第3篇　刚体力学

主　　编　　费伟智（上海交通大学）
编 写 人　　包宏稼（上海交通大学）
　　　　　　费伟智（上海交通大学）
责任编辑　　朱亚冠

1 平衡问题

1·1 平衡问题的分析与计算方法

分析、计算平衡问题时，可视实际情况选用下列任一方法。

(1)当需要确定平衡系统所受的支承约束力或组成系统的各刚体间相互作用的约束力时，一般用几何静力学中力系的平衡条件来计算(见本篇1·4)。此时，原则上需将组成系统的各刚体要从系统中逐一分离出来，给以单独地分析和研究；分离时，必须将联系各刚体的约束全部解除而代之以作用在各刚体上相应的约束力，并对各刚体作出正确的受力分析(见本篇1·2)。如果不使用基本形式的平衡方程，那末，对所列的各平衡方程一定要使它们彼此都是独立的。平衡方程的各种形式及保证平衡方程独立性的条件见本篇1·4。

(2)当只需要确定作用在平衡机械上各主动力之间的关系(例如，驱动力和工作阻力之间的关系等)，而不要确定约束力的大小时，一般用虚位移原理来计算(见本篇1·6)。此时，总是以整个平衡系统为研究对象，也不必将约束解除，只要将约束对系统的影响通过约束所许可的位移表现出来(见本篇表3-9)。若需要用虚位移原理计算系统中的某个约束力时，则必须解除要计算约束力的那个约束而将该约束力作主动力处理(见本篇1·6·3)。

1·2 受力分析

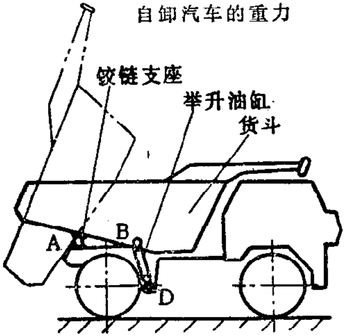
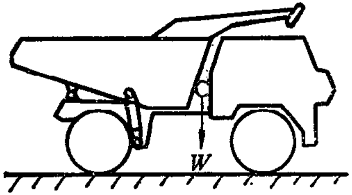
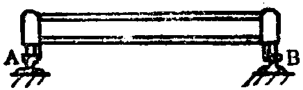
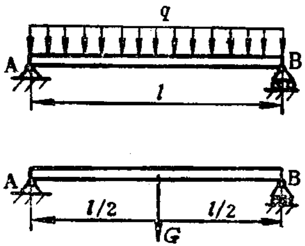
1·2·1 受力图

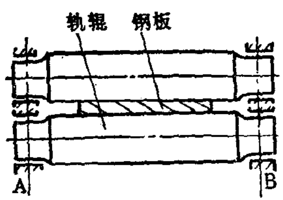
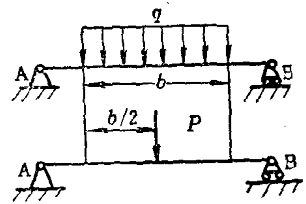
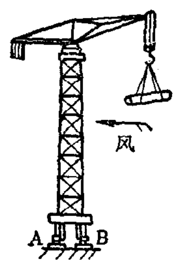
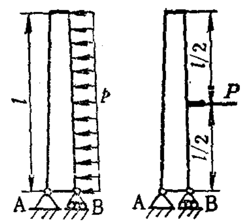
在某结构或其中的某一构件被选定为研究对象以后，就要对它们进行受力分析，然后再作力的计算。一个正确表示其受力情况的简图就是它的受力图。

画受力图时应注意：

(1)结构或构件可画成它的示意图，其形状和尺寸与实际情况按

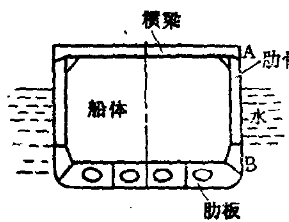
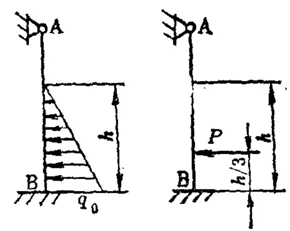
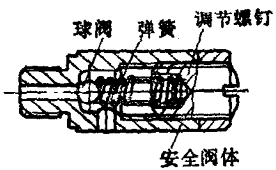
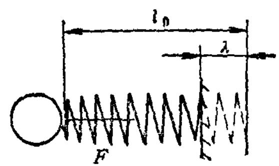
表3-1 几种常见载荷的确定

