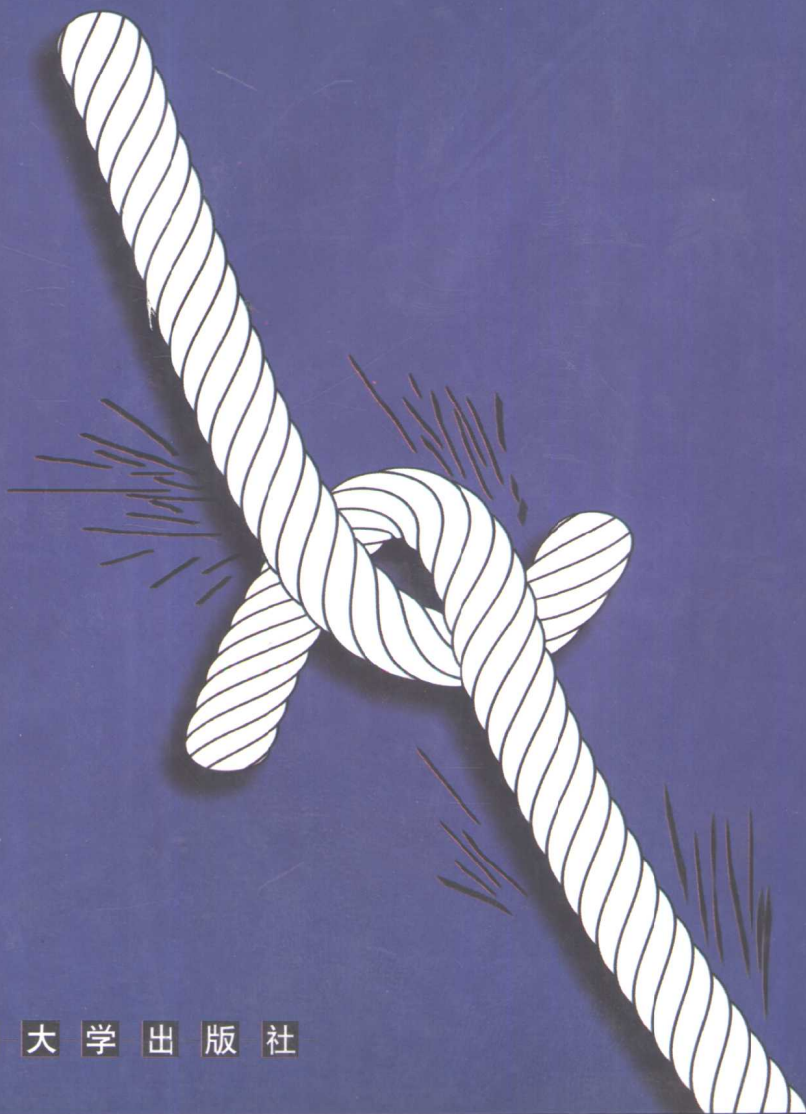


/// **高等院校教材**

大学物理实验

王 荣 主编



国 防 科 技 大 学 出 版 社

大学物理实验

主 编 王 荣
编 者 王素红 汪志远 酃复合
主 审 徐永安

国防科技大学出版社

- 长沙 -

内容简介

由王荣等同志编写的《大学物理实验》教材是根据国家教委颁布的《高等工业学校物理实验课程教学的基本要求》和信息工程大学物理实验课程教学大纲,结合本校物理实验项目内容和实验仪器的实际情况编写的。全书共分五部分:绪论;第一章 误差理论和数据处理方法;第二章 物理实验常用仪器介绍;第三章 基础实验项目(包括了16个基本实验项目);第四章 近代物理及信息光学实验(包括了9个基本实验项目)。在25个基本实验项目中,考虑到教学改革和大学各专业知识面的不同,共编写了38个实验内容。教材在着眼于提高学生能力、培养创造性人才,在注意拓宽学生的知识面、正确处理传统实验和新实验的关系、注意联系实际应用等方面,具有一定的特色。本书可作为在校各专业本、专科学生基础实验用书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/王荣主编. —长沙:国防科技大学出版社,2002.4
ISBN 7-81024-824-3

I.大… II.王… III.①大学物理 ②实验 IV.O433

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

E-mail: gkdcbs@pubic.cs.hn.cn

责任编辑:罗青 责任校对:黄煌

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张:16 字数:370千

2002年4月第1版第1次印刷 印数:1-5500册

*

定价:19.80元

前 言

大学物理实验是学生进入大学后第一门独立开设的基础实验课程, 对提高学生的全面素质、培养学生的动手能力、研究问题和解决问题的能力起着重要作用, 并为后续各专业课程的学习奠定坚实的基础。

