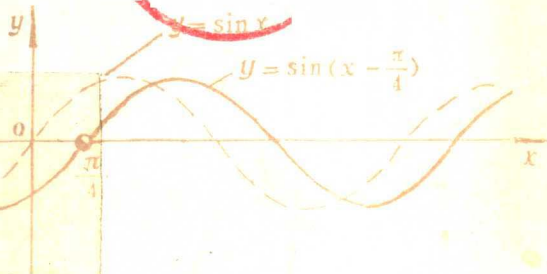
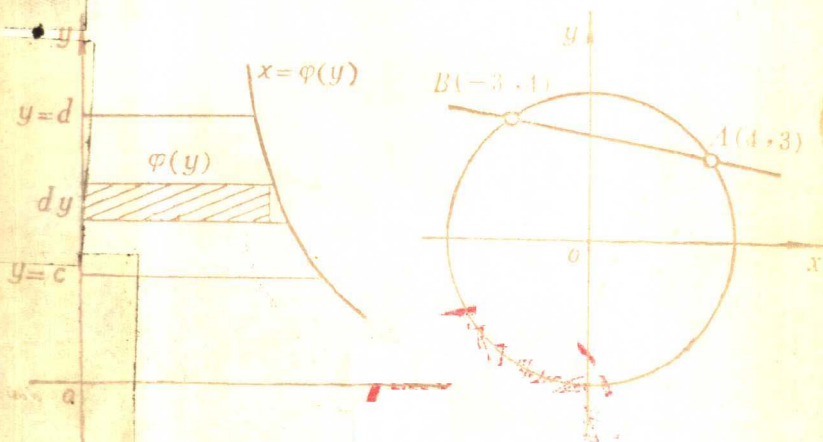


青年自学辅导读物

代数与微积分

自学辅导

〔苏〕H. B. 巴格莫洛夫 著 地质出版社



青年自学辅导读物

代数与微积分自学辅导

[苏] H. B. 巴格莫洛夫 著

翟连林 王 书 译

王元瑞 魏仲和 校

地质出版社

青年自学辅导读物
代数与微积分自学辅导

〔苏〕 H. B. 巴格莫洛夫 著
翟连林 王书 译
王元端 魏仲和 校

*

地质矿产部书刊编辑室编辑

责任编辑：刘品德

地质出版社出版

（北京西四）

地质出版社印刷厂印刷

（北京海淀区学院路29号）

新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

*

开本：787×1092¹/₃₂·印张：14⁵/₈·字数：320,000

1983年2月北京第一版·1983年2月北京第一次印刷

印数：1—31,080册·定价：1.40元

统一书号：7038·新84

译 者 的 话

Н.В.巴格莫洛夫著的《数学自学指南》(Практические Занятия по Математике)一书包括“计算数学”、“代数与分析”和“几何”三部分。本书是根据该书1979年版本的第二部分翻译的,个别地方做了删减和调整。

本书的特点是结构新颖,内容充实,循序渐进,适于自学。每章开头简要介绍基础知识,然后精选典型例题,讲解通俗易懂,深入浅出。为便于自学,例题与习题穿插安排,使读者容易模仿。一个段落后又安排有综合练习,以巩固基础知识,掌握解题方法,提高综合运用数学知识的能力。每章最后还配有两组完全不同的自我测验题,便于检查学习效果。只要读者有决心,完全可以在没有教师讲解或指导的情况下,靠自学从头到尾地读完这本书,掌握书中讲述的概念与方法。

