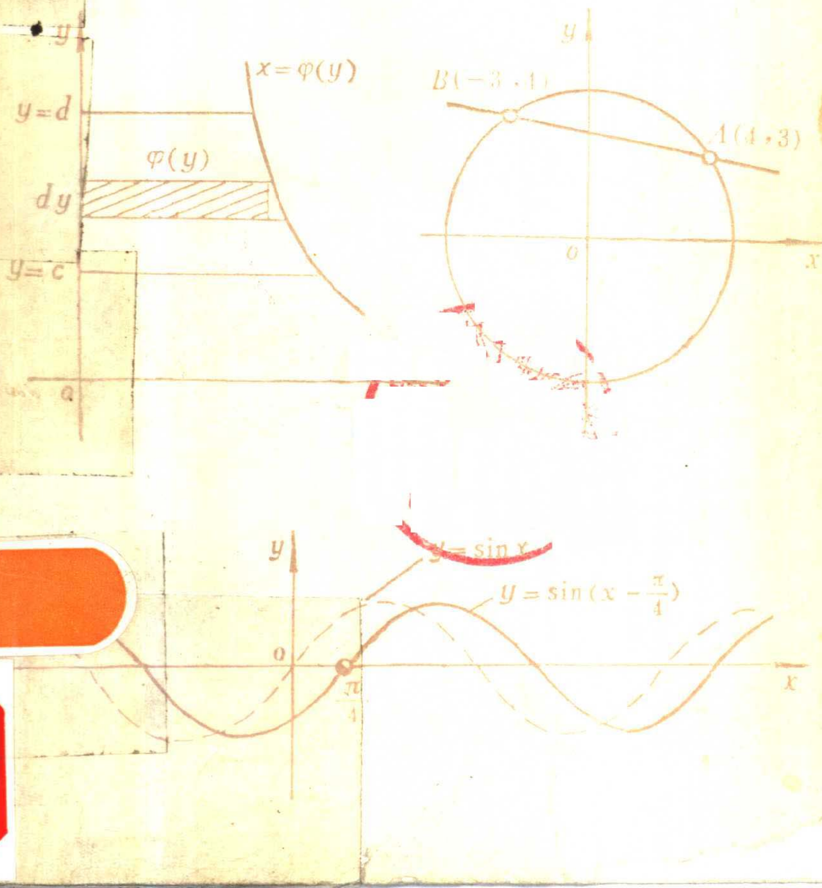
405

青年自学辅导读物

代数与微积分
自学辅导

〔苏〕H. B. 巴格莫洛夫 著

地质出版社



青年自学辅导读物

代数与微积分自学辅导

〔苏〕 H. B. 巴格莫洛夫 著
翟连林 王 书 译
王元瑞 魏仲和 校

地质出版社

青年自学辅导读物

代数与微积分自学辅导

〔苏〕 H. B. 巴格莫洛夫 著
翟连林 王 书 译
王元瑞 魏仲和 校

*

地质矿产部书刊编辑室编辑
责任编辑：刘品德
地 质 出 版 社 出 版
（北 京 西 四）
地质出版社印刷厂印刷
（北京海淀区学院路29号）
新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

*

开本：787×1092 $^1/_{32}$·印张：$14^5/_8$·字数：320,000
1983年2月北京第一版·1983年2月北京第一次印刷
印数：1—31,080册·定价：1.40元
统一书号：7038·新84

译 者 的 话

Н.В.巴格莫洛夫著的《数学自学指南》（Практические Занятия по Математике）一书包括“计算数学”、“代数与分析”和“几何”三部分。本书是根据该书1979年版本的第二部分翻译的，个别地方做了删减和调整。

本书的特点是结构新颖，内容充实，循序渐进，适于自学。每章开头简要介绍基础知识，然后精选典型例题，讲解通俗易懂，深入浅出。为便于自学，例题与习题穿插安排，使读者容易模仿。一个段落后又安排有综合练习，以巩固基础知识，掌握解题方法，提高综合运用数学知识的能力。每章最后还配有两组完全不同的自我测验题，便于检查学习效果。只要读者有决心，完全可以在没有教师讲解或指导的情况下，靠自学从头到尾地读完这本书，掌握书中讲述的概念与方法。

本书可供中学数学教师、自学青年、中专和中技学生以及电视大学、职工大学、理工科大学一二年级学生阅读参考，对于立志走自学成材道路的社会青年也是一本理想的读物。

由于时间仓促，更限于我们的水平，翻译中难免存在缺点和错误，请读者批评指正。

1982年8月

目　录

第一章　函数，对数函数和指数函数

§1.　数轴和数平面

1. 数集

有理数集 Q 和无理数集 J 组成实数集 R.