本书是根据国家教委颁布的《高等工业学校物理实验课程教学的基本要求》和大学物理实验课教学大纲精神, 结合解放军信息工程大学物理实验项目和实验仪器的实际情况编写的。本书以解放军信息工程大学三所学院编写的大学物理实验讲义为基础, 参考了部分院校物理实验讲义, 吸收并融合了编者多年的教学经验和体会。

全书共分六部分: 绪论; 第一章 误差理论和数据处理方法; 第二章 物理实验常用仪器介绍; 第三章 基础实验项目 (包括了 16 个基本实验项目); 第四章 近代物理和信息光学实验 (包括了 9 个基本实验项目); 总附录。在 25 个基本实验项目中, 考虑到大学各专业知识点的不同, 共编写了 38 个实验内容, 供教学选择。

本书按照循序渐进的认识规律, 内容编排由浅入深, 从详细列出实验步骤、数据表格与误差估算公式, 过渡到学生自己列表格、自推公式进行误差分析, 逐步培养学生独立从事科学实验和撰写实验报告的能力。在大多数实验项目中, 以实验简介的形式介绍了该实验的历史背景、实验技术、方法和应用前景等知识。能使学生了解实验的历史, 学会科学思维的方法和一般规律。将实验仪器单独成章, 便于归类、比较和说明各种类型实验仪器的特点及注意事项, 同时也培养了学生查阅资料和技术说明的能力。本书每个实验都有一定量的思考题, 大多数实验有预习思考题, 它们将有助于学生实验前有的放矢和对实验的深入理解。其中有些思考题较难, 可供优秀学生参考。

本书新编的“音频信号光纤传输技术实验”和“光纤通讯系统实验”等内容是一般大学的物理实验教材上没有的。考虑到我校理学院应用物理专业学生的需要, 因此增加了这部分内容。

本书着眼于提高学生能力、培养创造性人才, 在注意拓宽学生的知识面、正确处理传统实验和新实验的关系、注意联系实际应用等方面具有一定的特色。本书可作为高等工科院校各专业本、专科学生和理学院应用物理专业学生基础实验用书, 也可作为教师参考书。

本书第三章的 8 个基本实验项目 (14 个实验内容) 由王素红同志编写; 第四章的 6 个基本实验项目 (8 个实验内容) 由汪志远同志编写; 第一、二章和第三、四章的 11 个基本实验项目 (16 个实验内容) 由王荣同志编写并负责全书统稿。邴复合同志为本书制作了大量的精美插图; 徐永安同志主审了全书。

解放军信息工程大学基础部和训练部教保处的领导, 对本书的编写给予了热情的关心和支持。在此表示衷心感谢。

由于编写时间仓促，编者水平所限，教材中难免存缺点和错误，欢迎使用本书的师生提出宝贵意见。

编者

2002年1月26日

目 录

绪论	(1)
§ 1 物理实验课的地位和任务	(1)
§ 2 物理实验课的基本环节	(2)
第一章 误差理论和数据处理方法	(3)
§ 1 测量及其误差	(3)
§ 2 准确度、精密度、精确度	(5)
§ 3 系统误差的修正和限制	(5)
§ 4 偶然误差的估算方法	(7)
§ 5 测量的不确定度和测量结果的表述	(10)
§ 6 有效数字及其运算规则	(12)
§ 7 数据处理的基本方法	(15)
§ 8 实验的基本方法和操作技术	(18)
练习题	(27)
第二章 物理实验常用仪器介绍	(30)
§ 1 长度测量仪	(30)
§ 2 质量测量仪	(33)
§ 3 时间测量仪	(35)
§ 4 常用成套力学仪器	(37)
§ 5 常用电路元件	(42)
§ 6 电学测量仪器	(44)
§ 7 常用光源简介	(59)
§ 8 光学仪器	(60)
§ 9 近代物理实验仪器	(66)
第三章 基础实验项目	(69)
实验 3-1 基本物理量的测量	(69)
实验 3-2 力学量的测量	(71)
实验 3-2-1 转动惯量的测量	(70)
实验 3-2-2 杨氏弹性模量的测量	(75)

