

陈铁云、陈伯真编

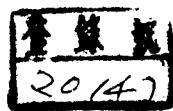
开口薄壁
杆件的弯曲、扭转
与稳定性

ILCOIL

国防工业出版社

开口薄壁杆件的 弯曲、扭转与稳定性

陈铁云 陈伯真 編



國防工業出版社

1965

內 容 簡 介

开口薄壁杆件是工程中应用得相当广泛的结构之一，特别是用于航空、船舶、车辆及起重机等结构中。本书较详尽地叙述了开口薄壁杆件的弯曲、扭转与稳定性的基本理论以及开口薄壁杆系的扭转理论，并且还讨论了开口薄壁杆件扭转与稳定性问题的能量解法。本书可供结构工程技术人员以及大专院校师生参考之用。

开口薄壁杆件的 弯曲、扭转与稳定性 陈铁云、陈伯真 編

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可出字第 074 号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

850×1168 $1/32$ 印张 $6\frac{3}{8}$ 162 千字

1965 年 10 月第一版 1965 年 10 月第一次印刷 印数：0,001—2,450 册

统一书号：15034·1020 定价：(科七) 1.10 元

序

本书是根据編者在高等工业学校讲授“薄壁結構”的讲义补充修訂而成。

开口薄壁杆件是工程中应用得相当广泛的结构之一，特别是用于航空、船舶、車輛及起重机等结构中。目前关于这方面的书籍虽已有不少种，但均为外国作者所編，内容不太适合需要。因此編者根据現有資料編写了本书，供工程技术人员以及大专院校师生参考。

本书共分四章。第一章叙述开口薄壁杆件的弯曲与扭轉理論，其中着重討論了开口薄壁杆件的約束扭轉，是薄壁杆件弯扭理論的基础。第二章討論开口薄壁杆系——連續薄壁杆及薄壁剛架的計算，是杆系結構力学的基本原理在薄壁杆系扭轉問題上的应用。第三章广泛地討論了开口薄壁杆件的稳定性問題，通过这一章可对一般杆件的稳定性問題有一个完整全面地認識。第四章專門討論薄壁杆件的能量解法。

由于我們的水平有限，本书一定存在着不少缺点，热烈希望讀者批評指正。

編 者

一九六四年八月

目 录

序.....	3
緒言.....	7
第一章 开口薄壁杆件的弯曲与扭轉.....	9
§1 开口薄壁杆件的弯曲	9
§2 开口薄壁杆件的自由扭轉	15
§3 开口薄壁杆件約束扭轉的基本現象与假設	17
§4 約束扭轉时的应力	29
§5 开口薄壁断面的扇性几何特性	33
§6 弯曲扭轉力矩与双力矩	45
§7 約束扭轉的扭角微分方程式及其积分	51
§8 約束扭轉与杆件复杂弯曲的比拟	65
§9 开口薄壁杆件在复杂受力状态时的計算	70
§10 圣維南原理在薄壁结构中的应用	78
§11 开口薄壁杆件繞定軸的扭轉	80
第二章 开口薄壁杆系的扭轉.....	85
§1 連續多跨薄壁杆的計算——力法	85
§2 連續多跨薄壁杆的計算——位移法	94
§3 简单薄壁剛架計算	109
§4 节点不可动的复杂薄壁剛架計算	114
§5 可动节点的薄壁剛架計算	116
第三章 开口薄壁杆件的稳定性.....	124
§1 概述	124
§2 中心軸向受压杆的弯扭稳定性	124
§3 中心軸向受压杆的扭轉稳定性	133
§4 中心軸向受压杆在彈性介质中的弯扭稳定性	134
§5 定軸扭轉薄壁杆件在中心受压时的稳定性	140

