组(1.2)可得方程组(1.1)的解

$$x_3 = -2/7$$

$$x_2 = -1/7$$

$$x_1 = 10/7$$

化矩阵 $\overline{A}$ 为矩阵 $\overline{B}$ 所用行变换的 MATLAB 程序如下

```
A=[3  -1  5  3;1  -1  2  1;1  -2  -1  2]
```

```
                                         %输入矩阵数据
A([1  3],:)=A([3  1],:)                  %交换第一行和第三行数据
A(2,:)=A(2,:)- A(1,:)                    %将第一行乘-1 加到第二行
A(3,:)=A(3,:)- 3*A(1,:)                  %将第一行乘-3 加到第三行
A(3,:)=A(3,:)- 5*A(2,:)                  %将第二行乘-5 加到第三行
```

注意:在 MATLAB 中"%"表示程序行的注释开始。

二、化矩阵为最简行阶梯形的命令

用 MATLAB 命令 rref 可将

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 5 & 3\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

通过行变换化为最简行阶梯形矩阵

$$\overline{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 10/7\\ 0 & 1 & 0 & -1/7\\ 0 & 0 & 1 & -2/7\end{bmatrix}$$

由于 $\overline{A}$ 和 $\overline{C}$ 等价,观察后者可得出前者的某些性质。例如,通过 $\overline{C}$ 可得出 $\overline{A}$ 所对应的方程组的解(或通解)、观察 $\overline{C}$ 的列向量的关系可进行 $\overline{A}$ 的列向量组的相关性(线性相关或线性无关)分析。对于矩阵 $\overline{A}$,使用如下 MATLAB 命令

```
A =[3  -1  5  3;1  -1  2  1;1  -2  -1  2];    %输入矩阵数据
format rat                                     %分数数据格式
rref(A)                                        %化简矩阵
```

可得

```
        1          0          0          10/7
        0          1          0         -1/7
        0          0          1         -2/7
```

这正是最简行阶梯形矩阵 $\overline{C}$ 的数据。显然,这一矩阵对应如下方程组

$$x_3=-2/7$$
$$x_2=-1/7$$
$$x_1=10/7$$

这正是增广矩阵 $\overline{A}$ 对应的方程组的解。

习　题　1.1

1. 在 MATLAB 环境下输入下列矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

用三种不同方法求矩阵的秩:(1)行变换方法,(2)rref 命令,(3)rank 命令。

2. 写出下列方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\ x_1-3x_2\qquad-6x_4=9\\ \qquad 2x_2-x_3+2x_4=-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$$

的系数矩阵 A 和右端向量 $\boldsymbol{b}$ 。并用三种不同的方法求解方程组:(1)克莱姆法则,(2)rref 命令,(3)\(左除法)命令。

§1.2　线性方程组的解结构

一、齐次方程组的解结构

齐次方程组的矩阵形式为

$$AX=\mathbf{0}$$

其中,A 是 $m\times n$ 阶矩阵;X 是未知向量。显然,n 维零向量是齐次方程组的解。当齐次方程组有惟一解时,解就是零向量。若 $m=n$,则此

时系数矩阵 A 的行列式非零。

当 $m=n$ 时，如果 A 的行列式为零，则方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解。非零解由齐次方程组的基础解系表示。

齐次方程组的基础解系有如下特点：

(1)如果矩阵 A 的秩为 $r(r\leqslant n)$，则基础解系含 $n-r$ 个向量。

(2)基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是一组线性无关的向量组。

(3)基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$中的每一个向量都是该齐次方程组的非零解。

(4)齐次方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的任一解向量 X 均可由基础解系线性表示。

由基础解系的特点可知，齐次方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的通解可表示为基础解系的线性组合，即