实验 3-3 元件的伏安特性和电桥	(78)
实验 3-3-1 电阻的伏安特性	(78)
实验 3-3-2 二极管的伏安特性	(83)
实验 3-3-3 用惠斯登电桥测电阻	(85)
实验 3-4 电表的改装和校准	(89)
实验 3-5 电位差计	(93)
实验 3-5-1 用电位差计测电源的电动势	(94)
实验 3-5-2 用电位差计校准毫安表与电阻箱	(97)
实验 3-6 静电场的描绘	(98)
实验 3-7 磁场的测量	(102)
实验 3-7-1 利用霍尔法测量磁感应强度	(102)
实验 3-7-2 铁磁材料磁滞回线的观测	(106)
实验 3-8 电磁场中的电子束	(109)
实验 3-8-1 电子束的聚焦与荷质比的测定	(110)
实验 3-8-2 电子束的偏转	(114)
实验 3-9 示波器的使用	(117)
实验 3-10 分光计的原理与使用	(128)
实验 3-10-1 分光计的调整及测量三棱镜折射率	(128)
实验 3-10-2 光栅的衍射测波长	(135)
实验 3-11 光的干涉	(137)
实验 3-11-1 牛顿环与劈尖干涉	(138)
实验 3-11-2 迈克尔逊干涉仪	(141)
实验 3-12 超声波在空气中传播速度的测量	(145)
实验 3-13 光电效应测量普朗克常数	(148)
实验 3-14 电荷的测量	(151)
实验 3-15 全息照相技术	(156)
实验 3-16 传感器系列实验	(162)
实验 3-16-1 应变式传感器	(162)
实验 3-16-2 电涡流式传感器	(165)
实验 3-16-3 霍尔传感器	(167)
实验 3-16-4 光纤位移传感器	(169)

第四章 近代物理和信息光学实验

实验 4-1 光速的测量	(171)
实验 4-2 Frank—Hertz 实验	(178)
实验 4-3 光的偏振	(186)
实验 4-4 钨的逸出电位的测定	(191)
实验 4-5 塞曼效应	(198)

实验 4-6 氢原子光谱的测定	(207)
实验 4-7 光谱定性分析	(216)
实验 4-7-1 摄谱	(216)
实验 4-7-2 识谱	(219)
实验 4-8 音频信号光纤传输技术实验	(223)
实验 4-9 光纤通讯系统实验	(229)
实验 4-9-1 光发送模块实验	(229)
实验 4-9-2 光接收模块实验	(235)
实验 4-9-3 模拟、数字电话传输系统实验	(239)
总附录	(244)

绪 论

§ 1 物理实验课的地位和任务

物理学是建立在实验基础上的一门科学。物理规律的发现和物理理论的建立,都必须以严格的物理实验为基础,并受到实验的检验;同时,物理学研究中的一些新的假设、预言,最终要在实验中进行验证,以判断它们的正确性。例如,英国的托马斯·杨和法国的菲涅耳的干涉实验及衍射实验,为光的波动学说奠定了基础;由于对黑体辐射实验事实的研究,法国物理学家普朗克给出了黑体辐射定律并提出了能量量子化的概念,从而诞生了量子力学;又如 1919 年,英国的爱丁顿拍出日全蚀照片,用于分析光线在太阳附近的弯曲情况,从而为爱因斯坦在 1915 年提出的广义相对论提供了有力的证据;著名的物理学家杨振宁、李政道提出了弱相互作用宇称不守恒理论,经实验物理学家吴健雄实验验证后,在 1957 年获得了诺贝尔物理学奖。

物理学的发展史是理论和实验相辅相成的历史。作为培养高级工程技术人员的高等工程院校,不仅要使学生具有深广的基础理论知识,而且要有从事现代化科学实验的较强能力,以适应“面向现代化、面向未来”的要求。本课程的具体任务是:

一、学习和掌握物理实验的基本知识

通过对物理实验现象的观察、分析和物理量的测量,学习和掌握物理实验的基本知识、基本方法和基本技术;掌握如何运用实验原理和方法去研究某个物理问题;熟悉常用仪器的基本原理、结构性能及使用方法。

二、培养和提高学生的科学实验能力

1. 自学能力:通过提前阅读实验教材或说明书、参考资料等,做好实验前的准备,培养学生的自学能力。

2. 动手能力:熟悉一些常用仪器的使用;掌握一些基本的实验技能,如水平、垂直的调节,光路的共轴、视差消除的调节,电路中分压、限流方法的使用以及如何排除实验故障等。