本书可供中学数学教师、自学青年、中专和中技学生以及电视大学、职工大学、理工科大学一、二年级学生阅读参考,对于立志走自学成才道路的社会青年也是一本理想的读物。

由于时间仓促,更限于我们的水平,翻译中难免存在缺点和错误,请读者批评指正。

1982年8月

目 录

第一章 函数，对数函数和指数函数	1
§ 1. 数轴和数平面	1
§ 2. 一元有理方程	4
§ 3. 一次和二次不等式的解法	8
§ 4. 函数，函数的定义域和值域	13
§ 5. 对数函数	17
§ 6. 指数方程和指数不等式	21
§ 7. 对数方程和对数不等式	27
§ 8. 综合题	31
第二章 无穷数列，数列的极限	36
§ 1. 无穷数列	36
§ 2. 数列的极限	39
第三章 函数的极限	46
§ 1. 函数极限的计算	46
§ 2. 数 e ，自然对数	53
§ 3. 求三角函数的极限，当 $x \rightarrow 0$ 时，比式 $\frac{\sin x}{x}$ 的极限	59
§ 4. 综合题	63
§ 5. 自变量的改变量和函数的改变量	65
§ 6. 函数的连续性	67
§ 7. 函数的间断点	70
§ 8. 渐近线	71
§ 9. 用区间法解有理分式不等式	77
第四章 导数	81

§ 1. 函数的变化速度	81
§ 2. 导数	84
§ 3. 微分的基本法则, 幂与方根的导数	86
§ 4. 导数在物理上的应用	98
§ 5. 对数函数的导数	101
§ 6. 指数函数的导数	103
§ 7. 三角函数的导数	106
§ 8. 反三角函数的导数	112
§ 9. 综合题	114
第五章 导数在函数研究上的应用	119
§ 1. 函数的增减性	119
§ 2. 利用一阶导数研究函数的极值	122
§ 3. 二阶导数, 利用二阶导数研究函数的极值	127
§ 4. 函数的最小值和最大值	132
§ 5. 求最小值和最大值的一些题目	133
§ 6. 函数图形的凸性方向	139
§ 7. 拐点	141
§ 8. 函数作图	142
第六章 函数的微分	152
§ 1. 函数微分的计算	152
§ 2. 微分在近似计算中的应用	154
§ 3. 综合题	168
第七章 不定积分	171
§ 1. 积分法的基本公式, 直接积分法	171
§ 2. 不定积分的简单应用	185
§ 3. 变量替换积分法	192
§ 4. 分部积分法	201
§ 5. 有理分式的积分	204
§ 6. 一些三角函数的积分	208

§ 7. 一些借助于三角代换的无理函数的积分, 不同的代换方法	213
§ 8. 综合题	218
第八章 定积分	221
§ 1. 定积分及其直接计算	221
§ 2. 用变量替换法计算定积分	227
§ 3. 定积分的分部积分法	232
§ 4. 函数的区间平均值定理	233
§ 5. 定积分的近似计算	233
第九章 定积分的应用	236
§ 1. 应用定积分计算各种量的方法, 平面图形的面积	236
§ 2. 计算质点运动的路程	250
§ 3. 计算变力做的功	253
§ 4. 计算重物升高所做的功	257
§ 5. 计算液体的压力	261
§ 6. 平面曲线的弧长	265
§ 7. 求平面曲线弧的重心及平面图形的重心	269
第十章 复数	274
§ 1. 复数及其几何解释	274
§ 2. 复数代数形式的运算	281
§ 3. 复数三角形式的运算	286
§ 4. 指数为复数的指数函数, 欧拉公式	297
§ 5. 综合题	303
第十一章 方程组和不等式组	307
§ 1. 二元方程和二元不等式	307
§ 2. 二元线性方程组的解法	313
§ 3. 三元线性方程组的解法	313
§ 4. 最简单的二元线性规划问题	322
§ 5. 综合题	326

第十二章 微分方程	330
§ 1. 可分离变量的一阶微分方程	330
§ 2. 列出微分方程解应用题	333
§ 3. 一阶齐次微分方程	339
§ 4. 一阶线性微分方程	343
§ 5. 二阶非全微分方程	346
§ 6. 常系数二阶线性齐次微分方程	354
§ 7. 综合题	359
第十三章 组合和概率初步	362
§ 1. 数学归纳法	362
§ 2. 组合论初步	372
§ 3. 二项式的正整数幂 (牛顿定理)	377
§ 4. 概率的古典定义和统计定义	382
§ 5. 概率的加法定理	385
§ 6. 概率的乘法定理	388
§ 7. 全概率公式, 贝叶斯公式	389
§ 8. 独立重复试验, 贝努里公式	392
§ 9. 综合题	393
习题答案	396

第一章 函数，对数函数 和指数函数

§ 1. 数轴和数平面

1. 数集

有理数集 Q 和无理数集 I 组成实数集 R .