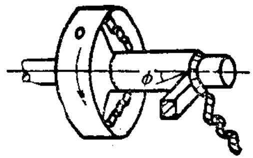
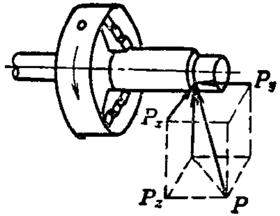
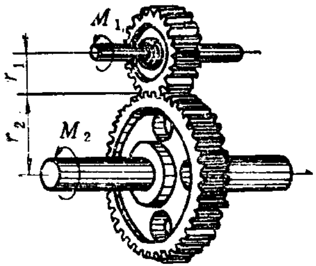
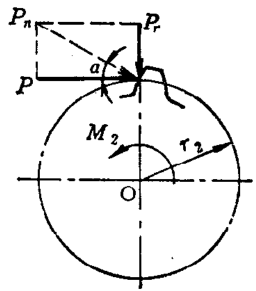
载荷名称	实例	载荷图示	载荷确定
自	自卸汽车的重力  	 	$W=\Sigma w$ N 式中 w—组成汽车各部件的重量 N （汽车重心C的位置确定可参见本篇5·1）
重	梁的重力  	 	均布力： $q=\frac{\rho gV}{l}$ N/m 式中 ρ—材料的密度 kg/m^3 g—重力加速度 m/s^2 V—梁的体积 m^3 集中力： $G=ql$ N

压	压延力 		均布力： q—单位长度上的压力　N/m 集中力： $P=qb$　N 式中　b—钢板宽度　m
力	风力 		均布力： p　风压　N/m^2 集中力： $P=pA$　N 式中　A—与风力垂直的受风面积　m^2

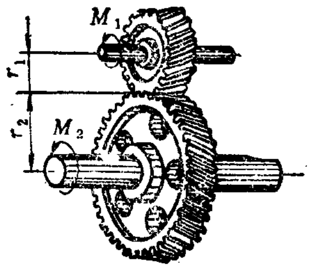
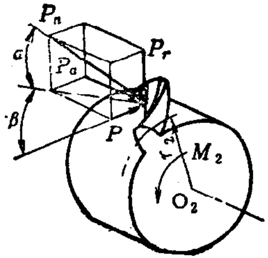
此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（续）

<table>
<tr><th>载荷名称</th><th>实　　例</th><th>载荷图示</th><th>载荷确定</th></tr>
<tr><td>压
力</td><td>静水压力
</td><td></td><td>三角形分布力：
$q_0=\rho g h b$　N/m
式中　ρ—水的密度　kg/m^3
g—重力加速度　m/s^2
h—受压面高度　m
b—受压面宽度　m
集中力：
$P=\frac{1}{2}q_0 h$
$=\frac{1}{2}\rho g b h^2$　N</td></tr>
<tr><td>弹
性
力</td><td>弹簧力
</td><td></td><td>$F=k\lambda$　N
式中　k—弹簧刚度　N/m
λ—弹簧变形量　m</td></tr>
</table>

切削力	切削力 		当 $\phi=75°$ 时 $P_z:P_y:P_x=1:(0.35\sim0.5):(0.4\sim0.55)$ P_z（切削力 P 的切向分量）可估算： 切削钢件时， $P_z \doteq 2000ts$ N 切削铸件时， $P_z \doteq 1000ts$ N 式中 t—吃刀深度 mm s—走刀量 mm/r
齿轮啮合力	圆柱正齿轮啮合力 		$P=\dfrac{M_1}{r_1}=\dfrac{M_2}{r_2}$ N $P_r=P\tan\alpha$ N 式中 P—啮合力 P_n 的圆周分力 N P_r—啮合力 P_n 的径向分力 N M_1、M_2—转矩 N·m α—压力角 °

（续）

载荷名称	实例	载荷图示	载荷确定
齿轮啮合力	圆柱斜齿轮啮合力  	 	$P=\frac{M_1}{r_1}=\frac{M_2}{r_2}$ N $P_a=P\tan\beta$ N $P_r=\frac{P}{\cos\beta}\tan\alpha$ N 式中 P—啮合力 P_n 的圆周分力 N P_a—啮合力 P_n 的轴向分力 N P_r—啮合力 P_n 的径向分力 N M_1、M_2—转矩 N·m α—压力角 ° β—螺旋角 °