3. 分析和表达能力:能够正确合理地列出实验数据表格、记录和处理实验数据,绘制实验曲线,分析实验结果,撰写一定水平的实验报告。

4. 设计能力:对于简单问题,能够从研究对象或课题要求出发,自己查阅资料,依据某个原理,设计实验方案,确定实验参数,选配仪器,拟定实验程序。

三、培养和提高学生的科学实验素质

通过实验培养学生实事求是、理论联系实际的科学作风;严肃认真、不怕困难、艰苦努力的科学态度;勇于探索、创新的科学精神;以及遵守纪律、团结协作、爱护公共财产的良好品德。

§ 2 物理实验课的基本环节

一、预习

由于实验课时间有限,为保证顺利和高质量地完成实验,实验前必须认真阅读实验教材,明确实验目的、原理、实验方法和条件,了解实验步骤,根据实验要求画出数据记录表格,完成实验预习思考题并写出预习报告。

二、操作

操作是实验课的中心环节,教师用一定的时间讲解有关的实验内容和要求,使用仪器的方法和注意事项,对实验中的难点给出提示。要求学生严格按照仪器设备和操作规程进行实验,掌握正确的调整 and 操作方法,实验中要善于多观察、多分析,反对蛮干。若发现异常现象或仪器故障,应立即向教员报告。

把实验测量的原理数据和实验现象及时记录下来,如实验的条件,仪器的规格、型号和参数等,注意按有效数字规则记录实验数据并注意标明物理量的单位。如要更改数据,需注明原因,以便在实验结束后分析、核对。测试结束后,数据要经教员检查合格并签名后,方可整理仪器、离开实验室。

三、实验报告

实验报告是对实验工作的全面总结,实验报告一律采用学校统一的实验报告纸书写。要求:字体工整、语句简练、阐述清楚、图表规范、结果正确、分析客观。一份完整的实验报告应包括以下几个方面:

1. 实验名称。

2. 实验目的。

3. 实验仪器:包括型号、规格、参数等。

4. 实验原理:写出简要的实验理论依据、实验方法及公式,画出电路图、光路图等。设计性实验要求写出自拟的实验方案、设计的实验线路、选择的仪器等。注意,不要照抄讲义,应用自己的语言叙述。

5. 实验步骤:扼要说明实验的关键步骤和主要注意事项。

以上各项均写在预习报告中。

6. 实验数据、表格、作图及计算:表格要简单明了,分类清楚而有条理。

7. 误差分析:包括确定实验结果的误差范围,分析产生误差的原因及减小误差可采取的措施。

8. 实验结果:包括测量值 N 、绝对误差 ΔN 和相对误差 E ,并写成 $N = N \pm \Delta N$ 的形式。若有观察某现象或验证某些物理规律的内容时,要写出实验结论。

9. 问题讨论:包括对实验中的现象解释、对实验方法的改进及建议、作业题、实验后的体会等。

第一章 误差理论和数据处理方法

任何测量和实验都受到误差的影响,估算并分析误差是科学实验过程中极为重要的组成部分。有关误差理论及其应用已发展成为一门专门的学科。

任何实验结果,如果没有标明误差,它几乎没有用,因为人们将对它的可靠性提出质疑,所以误差是评价测量结果必不可少的依据。物理实验课应赋予学生正确的、最基本的误差理论知识,包括误差的成因及分类、减少测量误差的基本方法,以及如何评价、正确地表达和估算误差等。本章虽为物理实验而写,亦适用于其他实验过程,是一切实验的基础知识。

§ 1 测量及其误差

一、直接测量和间接测量

测量就是用一定的量具或仪器,通过一定的方法,直接或间接地与被测对象进行比较。测量分直接测量和间接测量。直接从仪器或量具上读出待测量的方法,称为直接测量。由若干个直接测量量经过一定的函数关系运算后获得待测量的方法,称为间接测量。

二、绝对误差和相对误差

任何测量值与真值之间都有偏差,这一偏差称为测量值的误差,用 Δx 表示。

$$\Delta x = x - x_0$$

任何测量都存在着误差,间接测量的误差来源于直接测量的误差。

任何一个测量结果表示为

$$x \pm \Delta x \quad (1-1-1)$$

Δx 反映的是测量结果总的绝对误差,一般取正值(绝对值), $\pm$ 号说明 Δx 是个范围,所以(1-1-1)式表示 x 的真值(一般是多次测量的算术平均值)有较大的概率出现在 $(x - \Delta x) \sim (x + \Delta x)$ 区间。

真值是一个理想的概念,一般不可能准确知道。有关真值可以从以下几种情况得出:

1. 理论值:如三角形三个内角的和为 180° 等。
2. 公认值:世界公认的一些常数值,如普朗克常数等。
3. 相对真值:用准确度高一个数量级的仪器校准的测定值。

规定:校准仪器的误差应比测量仪器误差小一个数量级,即二者误差的比值应为 $1:3 \sim 1:20$ 。

4. n 次测量的算术平均值:对一个不变的量进行 n 次测量后,其算术平均值 $\bar{x}$ 可视为真值的最佳近似值。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1-1-2)$$

必须指出:这样的计算方法是以等精度测量为前提,即每次重复测量的测量人员、工具、方法及环境必须保持不变。当用算术平均值 $\bar{x}$ 代替真值时,所求的误差称为偏差。

多次测量的平均值最接近于真值,各次测量值与 $\bar{x}$ 的偏差也很接近于它们的误差,可以不去区分偏差与误差的细微区别,统称为误差。仅以绝对误差来评价测量结果是不全面的。例如,用米尺测量两个物体的长度,得出一个是 5cm,一个是 25cm,测量的绝对误差为 0.05cm,二者的绝对误差相同,但前者误差占测量值的 $\frac{0.05}{5} = 1\%$,后者占 $\frac{0.05}{25} = 0.2\%$,显然测量误差的严重程度不同。为了全面评价测量的优劣,必须同时表示出其测量结果的相对误差 E ,即

$$E = \frac{\text{绝对误差 } \Delta x}{\text{测量算术平均值 } \bar{x}} \times 100\% \quad (1-1-3)$$

三、误差的分类

根据误差产生的原因和性质不同,将误差分为两大类,即系统误差和偶然误差。

(一)系统误差

在同一条件下多次测量同一量时,误差的大小和方向保持恒定,或在条件改变时,误差的大小和方向按一定规律变化。

系统误差来源于以下几个方面:

1. 仪器误差:由于仪器设计、制造、装配等方面引起的误差。如零点不准、气垫导轨没有调到水平、天平不等臂等。

2. 环境误差:由于各种环境因素与仪器要求的工作状态不一致而引起的。如磁电式仪表旁有强磁场存在,环境温度不符合标准电池使用的温度范围等。

3. 理论和方法误差:由于实验理论和实验方法的不完善带来的误差。如测量电压时没有考虑电压表内阻对电路的影响,测量温度时没有考虑热量的散失等。

由于系统误差的特点是它的确定性,因此不能用多次重复测量的方法来减小或消除它,处理系统误差要根据具体情况采取相应的方法加以消除。

(二)偶然误差

在同一条件下多次测量同一个量时,每次出现的误差的大小和正负没有确定的规律,但就总体来说仍服从一定的统计规律,如图 1-1-1, $f(x)$ 为误差的概率分布函数, Δx 为绝对偶然误差。从图中可看出偶然误差具有以下特点:

1. 单峰性:测量值与真值相差愈小,可能性愈大;与真值相差很大的,可能性较小。

2. 对称性:偶然误差大小和方向出现的概率相等。

3. 有界性:在一定测量条件下,误差的绝对值不会超过一定的限度。

4. 抵偿性:偶然误差的算术平均值随着测量次数增加而越来越小。

根据以上特点,可通过多次测量求平均值的方法,使偶然误差相互抵消,算术平均值

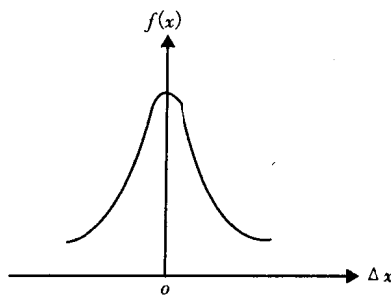


图 1-1-1

是与真值较为接近的数值,可作为测量的结果。

偶然误差来源于多种因素的扰动,例如,环境的温度、气压、磁场等不确定的因素,以及读数时每次对准标志(刻线、指针等)的不一致,估读数的不一致,被测对象本身的微小起伏变化等。

应该指出,从原则上讲,系统误差可以消除,而偶然误差不能消除。一个具体的测量中出现的误差往往既含有偶然误差,又含有系统误差。在实验中,当实验条件稳定且系统误差可以掌握时,就尽量保持在相同条件下做实验,以便修正系统误差。当系统误差未能掌握时,常常想一些办法使系统误差随机化,以便在多次测量取平均时抵消一部分。例如,一支米尺刻度不均匀,可以利用米尺不同刻度部位来测量,然后取平均值。另外有时只是为了说明误差的限度,两种误差不再加以区别。如许多不太精密的仪表所标的仪器最大允许误差(电表的准确度级别),就是包括两种误差在内的。