任何一部分实数的集合都可叫做数集.

一个集合如果是由有限个元素组成的，就叫做有限集合；反之，就叫做无限集合.

实数集 R 组成数轴，而实数本身就是数轴上的点.

下面列出一些最常见的数集：

由 a 至 b 的闭区间：

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}.$$

由 a 至 b 的开区间：

$$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}.$$

由 a 至 b 的半开区间：

$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\};$$

$$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}.$$

数 $b - a$ 叫做由 a 至 b 的区间的长度.

无限区间（射线，半直线）：

$$(a, +\infty) = \{x \in R \mid x > a\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \in R | x \geq a\};$$

$$(-\infty, a) = \{x \in R | x < a\};$$

$$(-\infty, a] = \{x \in R | x \leq a\}.$$

数轴: $(-\infty, +\infty) = R$.

有序实数对的集合叫做数平面, 用 R^2 表示. 任何一个有序实数对都表示数平面上的一个点.

2. 实数的模 (绝对值)

实数 x 的绝对值用 $|x|$ 表示. 正数 x 的绝对值等于 x 本身, 负数 x 的绝对值等于 $-x$, 零的绝对值等于零.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \in (0, +\infty); \\ -x, & x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

绝对值有下列性质:

1°. 如果两个实数仅仅彼此符号不同, 则它们的绝对值相同: $|a| = |-a|$, 即, 如果一个数乘以 -1 , 其绝对值不变.

2°. 绝对值不可能是负数: $|a| \geq 0$.

3°. 任一实数不可能大于自己的绝对值: $a \leq |a|$.

4°. 实数和的绝对值不大于它们的绝对值之和:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

5°. 两个实数差的绝对值不小于它们的绝对值之差:

$$|a-b| \geq |a| - |b|, \quad |a-b| \geq |b| - |a|,$$

$$\text{或 } |a-b| \geq ||a| - |b||.$$

6°. 几个数乘积的绝对值等于它们的绝对值之积:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

7°. 任何数的整数次幂的绝对值等于它的绝对值的同次幂: $|a^n| = |a|^n$.

8°. 两个数商的绝对值等于它们的绝对值的商:

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0)$$

9°. 下列关系式成立:

$$|b| < a \iff -a < b < a,$$

$$|b| > a \iff b < -a \vee b > a.$$

1. 若 $x = -3$, 求表达式 $\left| \frac{3x^3 + 1}{2x^2 + 2} \right|$ 的值.

$$\text{解: } \left| \frac{3x^3 + 1}{2x^2 + 2} \right| = \left| \frac{3(-3)^3 + 1}{2(-3)^2 + 2} \right| = \left| \frac{-80}{20} \right| = |-4| = 4.$$

2. 求下列表达式的值:

1) $\left| \frac{5x - 7}{x - 5} \right|$, 其中 $x = 3$;

2) $\left| \frac{x^2 + 5}{x^3 - 1} \right|$, 其中 $x = -2$;

3) $\left| \frac{z}{z - 2} \right|$, 其中 $z = 1$.

3. 解不等式 $|x - 5| < 3$.

解: 根据不等式的等价性, 我们有:

$$-3 < x - 5 < 3.$$

不等式的各部分同时加上 5, 得 $2 < x < 8$.

因而, 从区间 $(2, 8)$ 上取的所有 x 值都使不等式成立. 这个不等式的解的几何解释是, 它表示到点 5 的距离不足 3 的点集.

4. 解不等式:

1) $|x - 2| < 4$; 2) $|x + 8| < 1$;

3) $|x + 7| < 5$; 4) $|x - a| < \varepsilon$.

5. 解不等式 $|x-4| > 5$.

解: 根据不等式的等价性, 我们有

$$(|x-4| > 5) \iff (x-4 < -5 \vee x-4 > 5).$$

在不等式的各部分同时加上 4, 得

$$x < -1 \vee x > 9.$$

即 已知不等式的解集是两个区间的并:

$$(-\infty, -1) \cup (9, +\infty).$$

6. 解不等式: 1) $|x+3| > 2$; 2) $|x-5| > 8$.

