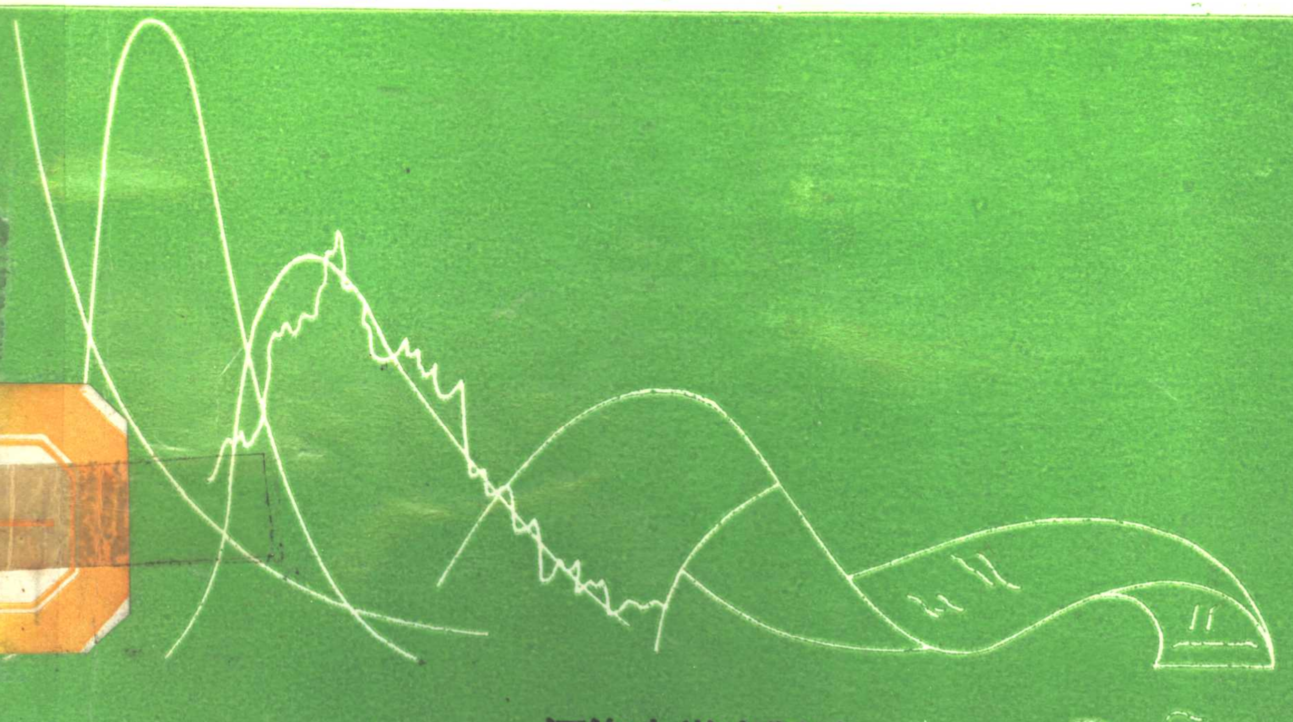
概率统计简明教程

孟庆生　何才法　孙志盈　著



河海大学出版社

概率统计简明教程

孟庆生　何才法　孙志盈　著

河海大学出版社

（苏）新登字第013号

内容提要

本书介绍近代概率论与数理统计的基本理论及应用。全书共九章，前四章概率论分别叙述概率空间、随机变量、数学期望及极限定理；后面五章数理统计分别研究统计模型、参数估计、假设检验、线性模型及信息统计。每章后都有若干问题与补充，较难问题有答案或详细提示。最后附常用数理统计表。

本书适于作为高等工科院校大面积研究生课教科书，也可供本科生及广大科技人员参考。

责任编辑　龚　俊

概率统计简明教程

孟庆生　何才法　孙志盈　著

出版发行：河 海 大 学 出 版 社
（地址：南京西康路1号　邮政编码：210024）
印　　刷：河 海 大 学 印 刷 厂
（地址：南京西康路1号　邮政编码：210024）