§ 2 准确度、精密度、精确度

准确度、精密度和精确度是评价测量结果好坏的三个术语。

一、准确度

准确度是指测量值与真值的接近程度。准确度高,系统误差小。它反映测量结果系统误差的大小。

二、精密度

精密度是指重复测量所得结果之间相互接近的程度。精密度高,说明重复性好,误差分布密集,即随机误差小。它反映了测量结果偶然误差的大小。

三、精确度

精确度是指综合评定测量结果重复性和接近真值的程度。精确度高,说明精密度和准确度都高。它反映了偶然误差和系统误差的综合效果。

§ 3 系统误差的修正和限制

系统误差的处理较为复杂,它要求实验者既要有较好的理论基础,又要有一定的丰富经验。在物理实验中,系统误差的处理主要考虑的是由于仪器的精确度所限和实验方法、原理不完善而导致的系统误差。对未定系统误差若不能消除可作为偶然误差来处理。

一、发现系统误差的一些简单方法

现将发现系统误差的一些常用方法介绍如下:①用不同方法测量同一个量,看结果是否一致,若结果不一致,它们之间的差别又超出了偶然误差的范围,则肯定存在系统误差;②仪器的对比,如用两个电流表接入同一电路,把高一级的表作为标准表,找出另一只表的误差修正值;③改变实验条件,将结果对比,如在磁场测量中将带有磁性的物质移近,看对测量结果的影响;④改变实验中某些参量的数值,并进行对比。

2. 理论分析法:分析实验所依据的理论公式要求的条件与实际情况有无差异;分析仪

器所要求的使用条件是否已达到等等。如用三线摆测量物体的转动惯量的公式 $J = \frac{M_0 g D_0 d}{16\pi^2 l} T_0^2$, 所要求的条件是摆角 $\theta < 5^\circ$; 三条摆线等长; 大小圆盘水平; 转动轴线在两盘中心连线, 若不满足其中任何一个条件, 就会引入系统误差。

3. 分析数据法: 在相同的条件下对某一物理量进行多次测量, 测量结果的误差不服从统计规律(因为偶然误差是遵从统计规律的), 则说明存在系统误差。

以上只是从普遍意义上介绍了几种发现系统误差的方法, 在实际中常常会有许多更具体的方法, 需要实验者在不断提高实验技能的基础上去发现、总结。

二、系统误差的修正和限制

应当指出, 任何“标准”的仪器也有它的不足之处, 要绝对消除系统误差是不可能的。系统误差的修正和限制没有一个普遍通用的方法, 只能针对每一个具体情况采用不同的具体措施。下面简单介绍几种典型的限制或消除系统误差的方法。

1. 替换法: 在测量装置上对待测量进行测量后, 立即用一个标准量替换待测量, 再次进行测量, 并调到同样的情况, 从而得出待测量等于标准量。

2. 异号法: 改变测量中的某些条件, 使两次测量中误差一次为正值, 另一次为负值, 取其平均值。

3. 交换法: 将测量中的某些条件相互交换(如交换被测物位置), 使交换前后产生的系统误差大小相等方向相反, 从而抵消了系统误差。例如: 用滑线式惠斯登电桥测电阻时, 把待测电阻与标准电阻交换位置再次测量, 交换前后所得值为 R_{S1} 和 R_{S2} , 则被测电阻 $R_x = \sqrt{R_{S1} \cdot R_{S2}}$, 消除了滑线电阻丝不均匀所带来的误差。

4. 对称观测法: 若有随时间线性变化的系统误差, 可将观测程序对某时刻对称地再做一次。例如, 一只灵敏电流计零点随时间有线性漂移, 在测量读数前记下一次零点值, 测量读数后再记一次零点值, 取两次零点值的平均值来修正测量值。又如, 测电阻温度系数的实验, 测电阻前记录一次温度, 测电阻后再记录一次温度, 取两次平均值作为该点温度值等。

由于很多随时间变化的误差在短时间均可认为是线性变化, 因此, 对称观测法是一种能够消除随时间变化的系统误差的好方法。

5. 半周期偶数观测法: 对周期性误差, 可以每经过半个周期进行偶数次观测。例如, 分光计刻度盘偏心带来的角度测量误差是以 360° 为周期的, 它采取相距 180° 的一对游标, 每次测量读两个数, 则两个角位置之间的夹角是两个游标上分别算出的夹角的平均值。

