科學圖書大庫

速成極限與連續

自習手冊

譯者 嚴夢輝

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

速成極限與連續

自習手册

譯者 嚴夢輝

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年元月二十五日再版

速成極限與連續

基本定價　1.00

譯者　嚴夢輝　電子學校教官

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話 7813686 7815250 號

發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號

承印者　大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號　電話9719739

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尙有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員王洪鎧氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

Aut 49/06

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

玆特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

譯者的話

數學可說是一門研究如何「自圓其說」的學問，輕鬆處固然逸趣橫生，艱困處可能山窮水盡。比方說，微積分在發展初期，是不能「自圓其說」的；經過十九世紀數學家的努力，把極限和連續性的概念澄清以後，才得使微積分可以「創言」（定義）「立論」（定理），而成爲一個既嚴密又完美的體系。所以一切微積分教本，開宗明義第一章必須先引述極限和連續，才能振振有詞，「引人入勝」；不幸極限與連續的概念，過於抽象，往往會使初學的人，把開宗明義第一章變成「發昏章第十一」了。結果學完微積分以後，只會「依樣葫蘆」（HOW to do），而不能「尋根究底」（Why ?）的可說比比皆是；這實在是數學教學上一個亟待解決的問題。

本書就是針對此一問題提供解決辦法的最佳輔助讀物之一，以生動的筆觸，有趣的例證，使讀者好像在瀏覽散文小品，也好像在做輕鬆的遊戲，不自覺地便進入抽象領域了。

十餘年以前，一個學習應用科學（包括工程科學）的學生，能夠從微積分中學到一個「術」字，已算差強人意；但現在已不合要求，因爲科學快速進展的結果，新的科學問題便源源接踵而來，手執「科學利器」而不知「器」的本質，對那些空前的新問題，如何去「迎刃而解」呢？所以一個近代科學的工作者或研究者，同時必須是一個應用數學的專才

，絕非誇大之詞。

本書的目的，就是希望帮助讀者能夠把握微積分的本質，也就是能夠探本求源地了解微積分的基礎，以滿足時代的需要。

本書對於各級學校的數學教師，在教學上也極具參考價值，因爲先由直覺（具象）的引導，再至形式（抽象）的建立，已成爲公認的最佳教學方法。

希望讀者從本書中獲取心得，在微積分的學習過程中能收事半功倍之效，那麽本書的翻譯，也許不算是災梨禍棗了。

譯　者

前　言

本書是極限和連續性的一項研究，爲了補充正式微積分敎本之不足，設計編寫而成。以各種不同的方法來討論極限和連續性，使學生從相互比較中獲得了解。

函數的連續性及數列的極限，擺在函數的極限之前來作引述，希望學生從這些簡單概念的研究中培養實力，當他遇到函數的删心鄰域，極限點及極限等深奧的概念時，不致忽略了深藏於極限之下的單純典型。

在未給學生計算種種極限之前，我們先表述這樣的事實：若f在其定義域中的b點爲連續，則 $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$.

如要學生計算函數f的極限，而此函數在b點並不連續的話，那麼他可以把函數f的定義域加以擴大，創立一個在b點爲連續的新函數g；此一擴大函數的極限，便可用簡單的代換法來計算了。

例如以

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3)$$

而論，函數$g = \{(x, y) \mid y = x + 3, x \in R_e\}$是由函數

$$f=\{(x,y)\mid y=\frac{x^2-9}{x-3},x\neq 3\}$$

擴大「一點」而來。函數g在點3是連續的，所以 $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)$.

所編訂的練習，極大部分都比書中引述的材料要容易些。我們經常用有計劃的練習來介紹一個主題；比方說，第一章就是以一些不嚴密的計劃性練習開始出發，然後給函數和數列予以明確的定義，並更進一步地指定一些合乎要求的計劃性練習。

我們已經發現，計劃性的練習，在引發和誘導學習方面，是具有功效的。學生受了進度中刺激部分的暗示，如果他細心閱讀，必能作出如編訂者所預期的反應。當本書逐漸向前推進時，我們適時運用聯想，也就是以過去進度中的觀念作爲企發，那些特別必要的刺激，也就不再贅述了。

在未進行次一進度之前，必須鼓勵學生寫出該進度的反應；因爲已經證實，學生必須實際作成反應，他才能體驗到計劃教學在學習上具有事半功倍的效果。

本書編寫時，曾蒙許多人士從旁協助，作者衷誠的表示謝意；尤其是 John Otis, Warren Brainard, Alex Michalos, Cheryl Phillips 等諸位先生，實在都是本書的共同作者。