§ 6 薄壁杆件在弯曲与压缩力作用下的稳定性	144
§ 7 开口薄壁杆件在纯弯曲时的侧向稳定性	156
§ 8 开口薄壁杆件在横荷重作用下的侧向稳定性	159
第四章 开口薄壁杆件的能量解法	173
§ 1 开口薄壁杆件的变形位能	173
§ 2 约束扭转的位移计算	175
§ 3 用虚位移原理求解开口薄壁杆件的扭转问题	181
§ 4 开口薄壁杆件稳定性的能量解法	189
§ 5 开口薄壁杆件侧向稳定性的能量解法	193
附录 1 工字钢的扇性几何特性	200
附录 2 槽钢的扇性几何特性	202
参考书目	204

緒 言

如果彈性杆件的三个尺度（杆件的长度、断面的厚度与高度）相差很大，則这种彈性杆件叫做薄壁杆件（图 1）。通常当杆件断面的高度 h （或寬度 b ）与厚度 δ 之比等于 $5 \sim 10$ ，同时杆的长度 l 与断面高度 h （或寬度 b ）之比 ≥ 10 时就认为是薄壁杆件了。

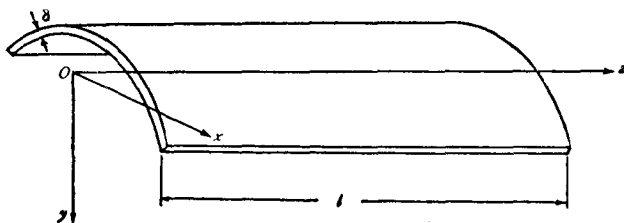


图 1

实际上遇到的多数薄壁杆件，它們的断面是由几个狭长的矩形所組成，例如工字鋼和槽鋼等（图 2 a、b）；另外也有一些薄壁杆件的断面是圓弧形或曲綫形的，如图 2 c、d 所示。

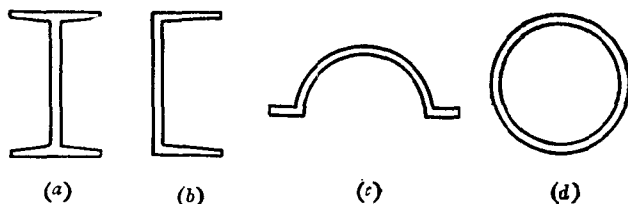


图 2

图 2 中 a、b、c 所示的杆件断面形状是不封閉的，称为开口断面，亦就是彈性力学中所謂的单連区断面。图 2 d 所示的杆

件断面是封閉形的，称为封閉断面，或更具体称为双連区的断面。

今后，我們仅限于討論开口断面的薄壁杆件，或简称开口薄壁杆件。

作为一个杆件，它在外力作用下，主要将发生弯曲变形或扭轉变形。此外，如果杆件受軸向压力或在某种横向载荷作用下，还可能丧失稳定性。因此目前研究的薄壁杆件問題，包括弯曲、扭轉与稳定性三个方面。

开口薄壁杆件的純弯曲与普通实心梁（例如矩形断面梁）的純弯曲没有什么差别，但在一般弯曲情况下，开口薄壁杆件的断面出現了切应力，这切应力的合力通常并不通过断面的弯曲中心，于是杆件将发生扭轉，因此研究开口薄壁杆件的扭轉問題，無論在杆件受扭或受弯的情形下都是十分必要的。

在工程结构中，为了減輕结构的重量，合理地充分地利用材料，使得薄壁结构的应用日益广泛，特别是在航空、船舶、車輛及起重结构等方面，因此学习薄壁结构有很大的实际意义。另一方面，通过薄壁杆件的学习还可以对普通实心杆的弯曲和稳定性問題有一个更进一步的理解和体会。

本书将依次地討論开口薄壁杆件的弯曲、扭轉和稳定性問題及开口薄壁杆件系統的扭轉問題。在以后的研究中，我們采用这样的座标系統：将座标原点放在杆件断面的形心， x 軸和 y 軸与杆件断面平行， z 軸沿杆长方向；并使 x 、 y 、 z 三軸之間符合右手座标系統如图1中所示。