比例大体相符。有些空间结构或构件（包括其载荷与支承）如有对称面，则可简化为平面问题处理。

（2）受载情况一般都是已知或可以被测定的，受力图上要如实反映。分布载荷可根据其分布的均匀程度近似地简化为均布力、三角形分布力等等，有时也可作集中力（分布力的合力）处理。

（3）研究对象及其周围与它相联接或接触的物体都是相互约束的。这些周围物体作用给研究对象的力，在受力图上必须根据其约束的方式，用相应的约束力无一遗漏地表示出来。关于约束的简化及约束力的表示见本篇1·2·3。

1·2·2 载荷的确定

在分析、测定或估计某一结构及其构件所受的载荷时，要精确地把握其大小、方向和作用的位置往往是比较困难的。这就要根据结构或构件的实际受载情况作一些合理的简化，也可参考有关的“载荷规范”。

载荷可分为体积力和表面力，根据其作用的具体情况，又可近似地简化为集中力和分布力。表3-1 给出了几种常见载荷的确定及其计算公式。

1·2·3 约束简化和约束力的分析与表示

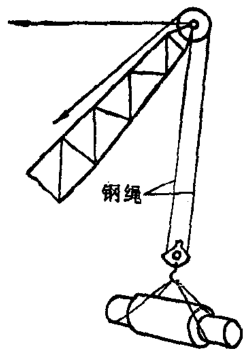
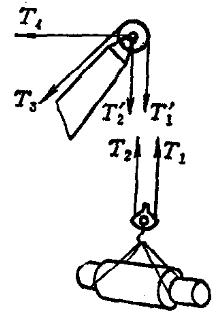
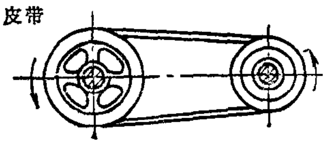
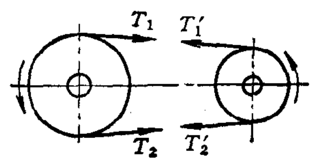
a. 基本类型的约束及约束力的表示 约束对构件的作用力称为约束力。约束力的大小须待平衡条件去确定，而其作用的位置及方位则决定于约束的方式。各种基本类型的约束及约束力的表示见表3-2。

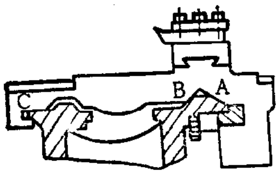
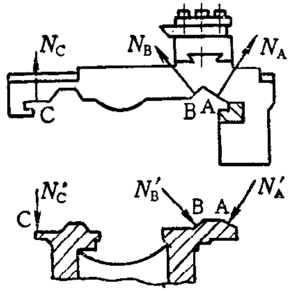
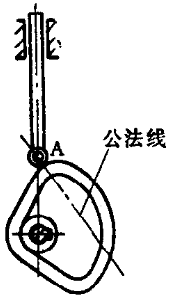
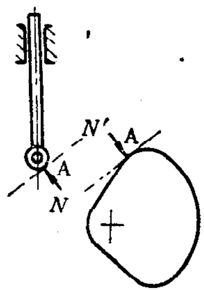
b. 约束简化 工程上约束的形式很多，受力分析时通常总是尽量把它们简化为表3-2 中所列的各种基本类型的约束，并按所属类型表示其约束力。

约束简化是一项较复杂的工作。除有些约束在形态上较为接近表3-2所列的各种约束以外，往往还要根据某些假定或经验来确定，例如：

（1）两端用轴承联接的轴（见图3-1的减速器输入轴），若轴承的宽度较小，则可把该轴简化为简支梁，见图3-1 b。径向止推轴承这一端简

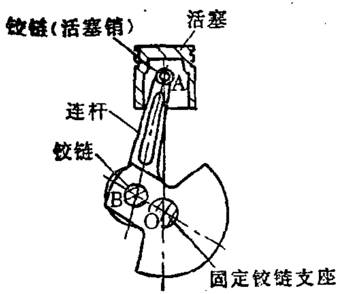
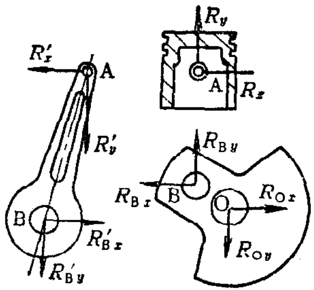
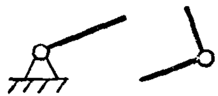
表3-2 基本类型的约束及约束力的表示