李　維　特

（Teddy C. J. Leavitt）

敬告讀者

第一章雖然不需要任何數學知識也可閱讀，但在本書逐步推進以後，假定你已學完高級中學應授的一般數學課程。由於部分讀者也許沒有學過集合、不等式、或絕對值，所以我們已把這些題材容納在附錄裡面，如果你覺得印象模糊，請翻開附錄；在那裡可能就有你所需要的資料。

第一章一開始，便已編入一項計劃性的練習。所設計的進度，由兩部分組成：第一部分是刺激，含有讀者應該學習的知識；第二部分是主動反應，是作者希望你對於刺激所應寫出反應的一番說明。

請把進度中的反應部分遮蓋起來，閱讀刺激部分，並寫出你的答案；然後把你的反應和作者的反應作一比較。有時我們會暫時放棄已經採納的編訂格式，把一些認爲你可以接受的知識，穿插在進度的反應部分裡面去。

我們曾以欣慰的心情來撰寫本書，希望你覺得它生動而有趣。

目　錄

譯者的話	V
前言	VII
敬告讀者	IX
第一章：連續的直覺研究	1
第二章：數列的極限	12
第三章：連續性	36
第四章：極限	58
第五章：關於連續性和極限的定理	92
第六章：微積分預習	119
題集	144
習題答案	148
附錄：集合，不等式及絕對值	150
索引	158

第一章：連續的直覺研究

有些基本的概念，經歷幾百年之久，湮沒不彰，然後被揭穿了，才成為偉大的發現。另外一些已知的而多年來認為清楚明白的觀念，被下過定義和探索之後，却又顯露出新的意義來了。

穴居的初民，當他留心野獸遺下的足跡時，便會注意到一隻夾着大尾巴的野獸，它的尾巴在地上拖過去之後，在足印之間，常常留下一根**連續**的線條。如果那隻野獸翹起尾巴向左一甩，那麼尾巴留下的痕跡便**不連續**了（見圖1－1）。

這樣一個初民認為理所當然的簡單概念，竟成為數學大家研究的對象，似乎有點不可思議；但一些具有眞正數學天才的人，確已終其畢生之力，來研究連續和連續有關的問題。事實上，經過一番明確的數學定義以及再定義之後，這一概念，在今天已使整個數學領域大放異彩了。若干數學家不惜上窮碧落下黃泉，要去制服那個粗獷的現代巨人——拓樸學（形勢幾何學），其實拓樸學純然是一種連續的研究。

我們的老祖宗，像今天有些人一樣，認為江河中傾瀉而下的流水是連續的，而數學的連續概念則有所不同，我們認為此種流水並不連續。由上面的研究，我們實已定出連續的條件，那就是當我們考慮連續的時候，馬上會聯想到兩點間的密接情況。如果在發源處兩個彼此靠近的水分子，以後

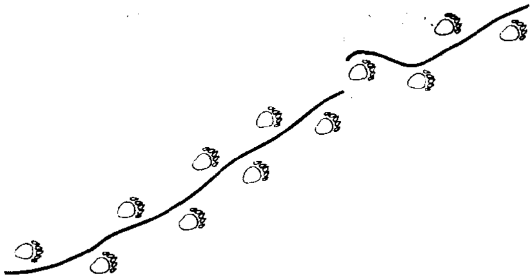
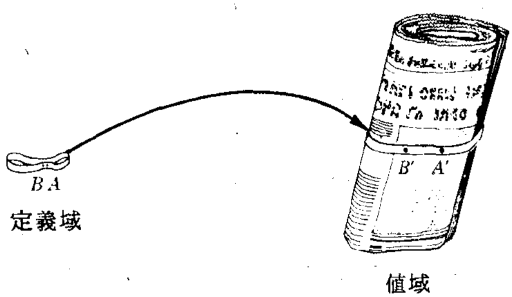


圖 1-1

一直保持難捨難分的關係，這種流水，也唯有這種流水，才可稱爲連續。所以奔騰於密西西比河的流水是不連續的，因爲在明尼蘇達時，兩個相擁在一起的水分子，還沒有到達紐奧爾良以前，可能因任何手段把它們分開了。