因此，对于等断面的薄壁杆件來說， z 軸就是杆件断面形心的連綫，这根綫叫做杆的軸綫或中心綫。

第一章 开口薄壁杆件的弯曲与扭转

§ 1 开口薄壁杆件的弯曲

設有一等断面的开口薄壁杆件, 两端支承在支座上, 杆上受到沿长度分布的荷重 $q(z)$ 的作用(图 3, 图中未画支座)。于是杆将发生弯曲变形, 在杆的断面上有弯曲正应力与弯曲切应力产生。

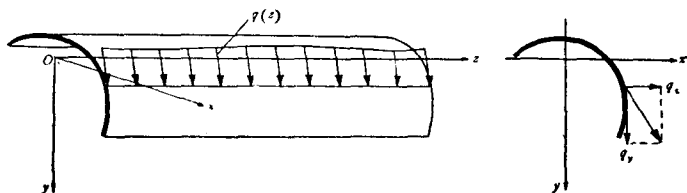


图 3

薄壁杆件的这种弯曲問題, 可以和普通梁的弯曲問題一样, 利用平断面假定。因此可求得和普通梁弯曲时同样的应力计算公式。

然而薄壁杆件在一般情况下, 問題并不是这样简单, 所以下面我們把問題討論得具体一些。

設所討論的开口薄壁杆件的断面是任意形状的, o 为断面的形心, 并規定座标軸 ox 与 oy 为断面的主慣性軸, 即对于这軸, 断面的慣性积为零。

假定外荷重 $q(z)$ 的作用平面的方向是任意的, 我們可以把它分解为平行于 yoz 平面与平行于 xoz 平面的两分量 $q_y(z)$ 及 $q_x(z)$ 。

暂时先討論杆在 yoz 平面中的弯曲(图 4)。根据材料力学中的熟知公式, 有关系式:

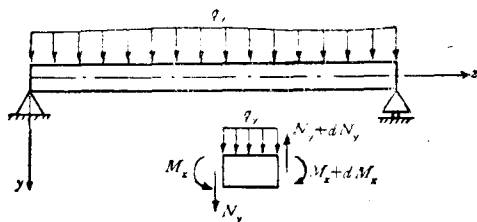


图 4

$$\left. \begin{aligned} EI_x \frac{d^2 v}{dz^2} &= M_x, \\ \frac{dM_x}{dz} &= N_y, \\ \frac{dN_y}{dz} &= q_y, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 v ——杆件在 $yo z$ 平面中的挠度，沿 y 轴的正向为正；