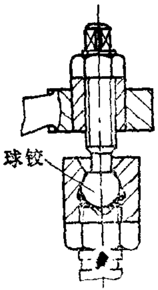
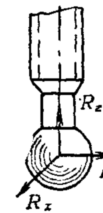
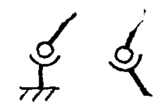
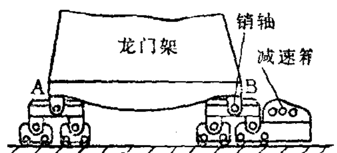
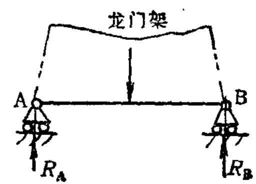
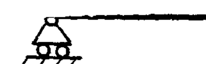
类型	实例	约束力的表示	说明
柔性约束	绳索 		1.约束力T沿拉直后的柔性体中心线作用，且拉住被约束的构件 2.$T_1=-T_1'$ $T_2=-T_2'$
	皮带 		

<table>
<tr>
<td rowspan="2">光滑接触约束</td>
<td>车床导轨
</td>
<td></td>
<td rowspan="2">1.约束力$\boldsymbol{N}$沿接触面的公法线作用，且使构件受压
2.$\boldsymbol{N}_A=-\boldsymbol{N}'_A$
$\boldsymbol{N}_B=-\boldsymbol{N}'_B$
$\boldsymbol{N}_C=-\boldsymbol{N}'_C$
$\boldsymbol{N}=-\boldsymbol{N}'$</td>
</tr>
<tr>
<td>凸　轮
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

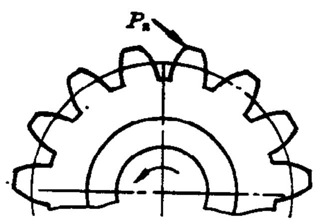
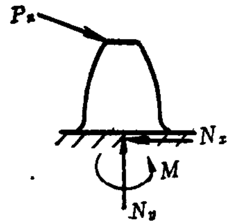
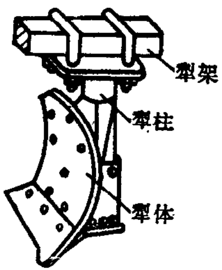
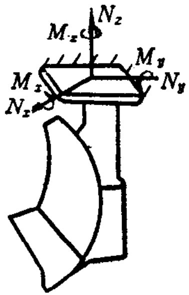
此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(续)

类型	实　　例	约 束 力 的 表 示	说　　明
光滑铰链约束	圆柱铰链  	 	1.约束力$\boldsymbol{R}$通过铰链中心，方向由受力情况而定；通常用它的两个垂直分力R_x、R_y表示 2.$R_x = R_x'$ $R_y = R_y'$ $R_{Bx} = R_{Bx}'$ $R_{By} = R_{By}'$ 3.圆柱铰链可用如下简图表示： 

光滑铰链约束	球铰链 		1.约束力R通过铰链球心，方向由受力情况而定；通常用它的三个垂直分力R_x、R_y、R_z表示 2.球铰链可用如下简图表示： 
	活动铰链支座 （辊轴支座） 		1.约束力R垂直于支承面，且通过支座销轴的轴心 2.活动铰链支座可用如下简图表示： 

(续)

类型	实例	约束力的表示	说明
固定端（或插入端）约束	齿轮根部 		1.构件受平面力系作用时，约束力为力N_x、N_y和力偶M，方向由受力情况而定 2.如构件受空间力系作用，则约束力为： N_x、N_y、N_z（力） M_x、M_y、M_z（力偶） 3.固定端约束可用如下简图表示： 
	犁架 		

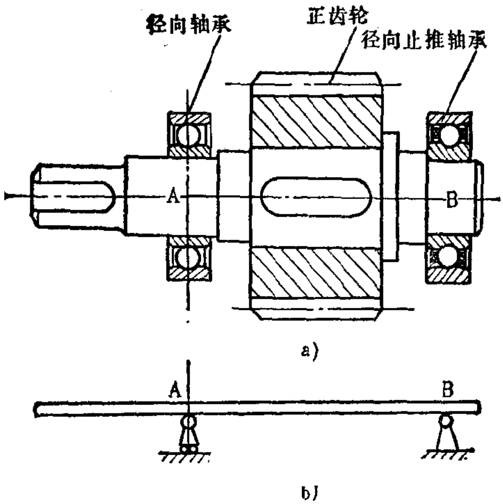


图3-1　减速器输入轴

化为固定铰链支座（约束力的分析与圆柱铰链约束相同），而径向轴承这一端简化为辊轴支座。

（2）万吨水压机中用螺栓固定在两端立柱上的下横梁（图3-2），其两端一般都可简化为固定铰链支座。但若将下横梁简化为一端是固定铰链支座另一端是辊轴支座的简支梁，见图3-2b，实践证明，也能得到较好的近似。