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

这就是齐次方程组的解结构。求齐次方程组通解时只须求得基础解系，求基础解系的步骤如图 1.1 所示：

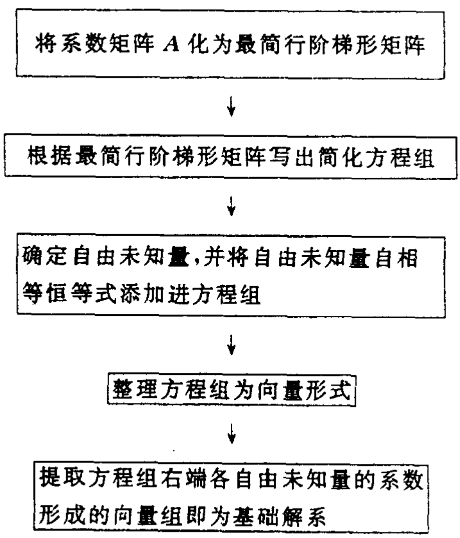

图 1.1

例 1.2 求下列齐次方程组的一个基础解系并写出其通解

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

解:这是一个齐次方程组,它的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

在 MATLAB 中输入矩阵 A,并将其化为最简行阶梯形矩阵,所用命令如下

```
A=[1 -1 1 -1;1 -1 -1 1;1 -1 -2 2]
rref(A)
```

计算结果为

```
A=
    1   -1    1   -1
    1   -1   -1    1
    1   -1   -2    2
ans=
    1   -1    0    0
    0    0    1   -1
    0    0    0    0
```

由最简行阶梯形矩阵,得化简后的方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

取 x_2, x_4 为自由未知量,扩充方程组为

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

整理为向量形式

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

提取自由未知量系数形成的列向量为基础解系，记

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以齐次方程组通解为

$$X = k_1\xi_1 + k_1\xi_2$$

二、非齐次方程组的解结构

记非齐次方程组为

$$AX = b$$

其中，A 是 $m\times n$ 阶矩阵；X 是 n 维未知向量；b 是 m 维已知向量($b\neq \mathbf{0}$ 称为右端向量)。非齐次方程组分有解和无解两大类，当方程组有解时又分有惟一解和有无穷多组解两类。

定理 1.1 设非齐次方程组 $AX=b$ 有无穷多组解，若已知一个特解为 η，而对应的齐次方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，则非齐次方程组 $AX=b$ 的通解为

$$X = \eta + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}$$

上式说明，非齐次方程组的通解由非齐次方程组的一个特解和对应的齐次方程组通解迭加而成。这就是非齐次方程组的解结构。

求非齐次方程组的通解步骤如下：

1. 写出非齐次方程组的增广矩阵；

2. 将增广矩阵化为最简行阶梯形矩阵；

3. 观察增广矩阵与系数矩阵的秩是否相等，若相等方程组有解，

否则无解；

4. 写出对应的简化方程组；

5. 确定自由未知量并添加自由未知量自相等恒等式到方程组；

6. 整理方程组为向量形式。

例 1.3 求下列非齐次方程组的通解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases}$$

解:非齐次方程组的系数矩阵和右端向量为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

在 MATLAB 中输入系数矩阵和右端向量并将增广矩阵化简，所用命令如下

```
A=[1 2 3 1;1 4 5 2;2 9 8 3;3 7 7 2];
b=[3;2;7;12];
c=[A b];
format rat
rref(c)
```

计算机显示出最后的计算结果

```
ans=
     1     0     0     -1/2     31/6
     0     1     0        0      2/3
     0     0     1      1/2     -7/6
     0     0     0        0        0
```

由最简行阶梯形矩阵写出对应的简化方程组为

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{1}{2}x_4 = \dfrac{31}{6} \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \\ x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

取 x_4 为自由未知量，补充恒等式 $x_4=x_4$ 到方程中，得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{31}{6} \\ x_2 = \dfrac{2}{3} \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}x_4 - \dfrac{7}{6} \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

或

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{31}{6} \\ \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{7}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

记

$$\xi = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \eta = \begin{bmatrix} \dfrac{31}{6} \\ \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{7}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

所以，非齐次方程组的通解为

$$X = k\xi + \eta$$