M_x 与 N_y ——杆件在 $yo z$ 平面中弯曲时，断面的弯矩与剪力，它们的正向表示在图 4 上^①；

I_x ——杆件断面对 x 轴的惯性矩。

杆件断面的弯曲正应力为

$$\sigma_1 = -\frac{M_x y}{I_x}, \quad (2)$$

杆件断面的弯曲切应力为

$$\tau_1 = -\frac{N_y S_x^{\text{отс}}}{\delta I_x}, \quad (3)$$

式中 δ ——杆件断面的厚度；

$S_x^{\text{отс}}$ ——断面的截取部分对 x 轴的静矩^②。

对于图 5 中所示的薄壁杆件断面，在计算断面上任意点的切

① 公式 (1) 中所采用的符号法则与船舶结构力学教程 (一) “杆及杆系的弯曲和稳定性”中规定的相同，见参考书 [1]。

② 符号 $S_x^{\text{отс}}$ 的上角 отс 是俄文 отсечение 的缩写，表示截取部分之意。

应力时, S_x^{0TC} 为

$$S_x^{0TC} = \int_0^s y \delta ds, \quad (4)$$

式中 s ——沿断面中心线度量的断面上任意点的座标。

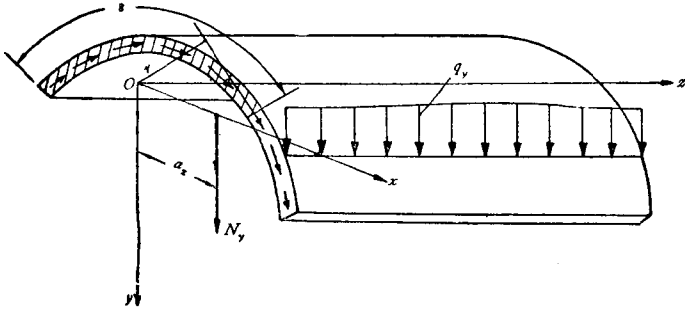


图 5

对于薄壁杆件, 由于断面的厚度很小, 故假定断面上的切应力沿壁厚均匀分布是完全可以的。这样, 杆件断面的切应力就可以用合力 $\tau_1 \delta$ 来代表, 这个合力, 亦就是沿着断面中心线单位长度的切力, 叫做切力流。根据公式 (3)、(4) 可知切力流的计算公式为

$$\tau_1 \delta = - \frac{N_y}{I_x} \int_0^s y \delta ds. \quad (5)$$

断面上切力流的合力等于切力 N_y , 设此切力流合力的作用线与 x 轴交点的座标为 a_x , 则 a_x 的值可由下面的关系式决定:

$$\int_0^{s_1} \tau_1 \delta r ds = N_y a_x,$$

式中 s_1 ——断面中心线的全长;

r ——断面形心至断面中心线上任意点的垂线长[●] (见图 5)。

由此可得

● r 的方向与断面中心线外法线方向一致时为正。

$$a_x = \frac{1}{N_y} \int_0^{s_1} \tau_1 \delta r ds. \quad (6)$$

在一般情况下，杆件上的外荷重 q_x 与切力 N_y 并不位于同一平面内，因此杆件将发生扭转。除非外荷重恰好位于距离杆件中心轴为 a_x 的地方，这样杆件将只弯不扭。

将 $\tau_1 \delta$ 的表达式 (5) 代入公式 (6)，得座标 a_x 的值为

$$a_x = -\frac{1}{I_x} \int_0^{s_1} r ds \int_0^s y \delta ds. \quad (7)$$

下面我们再讨论杆件在 xoz 平面中的弯曲，这时有关系式：

$$\left. \begin{aligned} EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} &= M_y, \\ \frac{dM_y}{dz} &= N_x, \\ \frac{dN_x}{dz} &= q_x, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中 u ——杆件在 xoz 平面中的挠度，沿 x 轴的正向为正；

M_y 与 N_x ——杆件在 xoz 平面中弯曲时，断面的弯矩与切力；

I_y ——杆件断面对 y 轴的惯性矩。

杆件断面的弯曲正应力 σ_z 与切力流 $\tau_z \delta$ 相应为

$$\sigma_z = -\frac{M_y x}{I_y}, \quad (9)$$

$$\tau_z \delta = -\frac{N_x}{I_y} \int_0^s x \delta ds. \quad (10)$$

这个切力流的合力为 N_{xy} 合力的作用点在距断面形心 a_y 处，其值为

$$a_y = -\frac{1}{N_x} \int_0^{s_1} \tau_z \delta ds = -\frac{1}{I_y} \int_0^{s_1} r ds \int_0^s x \delta ds. \quad (11)$$

如果外荷重 q_x 也恰好作用在距断面形心 a_y 处，则杆件只发生弯曲不会扭转。

● 公式 (7) 中的量 $r ds$ 为杆件断面扇形微面积的两倍，以后用 dw_s 表示，见本章 § 3。

我們把断面上座标为 (a_x, a_y) 的点叫做杆件断面的弯曲中心, 简称弯心。于是可知, 如果外荷重的作用点通过弯心, 则杆件只发生弯曲不发生扭转; 如果外荷重的作用点不通过弯心, 则杆件在弯曲的同时还要发生扭转。