這種決定連續的方法，如果固執不變，我們將可想像似乎沒有東西是連續的了。我們所下的定義，縱然有如作繭自縛，要尋找任何連續的東西，看來已無可能性；但是，連續仍然俯拾即是。拉開橡皮圈綑紮一份報紙，這個簡單的動作，就是一種連續的變換。

圖 1-2

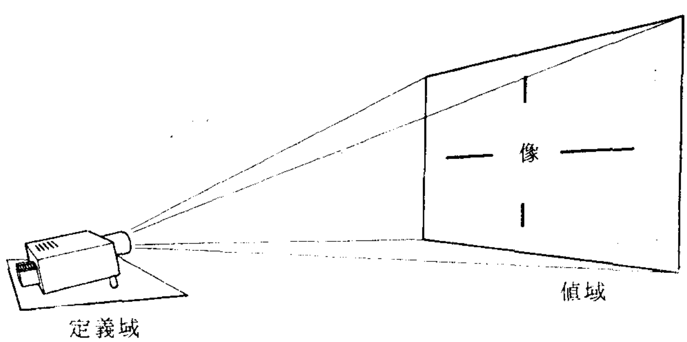


橡皮圈未拉開前，在上面彼此密接的兩點A和B（圖 1－2），當橡皮圈套上報紙以後，在比例上來說（相對），這兩點還是互相靠近的。橡皮圈套住報紙的伸展情形，稱爲未拉時橡皮圈上所有各點（變換的**定義域**），至圍繞報紙時橡皮圈上所有各點（變換的**值域**）的一種**連續變換**。（如果橡皮圈拉斷了，是不是連續變換呢？—— 譯者）。

現在，我們不惜冒着有礙觀念上單純性的危險，引用兩個希臘字母，ε（讀音ㄞ·ㄆ·ㄙㄧ·ㄌㄨㄥ）和δ（讀音ㄉㄞㄦㄊㄚ）。如果被拉開的橡皮圈，在值域中（報紙上）拉長至定義域中（未拉開）的兩倍，我們說「對於任何ε，有$\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$的存在，而使定義域中以$\delta$密接於$A$的各點，轉變至值域中以$\varepsilon$密接於$A'$的一點。」這種希臘字母的意思是說，若橡皮圈未拉開時，上面有一點在A點的½吋範圍之內，則當橡皮圈套上報紙以後，該點必在A'點的1吋範圍之內。

你知我懂的話不說，偏要鬧這種彆扭幹什麼呢？原來前面所談的連續，已經有條件加以限制，因而形成了標準化的ㄞ·ㄆ·ㄙㄧ·ㄌㄨㄥ　ㄉㄞㄦㄊㄚ　語言，我們覺得，用這種嚴密的說法，比漏洞百出的非數學語言更要順理成章。

圖 1－3



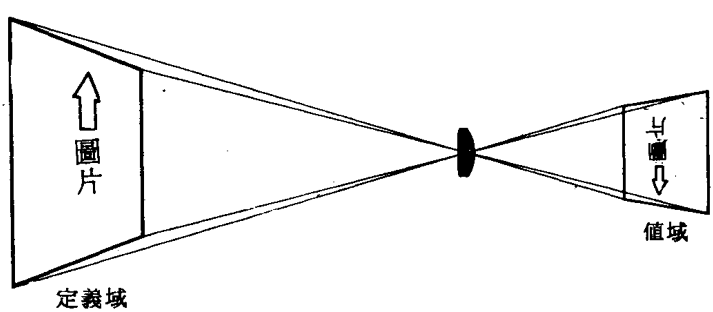
希望讀者完成此項研究以後，對 ε ，δ 語言之易於了解和運用，也有同感。

如果有方法定出密接值，那麼定義域和值域之間的任何對應，便可拿來做連續的檢定了。幻燈機的裝置，就是能夠產生連續變換的一例，它把幻燈片上各點（定義域），投射到銀幕上各點（値域）（圖1－3）。比方說，銀幕上相隔1吋的兩點，是幻燈片上相隔 $1/100$ 吋的兩點之像。既知值域中的 ε 密接值，當可計算定義域中的 δ 密接值，所以在定義域中以 δ 相密接的任何兩點，在値域中將成爲以 ε 相密接。這種射影，我們叫做幻燈片上各點，完全投射於銀幕上各點的**連續映像**（變換）。本例中，$\delta = 1/100\ \varepsilon$.