以上仅仅是列举了几种减小或消除某些简单的系统误差的方法, 实际上, 许多系统误差的出现, 常常是由于实验所用的理论不完善, 或理论背后还隐藏着未被发现的某些规律性, 历史上不乏先例。系统误差的出现, 促使人们去深入研究它, 发现新的更精细的规律性。

§ 4 偶然误差的估算方法

一、单次直接测量的误差估计

以仪器最小刻度的一半或仪器误差(仪器出厂检定值)作为绝对误差。有时也可以根据实际情况,采用仪器的最小刻度或某些合理数值作为绝对误差。

以相对误差的形式来反映仪器误差的大小。例如我国将电工仪表分为七个准确度等级,即 0.1;0.2;0.5;1.0;1.5;2.5;5.0。

若已知仪表的级别和量程,仪器误差为 Δx ,则

$$\Delta x = \text{级别} / 100 \times \text{量程}$$

需要说明的是,有些情况仪器误差并不能反映测量值误差的大小,如用 0.1 分度的秒表计时,由于人的感官灵敏度的限制与技术上的问题,会造成在“启动”和“停止”秒表时所用的时间已超过 0.1s,测量误差大于仪器误差。在实际操作中很多情况需要对误差进行估计。例如秒表误差可估计为 0.2s;使用钢卷尺测较长距离时,误差可估计为 5mm,甚至 10mm。总之,估计误差可根据具体情况综合考虑。

二、多次直接测量的误差

1. 最小二乘法原理与算术平均值:在测量条件不变的情况下,对待测物测量了 n 次,结果为 $x_1, x_2, \dots, x_n$,这 n 个测量值都带有偶然误差,由于真值 x_0 不知道,误差无法计算。那么从这 n 个测量值中,怎样找出真值的最佳估计值呢?在 1805 年和 1809 年,勒让德和高斯提出了最小二乘法,它是根据“一个等精度测量列的最佳值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小”这一准则提出的。设这个值为 x_0 ,上述准则可表示为

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 = \text{最小值}$$

为了求 x_0 ,取 $f(x_0)$ 的导数,并令其等于零,即

$$\frac{df(x_0)}{dx_0} = -2 \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) = 0$$

则有

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \quad (1-4-1)$$

这一组数据的算术平均值,就是真值的最佳估计值,所以可用多次等精度测量的算术平均值来表示测量结果。当测量次数无限增加时,算术平均值将无限接近于真值。

2. 算术平均误差 $\Delta \bar{x}$:当重复测量 n 次时,算术平均误差为

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} \quad (1-4-2)$$

它表示对物理量 x 所做的任意一次测量,其测量值误差出现在 $-\Delta \bar{x}$ 到 $+\Delta \bar{x}$ 之间的概率为 58%。这是对测量结果可靠性的一个估计。求出绝对误差后,相对误差为

$$E = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} \times 100\% \quad (1-4-3)$$

3. 标准误差 σ : 多次测量的偶然误差也可用标准误差来表示。它是这样定义的: 对于 n 次测量中某一次测量值的标准误差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1-4-4)$$

它表示多次测量中任意一次测量的误差落在 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间的可能性为 68.3%。

4. 算术平均值的标准误差: 根据误差理论可证明, 算术平均值的标准误差是单次测量标准偏差的 $1/\sqrt{n}$ 倍, 即

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (1-4-5)$$

5. 极限误差: 由于偶然误差的出现服从统计规律, 就是说误差出现在某一范围内有一定的概率。可以证明, 当误差呈正态分布时, 误差落在 $\pm 3\sigma$ 之内的概率为 99.7%, 超过 $\pm 3\sigma$ 的概率只有 3‰。在实际测量中, 若出现误差为 3σ 的测量值, 应予以剔除, 称为 3σ 极限误差。

注意当多次测量所求得误差小于仪器误差时, 经常取仪器误差作为测量结果的误差。

例 1 将某一物体的长度用米尺测量 5 次, 得到的测量值分别为 $x_1 = 3.41\text{cm}$; $x_2 = 3.43\text{cm}$; $x_3 = 3.45\text{cm}$; $x_4 = 3.44\text{cm}$; $x_5 = 3.42\text{cm}$, 试求测量结果的表达式。

解 算术平均值为

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5} (3.41 + 3.43 + 3.45 + 3.44 + 3.42) \text{ (cm)} \\ &= 3.43 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