如果杆件断面对称轴, 则弯心一定位于对称轴上。对于某些简单形状的断面, 不用导得的公式 (7) 和 (11), 直接根据断面的切力流, 求出其合力的作用点, 就可以得到弯心。

下面是一个计算薄壁杆件断面弯心的例子。

例 计算图 6 中所示等厚度槽钢断面的弯心位置。

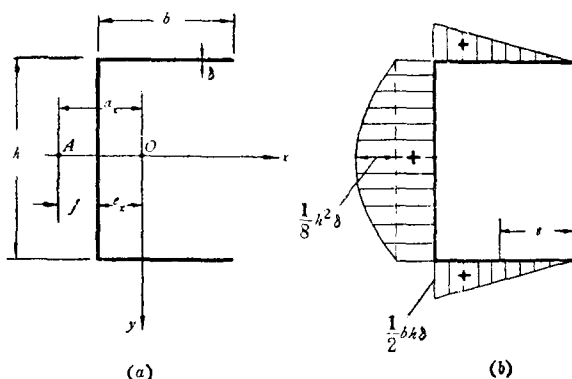


图 6

解 設槽鋼断面的形心距腹板的距离为 e , ox 与 oy 为主惯性轴。由于这断面有一根对称轴, 即 ox 轴, 故弯心位于 ox 轴上, 即 $a_y = 0$ 。下面就来求 a_x 。

現根据公式 (7), 先計算出积分

$$\int_0^s y \delta ds = S_x^{0\tau 0},$$

为此沿断面中心綫順时針取座标 s , 求得的 $S_x^{0\tau 0}$ 值表示在图 6 (b) 上。

有了 $S_x^{0\tau 0}$ 后, 再計算积分

$$\int_0^{s_1} r ds \int_0^s y \delta ds = \int_0^{s_1} S_x^{0rc} r ds,$$

对于此槽鋼断面，可将积分分为下翼板、腹板及上翼板三部分进行计算：

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} S_x^{0rc} r ds &= \frac{h}{2} \int_0^b S_x^{0rc} ds + e \int_b^{b+h} S_x^{0rc} ds + \frac{h}{2} \int_{b+h}^{2b+h} S_x^{0rc} ds \\ &= \frac{1}{8} h^2 b^2 \delta + e \left(-\frac{1}{2} h^2 b \delta + \frac{1}{12} h^3 \delta \right) + \frac{1}{8} h^2 b^2 \delta \\ &= \frac{1}{4} h^2 b^2 \delta + e \left(-\frac{1}{2} h^2 b \delta + \frac{1}{12} h^3 \delta \right). \end{aligned}$$

于是得

$$a_x = -\frac{h^2 b^2 \delta}{4I_x} - \frac{e}{I_x} \left(-\frac{1}{2} h^2 b \delta + \frac{1}{12} h^3 \delta \right).$$

所得的 a_x 为负的，表示在 x 的负方向。

注意到这个槽鋼断面的惯性矩 I_x 为

$$I_x = 2b\delta \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \delta h^3 = \frac{1}{2} h^2 b \delta + \frac{1}{12} h^3 \delta \text{①},$$

故

$$a_x = -\frac{h^2 b^2 \delta}{4I_x} - e,$$

而弯心距腹板的距离为

$$f = |a_x| - e = \frac{h^2 b^2 \delta}{4I_x}.$$

以上的分析告诉我们，在一般情形下，如果外荷重不通过杆件的弯心线（弯心轴），那末这个杆件除了弯曲之外，还要发生扭转。在处理这种问题时，我们可以把不通过弯心轴的外荷重用一個通过弯心轴的外荷重及作用于垂直杆轴平面的力矩（扭矩）来代替。于是就把问题分为两个部分：一是通过弯心轴的横荷重引起的弯曲，另一是在扭矩作用下杆件的扭转。