7. 当 x 取何值时, 表达式 $\sqrt{16-x^2}$ 有实数值?

解: 我们有:

$$(16-x^2 \geq 0) \iff (x^2 \leq 16) \iff (-4 \leq x \leq 4).$$

因此, $x \in [-4, 4]$.

8. 当 x 取何值时, 下列表达式有实数值:

1) $\sqrt{4-x^2}$; 2) $\sqrt{x^2-16}$.

§ 2. 一元有理方程

9. 解方程: $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{3(3x-7)} = \frac{1}{x}$.

解: 这是个有理分式方程, 将它变形, 我们有

$$\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{3(3x-7)} - \frac{1}{x} = 0$$
$$\iff \frac{3x(3x-7) - 2x(x-2) - 6(x-2)(3x-7)}{6x(x-2)(3x-7)} = 0;$$

$$\begin{cases} 3x(3x-7) - 2x(x-2) - 6(x-2)(3x-7) = 0, \\ 6x(x-2)(3x-7) \neq 0; \end{cases}$$

$$(11x^2 - 61x + 84 = 0) \Leftrightarrow \left(x_1 = 2\frac{6}{11}; x_2 = 3 \right).$$

当 $x = 2\frac{6}{11}$ 时, $6 \times 2\frac{6}{11} \left(2\frac{6}{11} - 2 \right) \left(3 \times 2\frac{6}{11} - 7 \right) \neq 0$ 成

立;

当 $x = 3$ 时, $6 \times 3(3-2)(3 \times 3 - 7) \neq 0$ 成立.

因此, 方程的解是: $\left\{ 2\frac{6}{11}, 3 \right\}$.

10. 解方程:

$$1) \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3} = \frac{4}{x-1} + \frac{1}{x-4};$$

$$2) \frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1};$$

$$3) \frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} - \frac{37}{x^2+5x+6} = 0;$$

$$4) \frac{x+4}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

11. 解方程:

$$1) \frac{a}{a+x} + \frac{a-x}{x} = \frac{11}{10} (a \neq 0);$$

$$2) \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0 (a \neq 0);$$

$$3) \frac{a-x}{a-b} - \frac{x-b}{a+b} = \frac{2ab}{a^2-b^2} (a-b \neq 0, a+b \neq 0);$$

$$4) \frac{4a+3b-x}{1b+3a-x} = \frac{2a+b}{2b+a} \cdot \frac{2a+3b+x}{2b+3a+x} (a \neq b).$$

12. 解方程 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

解：这是个双二次方程。为了解这个方程，我们利用变量替换 $x^2=z$ 。于是得到一元二次方程

$$z^2 - 13z + 36 = 0.$$

这个方程的解为 $z_1=4$ 和 $z_2=9$ 。所以，原方程的解集为：

$$\{2, -2, 3, -3\}.$$

13. 解方程：

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0;$

2) $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0;$

3) $x^4 - 25x^2 - a^2x^2 + 25a^2 = 0;$

4) $x^4 - 9x^2 - a^2x^2 + 9a^2 = 0.$

14. 分解因式：

1) $4x^4 - 17x^2 + 4;$ 2) $x^4 - 125x^2 + 484.$

15. 解方程：

1) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0;$ 2) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0.$

解：

1) 显然，方程的左边可以分解因式。假设每个因式等于零，我们可求出原方程的解：

$$(x^3 - 2x^2 - 8x = 0) \iff (x(x^2 - 2x - 8) = 0)$$

$$\iff (x = 0 \text{ 或 } x^2 - 2x - 8 = 0) \iff (x_1 = 0,$$

$$x_2 = -2, x_3 = 4).$$

于是，得到原方程的解集： $\{0, -2, 4\}$ 。

2) 将方程的左边分解因式，并假定每个因式等于零，我们可求得原方程的解：

$$(x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0) \iff (x^2(x - 5) -$$

$$(x - 5) = 0) \iff ((x - 5)(x - 1)(x + 1) = 0)$$

$$\iff (x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = -1).$$

因此，原方程的解集为： $\{5, 1, -1\}$ 。

16. 解方程:

1) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$;

2) $x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0$;

3) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$;

4) $x^3 + (b^2 - a^2)x + ab^2 = 0$.