开本 787×1092毫米　1/16　印张 15.75　字数 403.2千字
1993年3月第1版　1993年3月第1次印刷
印数 1—3000

ISBN7—5630—0539—0/O·40

定价：10.00元

序

本书主要用途是想作为高等工科院校大面积研究生课教材，兼顾本科生选用并可供广大科技人员自学参考。全书共九章，采用分块阶梯式结构。前面四章概率论及第五章统计模型是基础内容；第六章参数估计与第七章假设检验是数理统计的核心部分；最后两章线性模型及信息统计作为专题研究。此外，每章末节安排问题与补充，其中较难问题有答案或提示，还有若干补充内容以便自学参考。各章节在叙述上均按由浅入深的渐进阶梯式。

本书在简明严谨、注重实用以及更新内容方面独具特色。

1. 作为一门重要的数学基础课教材，主张工科与广大理科生通用。因为广大理科学生也重视应用，而工科学生也需要加强理论方面的精细思维技巧的训练。本书是想在普通高等数学和线性代数的基础上，严格表述近代概率论及数理统计学的基本概念、主要结果、典型方法技巧。本书精心选材。最基本概念的表述从背景引伸到严格定义以及示例解释，逐步启发加深理解；主要定理从意义解释到严格证明以及方法应用，均细致研究。这种详论，有助于学生培养提出问题和解决问题的能力，同时也获得了扎实的基础知识。本书不在理论上的细枝末节上过分追求，也不可能展示近代极其丰富的研究结果和方法；只将部分与主题有直接关系的进一步内容放在补充中或指明文献，供有兴趣者自学参考。这样本书才能在课时和预备知识均受限的条件下达到最主要的目的。

2. 本书特别重视实用。在每一重要部分都安排了相当数量典型示例，其中有些是为了加深对基本概念的理解，有的是为了提高对典型方法和技巧的训练，而大量有应用背景的例题则可作实用参考。重要题目均以研究方式进行，有些结果还是较为新颖的，其中的思路和处理方法颇具启发性。

3. 作为九十年代更新教材，首先本书在观点上渗透了近代信息论的一些思想；另外包含了近代统计十分关注的一些内容——Bayes 统计，可靠性统计，判决理论与信息统计等。这些较新的内容有的分插在各有关章节，作为与经典理论方法的对比，开扩思路，启发兴趣；有的则单门立户，独作章节，以期引起讨论和研究；另外还有些原为经典内容，而作为从交叉学科观点探讨，又能体现出新意来。

本书虽是作者多年在理工科大学中上课的讲稿和讲义的基础上形成的，但限于业务水平，缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

本书是在河海大学研究生部、河海大学出版社和印刷厂的全力支持下出版的。本书编辑龚俊同志的认真负责高效工作以及电脑排版室朱庭梅同志的认真细致耐心高效的工作，都对本书作出了特殊的贡献。另外，参加本书计划讨论的还有王京副教授和印凡成讲师，他们提了宝贵的意见。谨此一并致谢。

孟庆生　何才法　孙志盈

1993 年 2 月 24 日于南京

概率统计简明教程

目　录

第一章　概率空间

§ 1.1　背景问题

1.1.1　引　　例

例 1.1.1　考虑产品检验问题。一批产品共有 N 件，其中有 S 件次品，从这批产品中任意抽出 M 件查验，发现有 X 件次品。这里查验结果次品数 X 在检验前不能完全预定，只知它可能取值的范围（值域集合）为 $\Omega=\{0, 1, \cdots, K\}$，这里 K 是 S 和 M 中较小者，$K=\min\{S, M\}$。　　#

像这种试验结果不能预知的现象，在自然界和科学实验中屡见不鲜。称之为随机试验。再举另一例子。

例 1.1.2　池塘数鱼问题。一鱼池共有 N 条鱼，开始钓出 S 条鱼，标记后放回池中，又从池中钓出 M 条鱼，发现 X 条有标记。这里再次钓出的有标记的鱼数 X，也是不能预知的结果。　　#

这两例，异曲同工。都是随机试验，且在数学本质上有共性。

概率论的目的就是从大量随机现象中抽象本质构造数学模型，研究统计规律性，作出科学推断。比如，在上述例 1.1.1 中，试问查出次品数 X 恰为 k 的可能性有多大？在例 1.1.2 中，若已知再次钓出 $X=k$ 条鱼，试由此推断池中总鱼数 N 有多少？这就是概率统计要解决的问题。当然一般随机现象的问题远比这些复杂，需要逐步深入下去研究，先从较简单的古典型问题开始。