① 对于这个薄壁杆件断面，无须考虑翼板本身的惯性矩。

此时杆件断面除了有由公式 (2)、(5)、(9)、(10) 表达的弯曲正应力与切应力以外，还要加上由于扭转而引起的扭转应力。

本节我们讨论了杆件的弯曲问题，下面就要来研究杆件的扭转问题。

§ 2 开口薄壁杆件的自由扭转

设有一等断面的开口薄壁杆件 (图 7)，两端受到大小相等，方向相反的扭矩 M_K 作用，并不受其他约束，于是杆件将发生自由扭转或称纯扭转。

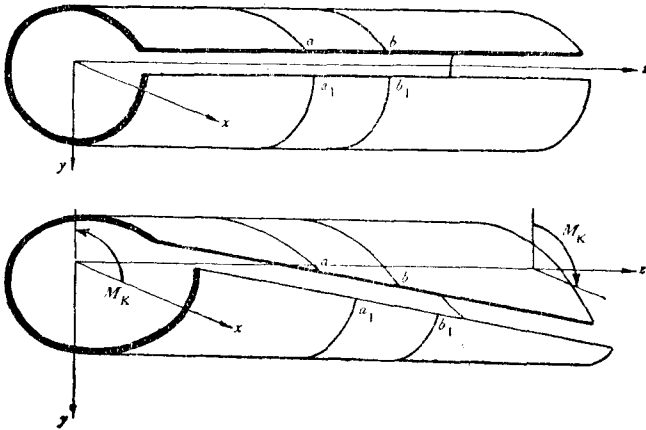


图 7

非圆断面杆件在扭转时断面不保持平面而要发生翘曲 (断面凹凸)，即断面上各点发生不同的轴向位移。但是在自由扭转的情况下，杆件各个断面的翘曲变形都相同，亦即各个断面上相应点在扭转时的轴向位移相同。例如在图 7 中，原来长度相等的两个线段 ab 与 a_1b_1 在扭转后仍然相等，并且 $aa_1 = bb_1$ 。

因为杆件各断面的翘曲相同，因此杆件的纵向纤维不发生轴向应变，于是杆件断面上没有正应力发生而只有扭转引起的切应

力。切应力的分布与杆件断面的形状有关，但在各个断面上的分布情况都相同。

自由扭转的另一特点是，当扭转时杆件的纵向纤维不发生弯曲。这一特点在工字梁作自由扭转时可以清楚地看出（图 8）。当工字梁两端承受扭矩发生自由扭转时，其翼板及腹板上的纵向纤维仍保持直线，上下翼板仅相互旋转一角度，即发生了扭角。

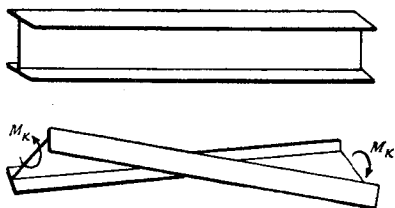


图 8

对于开口薄壁杆件，由弹性力学中已求得在自由扭转时杆件单位长度的扭角或称扭率为常量，即

$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_K}{GI_a} \quad (1)$$

式中 θ —— 杆件断面的扭角；

G —— 材料的剪切弹性模数；

I_a —— 杆件断面的扭转惯性矩。

根据公式（1）可求出杆件任意断面相对于左端的扭角 θ 与扭矩间的关系为

$$\theta = \frac{M_K z}{GI_a} \quad (2)$$

对于由几个狭长矩形所组成的杆件断面，以上公式中的扭转惯性矩可充分精确地取作：

$$I_a = \frac{\alpha}{3} \sum_i b_i \delta_i^3 \quad (3)$$

式中 i —— 组成断面的狭长矩形的数目；

b_i —— 矩形的长度；

δ_i —— 矩形的厚度；

α —— 形状参数，与杆件断面的形状有关，其数值为：

角钢 $\alpha = 1.0$ ；