17. 解方程 $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$.

解: 这个方程是倒数方程. 方程各项同除以 $x^2 (x \neq 0)$, 得:

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

把方程整理成下面形式:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

为了解这个方程, 我们利用变量代换: $x + \frac{1}{x} = z$. 把

这个等式两边乘方, 得: $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. 于是, 我们得到方程:

$$6(z^2 - 2) + 5z - 38 = 0,$$

即 $6z^2 + 5z - 50 = 0$.

由此, 得 $z_1 = \frac{5}{2}$, $z_2 = -\frac{10}{3}$.

因而, 我们有.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \text{ 则 } 2x^2 - 5x + 2 = 0; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}, \text{ 则 } 3x^2 + 10x + 3 = 0; \quad x_3 = -3,$$

$$x_4 = -\frac{1}{3}.$$

于是，得原方程的解集为： $\left\{2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}\right\}$.

18. 解方程：

1) $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0;$

2) $8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0.$

19. 求作一个方程，使其根为 2, $\frac{1}{2}$, 3 和 $\frac{1}{3}$.

§ 3. 一次和二次不等式的解法

1. 一次不等式的解法

形如 $ax + b > 0$ (或 $ax + b < 0$) 的不等式，称为一次不等式。

如果 $a > 0$ ，那么 $(ax + b > 0) \iff \left(x > -\frac{b}{a}\right)$ 。

如果 $a < 0$ ，那么 $(ax + b > 0) \iff \left(x < -\frac{b}{a}\right)$ 。

2. 二次不等式的解法

形如 $ax^2 + bx + c > 0$ (或 $ax^2 + bx + c < 0$) 的不等式，称为二次不等式。

若要解不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ ，根据判别式 $D = b^2 - 4ac$ ，有下面三种情形：

1) 如果 $D < 0$ ，那么二次三项式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图形与 ox 轴不相交。当 $a > 0$ 时，其图形在 ox 轴上方；当 $a < 0$ 时，其图形在 ox 轴下方。在第一种情况下，不等式的解集是

实数集 (图1a); 在第二种情况下, 解集是空集 (图1b).

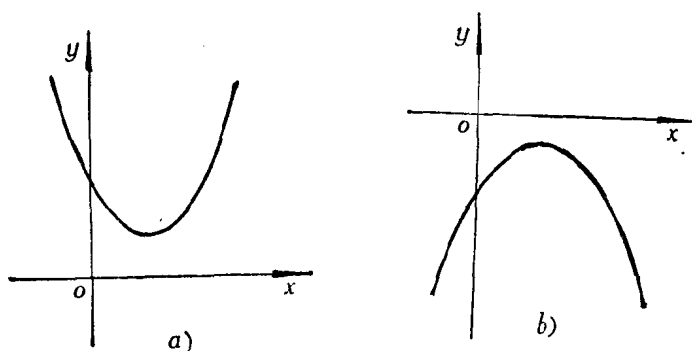


图 1

2) 如果 $D > 0$, 那么二次三项式的图形与 ox 轴相交于 x_1 和 x_2 两点 ($x_1 < x_2$), x_1 和 x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根. x_1 和 x_2 把整个数轴分成了三个区间: $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) 和 $(x_2, +\infty)$.

在这种情况下, 对于区间 $(-\infty, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上所有的点, 二次三项式的符号与系数 a 的符号相同, 而对于区间 (x_1, x_2) 上所有的点, 二次三项式的符号与系数 a

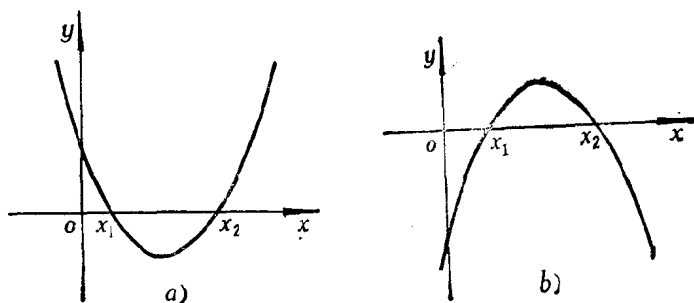


图 2