各次测量的绝对误差为

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= |x_1 - \bar{x}| = |3.41 - 3.43| = 0.02 \text{ (cm)} \\ \Delta x_2 &= |x_2 - \bar{x}| = |3.43 - 3.43| = 0.00 \text{ (cm)} \\ \Delta x_3 &= |x_3 - \bar{x}| = |3.45 - 3.43| = 0.02 \text{ (cm)} \\ \Delta x_4 &= |x_4 - \bar{x}| = |3.44 - 3.43| = 0.01 \text{ (cm)} \\ \Delta x_5 &= |x_5 - \bar{x}| = |3.42 - 3.43| = 0.01 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

算术平均误差为

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n |\Delta x_i|}{n} = \frac{1}{5} (0.02 + 0.00 + 0.02 + 0.01 + 0.01) \approx 0.01 \text{ (cm)}$$

大致等于米尺的仪器误差, 所以测量结果可表示为

$$x = \bar{x} \pm \Delta \bar{x} = (3.43 \pm 0.01) \text{ cm}$$

相对误差

$$E = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} = \frac{0.01}{3.43} \times 100\% = 0.3\%$$

三、间接测量误差的估算

直接测量所得的结果都是有误差的, 显然由直接测量值经过运算而得到的间接测量

值也有误差。估算间接测量误差的方法称为误差传递。

设待测量 N 是几个独立的直接测量值 $A, B, C, \dots, H$ 的函数,即

$$N = f(A, B, C, \dots, H) \quad (1-4-6)$$

若各直接测量值的绝对误差分别为 $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots, \Delta H$, 则间接测量值的绝对误差为 ΔN , 其计算方法如下。

将公式(1-4-6)求全微分,得

$$dN = \frac{\partial f}{\partial A} dA + \frac{\partial f}{\partial B} dB + \frac{\partial f}{\partial C} dC + \dots + \frac{\partial f}{\partial H} dH \quad (1-4-7)$$

由于 $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots, \Delta H$ 分别相对于 $A, B, C, \dots, H$ 是一个很少量, 将(1-4-7)式中 $dA, dB, dC, \dots, dH$ 用 $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \dots, \Delta H$ 代替, 则

$$\Delta N = \frac{\partial f}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial f}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial f}{\partial C} \Delta C + \dots + \frac{\partial f}{\partial H} \Delta H \quad (1-4-8)$$

由于具体误差的符号并不知道, 为谨慎起见, 只能做最不利考虑, 认为各项误差将累加, 因此将公式(1-4-8)中各项分别取绝对值相加, 即

$$\Delta N = \left| \frac{\partial f}{\partial A} \right| \cdot |\Delta A| + \left| \frac{\partial f}{\partial B} \right| \cdot |\Delta B| + \left| \frac{\partial f}{\partial C} \right| \cdot |\Delta C| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial H} \right| \cdot |\Delta H| \quad (1-4-9)$$

很明显, 这样做会导致测量结果误差偏大。相对误差为

$$E = \frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{f(A, B, C, \dots, H)} \cdot \left(\left| \frac{\partial f}{\partial A} \right| \cdot |\Delta A| + \left| \frac{\partial f}{\partial B} \right| \cdot |\Delta B| + \left| \frac{\partial f}{\partial C} \right| \cdot |\Delta C| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial H} \right| \cdot |\Delta H| \right) \quad (1-4-10)$$

公式(1-4-9)和(1-4-10)称为误差的传递公式。根据(1-4-9)和(1-4-10)式计算出来的常用误差公式列在表 1-1-1 中, 以供参考。

表 1-1-1 常用误差公式

数学运算关系	误 差	
	绝对误差 ΔN	相对误差 $E = \frac{\Delta N}{N}$
1. $N = A + B + C + \dots$	$(\Delta A + \Delta B + \Delta C + \dots)$	$\left(\frac{\Delta A + \Delta B + \Delta C + \dots}{A + B + C + \dots} \right)$
2. $N = A - B$	$(\Delta A + \Delta B)$	$\left(\frac{\Delta A + \Delta B}{A - B} \right)$
3. $N = A \cdot B$	$(A\Delta B + B\Delta A)$	$\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$
4. $N = A \cdot B \cdot C$	$(BC\Delta B + CA\Delta A + AB\Delta C)$	$\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C} \right)$
5. $N = \frac{A}{B}$	$\frac{B\Delta A + A\Delta B}{B^2}$	$\left(\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \right)$
6. $N = \alpha A$	$\alpha \Delta A$	$\frac{\Delta A}{A} (\alpha \text{ 是任意常数})$