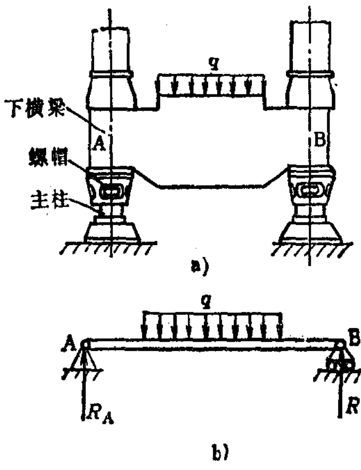


图3-2　万吨水压机的下横梁

（3）桁架中每一杆件的两端实际上都是用铆、焊、螺钉等与相邻杆件连结住的，但对桁架杆件作受力分析时，一般都把杆的两端简化为光滑铰链约束。其计算结果与实际结果出入不大。

1·3 力矩和力偶矩的计算（见表3-3、表3-4）

表3-3 单个力和力偶对点（或轴）的矩

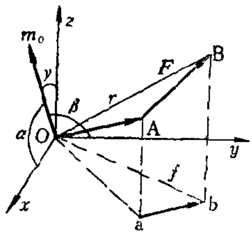
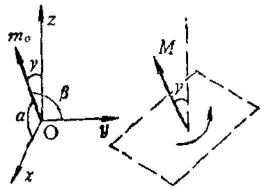
类 别	力	力 偶
图示		
对o点的矩	$\boldsymbol{m}_o=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ $=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$	$\boldsymbol{m}_o=\boldsymbol{M}$
对轴的矩	$m_x=yF_z-zF_y$ $m_y=zF_x-xF_z$ $m_z=xF_y-yF_x$ 或 $m_x=m_o\cos\alpha$ $m_y=m_o\cos\beta$ $m_z=m_o\cos\gamma$	$m_x=M\cos\alpha$ $m_y=M\cos\beta$ $m_z=M\cos\gamma$
说明	1.$\boldsymbol{r}$—力$\boldsymbol{F}$作用点A对O点的径矢 2.α、β、γ—力对O点的矩$\boldsymbol{m}_o$与x、y、z轴间的夹角	1.力偶对任意一点的矩恒等于力偶矩矢量$\boldsymbol{M}$ 2.图中虚线所围成的平面为力偶的作用面。α、β、γ为力偶矩矢量与x、y、z轴的夹角

表3-4　合力和合力偶对点（或轴）的矩

类别	对o点的矩	对　轴　的　矩	说　　明
合力	$\boldsymbol{m}_o=\Sigma\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$	$m_x=\Sigma(yF_z-zF_y)$ $m_y=\Sigma(zF_x-xF_z)$ $m_z=\Sigma(xF_y-yF_x)$	合力对某点（或轴）的矩等于它的各个分力对同一点（或轴）之矩的矢量和（或标量和）
合力偶	$\boldsymbol{m}_o=\Sigma\boldsymbol{M}$	$m_x=\Sigma M_x$ $m_y=\Sigma M_y$ $m_z=\Sigma M_z$	M_x、M_y、M_z分别为力偶矩$\boldsymbol{M}$在x、y、z轴上的投影分量

1·4　力系的平衡条件和算例剖析

a．力系的平衡条件　力系的平衡条件是力系的主矢$\Sigma\boldsymbol{F}$（力系各力的矢量和）及力系各力对任意一点o的主矩$\Sigma\boldsymbol{m}_o$（力系各力对o点之矩的矢量和），都必须等于零。由此得到的各类力系基本形式的平衡方程见表3-5。

表3-5　平衡方程的基本形式

类别		平衡方程	说　　明
汇交力系	平面	$\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$	1.力系位于oxy平面 2.两个平衡方程都是力的投影式
	空间	$\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$ $\Sigma F_z=0$	三个平衡方程都是力的投影式
平行力系	平面	$\Sigma F_y=0$ $\Sigma m_o=0$	1.力系各力皆位于oxy平面，且都平行于y轴 2.平衡方程中有一个力的投影式和一个力矩式
	空间	$\Sigma F_y=0$ $\Sigma m_x=0$ $\Sigma m_y=0$	1.力系各力皆平行于y轴 2.平衡方程中有一个力的投影式和两个力矩式

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com