任何一部分实数的集合都可叫做数集.

一个集合如果是由有限个元素组成的，就叫做有限集合；反之，就叫做无限集合.

实数集 R 组成数轴，而实数本身就是数轴上的点.

下面列出一些最常见的数集：

由 a 至 b 的闭区间：

$$[a,b]=\{x\in R\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

由 a 至 b 的开区间：

$$(a,b)=\{x\in R\,|\,a<x<b\}.$$

由 a 至 b 的半开区间：

$$(a,b]=\{x\in R\,|\,a<x\leqslant b\};$$

$$[a,b)=\{x\in R\,|\,a\leqslant x<b\}.$$

数 $b-a$ 叫做由 a 至 b 的区间的长度.

无限区间（射线，半直线）：

$$(a,+\infty)=\{x\in R\,|\,x>a\};$$

$$[a, +\infty)=\{x\in R \mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty, a)=\{x\in R \mid x<a\};$$
$$(-\infty, a]=\{x\in R \mid x\leqslant a\}.$$

数轴：$(-\infty, +\infty)=R$.

有序实数对的集合叫做数平面，用R^2表示. 任何一个有序实数对都表示数平面上的一个点.

2. 实数的模（绝对值）

实数 x 的绝对值用$|x|$表示. 正数 x 的绝对值等于 x 本身，负数 x 的绝对值等于$-x$，零的绝对值等于零.

$$|x|=\begin{cases}x, & x\in[0, +\infty);\\ -x, & x\in(-\infty, 0).\end{cases}$$

绝对值有下列性质：

1°. 如果两个实数仅仅彼此符号不同，则它们的绝对值相同：$|a|=|-a|$，即，如果一个数乘以-1，其绝对值不变.

2°. 绝对值不可能是负数：$|a|\geqslant 0$.

3°. 任一实数不可能大于自己的绝对值：$a\leqslant|a|$.

4°. 实数和的绝对值不大于它们的绝对值之和：

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

5°. 两个实数差的绝对值不小于它们的绝对值之差：

$|a-b|\geqslant|a|-|b|$，$|a-b|\geqslant|b|-|a|$，

或$|a-b|\geqslant||a|-|b||$.

6°. 几个数乘积的绝对值等于它们的绝对值之积：

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|.$$

7°. 任何数的整数次幂的绝对值等于它的绝对值的同次幂：$|a^n|=|a|^n$.

8°. 两个数商的绝对值等于它们的绝对值的商：

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\quad (b\neq 0)$$

9°. 下列关系式成立：

$$|b|<a \Longleftrightarrow -a<b<a,$$

$$|b|>a \Longleftrightarrow b<-a \vee b>a.$$

1. 若$x=-3$，求表达式$\left|\dfrac{3x^3+1}{2x^2+2}\right|$的值.

解：$\left|\dfrac{3x^3+1}{2x^2+2}\right|=\left|\dfrac{3(-3)^3+1}{2(-3)^2+2}\right|=\left|\dfrac{-80}{20}\right|=|-4|=4.$

2. 求下列表达式的值：

1）$\left|\dfrac{5x-7}{x-5}\right|$，其中$x=3$；

2）$\left|\dfrac{x^2+5}{x^3-1}\right|$，其中$x=-2$；

3）$\left|\dfrac{z}{z-2}\right|$，其中 $z=1$.

3. 解不等式$|x-5|<3$.

解：根据不等式的等价性，我们有：

$$-3<x-5<3.$$

不等式的各部分同时加上5，得$2<x<8$.

因而，从区间（2，8）上取的所有x值都使不等式成立. 这个不等式的解的几何解释是，它表示到点5的距离不足3的点集.

4. 解不等式：

1）$|x-2|<4$；　　2）$|x+8|<1$；

3）$|x+7|<5$；　　4）$|x-a|<\varepsilon$.

5. 解不等式$|x-4|>5$.

解：根据不等式的等价性，我们有

$$(|x-4|>5)\Longleftrightarrow(x-4<-5\vee x-4>5).$$

在不等式的各部分同时加上4，得

$$x<-1\vee x>9.$$

即 已知不等式的解集是两个区间的并：

$$(-\infty,-1)\cup(9,+\infty).$$

6. 解不等式：1) $|x+3|>2$; 2) $|x-5|>8$.