反之，要使一張圖片變成較小的拷貝，我們可以裝設一套透鏡組（圖1－4），投射所得，便是較小的像了。另一方面，在定義域中指定一些可計算的 δ 密接值，便可獲得値域中的任何 ε 密接值。値域中相隔 $1/100$ 吋的兩點，可能由定義域中相隔 $1/10$ 吋的兩點轉變而來，這種情形，δ 要比 ε 大10倍。不可忘掉第一例中的 δ ，只有 ε 的 $1/100$.

兩個例子中最重要的一件事，就是對於値域中任何已知

圖1-4



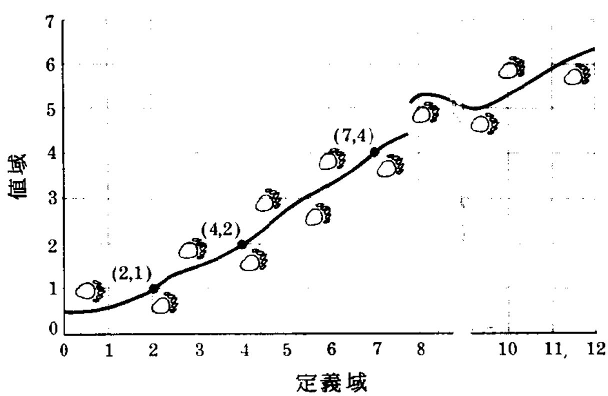
的密接值，都有辦法計算定義域中的密接值。至於值域中的點，是否比定義域中的點靠近些，那是無關宏旨的。

眞實事物如能適合嚴格規定的模型，我們才可稱它們爲連續的。連續是一個抽象名詞，不能直接應用於眞實的事物，但可應用於模型。指定某些符號來代表定義域，值域和變換，就可判定我們的模型是否連續了。

穴居初民認爲連續的獸跡，以數學的標準來說也是連續的。我們可以給定義域和值域做這樣的限定：使定義域中彼此挨近的點，送入或映入值域中彼此靠近的點。

在圖１－５中，值域是左邊的鉛直線，定義或是獸跡下方的水平線。我們認爲由尾巴描成的線條，上面有數目無限的點，每一點用一個序對（ x ， y ）來表示。假定尾跡上有一點，在代表值域的直線之右兩個單位，及代表定義域的直線上方一個單位，這一點便可用序對　２，１）來標定了。點（４,２）是在代表值域的直線之右四 個單位，及代表定義域的直線上方兩個單位。

圖１-５



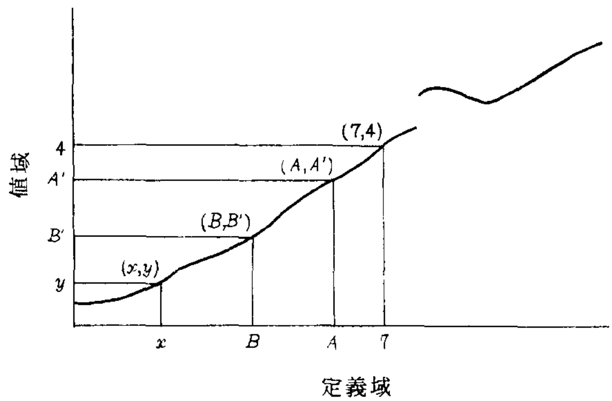


圖 1-6

在圖 1 - 6 中，值域內的 A' 點和 B' 點，不妨看作和定義域中的 A 點及 B 點相結合，而尾跡上的（ A,A' ）點及（ B,B' ）點，代表 A 至 A' 及 B 至 B' 的變換。尾跡上的（ x，y ）點，是將定義域中的 x 映至（送至）值域中的 y 而成。（ 7，4 ）點既然在尾跡上，所以定義域中的點 7 已映至值域中的點 4 。

剛才所說的連續，實有加以澄清的必要。所謂連續或不連續，唯一所指的，實際是對**變換**而言。如果我們談到橡皮圈上的點，由一個位置轉變到另一位置，那麼可稱這種變換是連續的，因爲在定義域中彼此密接的點，已被送入值域中而彼此仍然密接。河川的流水是不連續的，因爲在變換的定義域中（河源），兩個靠近的水分子，在值域中（河口），可能**不**再靠近了。事實上，由於蒸發或其他變化，有些水分子未必能夠一直被帶到河口。

反之，地圖上河川的圖形，又可代表定義域（經度）中