7. 当x取何值时，表达式$\sqrt{16-x^2}$有实数值？

解：我们有：

$$(16-x^2\geqslant 0)\Longleftrightarrow(x^2\leqslant 16)\Longleftrightarrow(-4\leqslant x\leqslant 4).$$

因此，$x\in[-4,4]$.

8. 当x取何值时，下列表达式有实数值：

1) $\sqrt{4-x^2}$; 2) $\sqrt{x^2-16}$.

§2. 一元有理方程

9. 解方程：$\dfrac{1}{2(x-2)}-\dfrac{1}{3(3x-7)}=\dfrac{1}{x}$.

解：这是个有理分式方程，将它变形，我们有

$$\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{3(3x-7)}-\frac{1}{x}=0$$

$$\Longleftrightarrow\frac{3x(3x-7)-2x(x-2)-6(x-2)(3x-7)}{6x(x-2)(3x-7)}=0;$$

$$\begin{cases}3x(3x-7)-2x(x-2)-6(x-2)(3x-7)=0,\\ 6x(x-2)(3x-7)\neq 0;\end{cases}$$

$(11x^2-61x+84=0) \Longleftrightarrow \left(x_1=2\frac{6}{11}; x_2=3\right)$.

当 $x=2\frac{6}{11}$时，$6\times 2\frac{6}{11}\left(2\frac{6}{11}-2\right)\left(3\times 2\frac{6}{11}-7\right)\neq 0$ 成立；

当$x=3$时，$6\times 3(3-2)(3\times 3-7)\neq 0$成立。

因此，方程的解是：$\left\{2\frac{6}{11}, 3\right\}$.

10．解方程：

1）$\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-3}=\frac{4}{x-1}+\frac{1}{x-4}$；

2）$\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$；

3）$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}-\frac{37}{x^2+5x+6}=0$；

4）$\frac{x+4}{x+1}-\frac{2x}{x-1}=\frac{x^2}{1-x^2}$.

11．解方程：

1）$\frac{a}{a+x}+\frac{a-x}{x}=\frac{11}{10}(a\neq 0)$；

2）$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0\ (a\neq 0)$；

3）$\frac{a-x}{a-b}-\frac{x-b}{a+b}=\frac{2ab}{a^2-b^2}(a-b\neq 0, a+b\neq 0)$；

4）$\frac{4a+3b-x}{4b+3a-x}=\frac{2a+b}{2b+a}\cdot\frac{2a+3b+x}{2b+3a+x}(a\neq b)$.

12．解方程$x^4-13x^2+36=0$.

解：这是个双二次方程．为了解这个方程，我们利用变量替换$x^2=z$．于是得到一元二次方程

$$z^2-13z+36=0.$$

这个方程的解为$z_1=4$和$z_2=9$．所以，原方程的解集为：

$$\{2,\ -2,\ 3,\ -3\}.$$

13．解方程：

1） $x^4-5x^2+4=0$；

2） $a^2b^2x^4-(a^4+b^4)x^2+a^2b^2=0$；

3） $x^4-25x^2-a^2x^2+25a^2=0$；

4） $x^4-9x^2-a^2x^2+9a^2=0$．

14．分解因式：

1） $4x^4-17x^2+4$；　　2） x^4-125x^2+484．

15．解方程：

1） $x^3-2x^2-8x=0$；　　2） $x^3-5x^2-x+5=0$．

解：

1）显然，方程的左边可以分解因式．假设每个因式等于零，我们可求出原方程的解：

$$(x^3-2x^2-8x=0)\Longleftrightarrow(x(x^2-2x-8)=0)$$
$$\Longleftrightarrow(x=0\text{或}x^2-2x-8=0)\Longleftrightarrow(x_1=0,$$
$$x_2=-2,\ x_3=4).$$

于是，得到原方程的解集：$\{0,\ -2,\ 4\}$．

2）将方程的左边分解因式，并假定每个因式等于零，我们可求得原方程的解：

$$(x^3-5x^2-x+5=0)\Longleftrightarrow(x^2(x-5)-$$
$$(x-5)=0)\Longleftrightarrow((x-5)(x-1)(x+1)=0)$$
$$\Longleftrightarrow(x_1=5,\ x_2=1,\ x_3=-1).$$

因此，原方程的解集为：$\{5,\ 1,\ -1\}$．

16．解方程：

1） $x^3-4x^2-11x+30=0$；

2） $x^4-6x^3+3x^2+26x-24=0$；

3） $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$；

4） $x^3+(b^2-a^2)x+ab^2=0$。

17．解方程$6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$。

解：这个方程是倒数方程．方程各项同除以$x^2(x\neq0)$，得：

$$6x^2+5x-38+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}=0.$$

把方程整理成下面形式：

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0.$$

为了解这个方程，我们利用变量代换：$x+\frac{1}{x}=z$．把这个等式两边乘方，得：$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$。于是，我们得到方程：

$$6(z^2-2)+5z-38=0,$$

即 $6z^2+5z-50=0$.

由此，得$z_1=\frac{5}{2}$，$z_2=-\frac{10}{3}$。

因而，我们有．

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，则$2x^2-5x+2=0$；$x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$.

$x=\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}$，则$3x^2+10x+3=0$；$x_3=-3$，

$$x_4 = -\frac{1}{3}.$$

于是，得原方程的解集为：$\left\{2,\ \frac{1}{2},\ -3,\ -\frac{1}{3}\right\}$.

18. 解方程：

1） $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$；

2） $8x^4-54x^3+101x^2-54x+8=0$.

19. 求作一个方程，使其根为 2，$\frac{1}{2}$，3 和$\frac{1}{3}$.

§3. 一次和二次不等式的解法

1. 一次不等式的解法

形如$ax+b>0$（或$ax+b<0$）的不等式，称为一次不等式.

如果$a>0$，那么$(ax+b>0)\Longleftrightarrow\left(x>-\frac{b}{a}\right)$.

如果$a<0$，那么$(ax+b>0)\Longleftrightarrow\left(x<-\frac{b}{a}\right)$.

2. 二次不等式的解法

形如$ax^2+bx+c>0$（或$ax^2+bx+c<0$）的不等式，称为二次不等式.

若要解不等式$ax^2+bx+c>0$，根据判别式 $D=b^2-4ac$，有下面三种情形：

1） 如果$D<0$，那么二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图形与ox轴不相交．当$a>0$时，其图形在ox轴上方；当$a<0$时，其图形在$0x$轴下方．在第一种情况下，不等式的解集是

实数集（图1a）；在第二种情况下，解集是空集（图1b）。

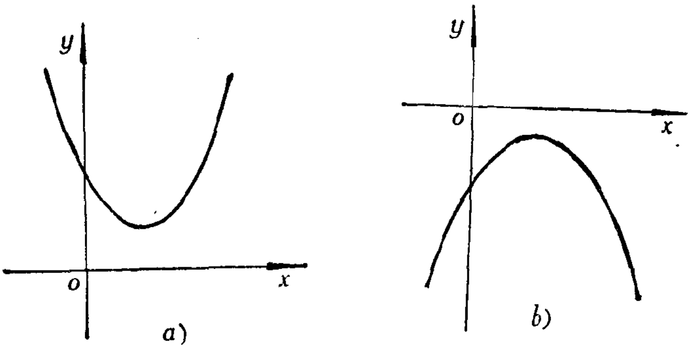


图 1

2）如果$D>0$，那么二次三项式的图形与ox轴相交于x_1和x_2两点（$x_1<x_2$），x_1和x_2是方程$ax^2+bx+c=0$的根。x_1和x_2把整个数轴分成了三个区间：（$-\infty$，x_1），（x_1，x_2）和（x_2，$+\infty$）。

在这种情况下，对于区间（$-\infty$，x_1）和（x_2，$+\infty$）上所有的点，二次三项式的符号与系数a的符号相同，而对于区间（x_1，x_2）上所有的点，二次三项式的符号与系数a

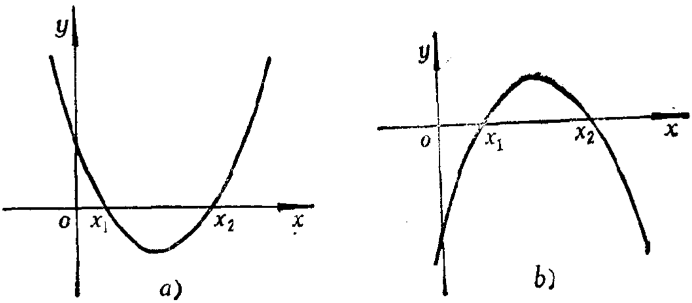


图 2