1.1.2　古典型概率

所谓古典型，就是基本随机事件（可能试验结果）数目有限，同时还要假定每个试验结果具有等可能性。记 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ 为随机试验的所有可能结果，即在每次试验（观测）中，Ω 中的元有一且仅有一个出现。每个 ω_i 称为一个基本事件（$i=1, 2, \cdots, n$），表现不能再分割的观测结果；Ω 称为基本事件空间；$n=|\Omega|$ 表 Ω 中元素个数①。时定义古典型每个基本事件的概率为 $\frac{1}{n}$，记为

$$p(\omega_i)=\frac{1}{n}, \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.1.1}$$

由 Ω 中部分元组成的事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.1.2}$$

其中 $m=|A|$ 为 A 中元素个数。上述定义都是很自然的。一个事件的概率表示该事件出现可能性的大小，给出了随机事件的定量表征。

例 1.1.3　同时掷三枚硬币，所有可能结果可表为 $\Omega=\{(000), (001), \cdots, (111)\}$ 共 8 种，其中 0 表示硬币某一面朝上，1 表示另一面朝上。假定为均匀币，两面朝上机会均

① 一般用 $|A|$ 表示集合 A 中元素个数。

等，就是古典型，

$$P(\omega)=\frac{1}{8} \quad , \quad \forall\ \omega\in\Omega \qquad \# \tag{1.1.3}$$

有些古典型问题，不是这样简单。

例 1.1.4 袋中有 a 个黑球、b 个白球，从中任意摸出 M 个球，取后无放回，试求恰有 k 个黑球的概率？

这个问题与例 1.1.1 中产品检验问题实质是一样的，这里叙述为模球形式为的是便于想象，试验可在"同样条件下重复进行"的意思。为计算概率，按式（1.1.2），先得辨认基本事件空间 Ω 并求得 Ω 的元素个数 $n=|\Omega|$；另外，关键是求得有利事件 A 中元素个数 $m=|A|$。

在此例中，可设想 Ω 中元 ω 是将 $N=a+b$ 个球任意分成 M 元一组的一种可能结果，恰好是 N 个元以 M 个做组合，得

$$n=|\Omega|=\binom{N}{M}=\binom{a+b}{M} \tag{1.1.4}$$

其中有利事件 $A=\{\omega\in\Omega$：ω 中恰有 k 个黑球$\}$，对于 $\omega\in A$，即 ω 中恰含 k 个黑球，它们可能是 a 个黑球中的任意 k 个为 $\binom{a}{k}$ 种可能之一，另外 $M-k$ 个为白球，可能是 $\binom{b}{M-k}$ 种可能之一，k 个黑球与 $M-k$ 个白球搭配成一组的全部结果即为 A 中元，共有

$$m=|A|=\binom{a}{k}\binom{b}{M-k}$$

种可能结果，于是有

$$P(A)=\frac{m}{n}=\binom{a}{k}\binom{b}{M-k}\Big/\binom{a+b}{M} \tag{1.1.5}$$

$$(0\leqslant k\leqslant \min\ \{a,\ M\}) \qquad \#$$

由此可见，一般计算古典型概率也不易，关键是辨清基本事件空间和有利事件个数。

例 1.1.5 共有 N 张奖券，其中 a 张有奖，$b=N-a$ 张无奖。递次随机抽取，取后不放回，试问，第 k 次抽得有奖的概率？（$1\leqslant k\leqslant N$）

这问题相当于把所有 N 张奖券排成一列，共有 $N!$ 种可能结果，故 $|\Omega|=N!$；第 k 次抽取有奖，相当于上述排列中第 k 张是有奖的一张。设想 a 张有奖奖券之一先放在第 k 个位置上，共有 a 种放法，其余 $N-1$ 张奖券随意放置在 $N-1$ 个位置上，共有 $(N-1)!$ 种放法，总之，有利事件数为 $|m|=|A_k|=a\cdot(N-1)!$，于是得所求概率为

$$P(A_k)=\frac{|A_k|}{|\Omega|}=\frac{a\cdot(N-1)!}{N!}=\frac{a}{N} \tag{1.1.6}$$

$$k=1,2,\cdots,N$$

由此可见，其结果与 k 无关，这表示得奖与否与抽奖先后次序无关。 #

上述两例说明在生产实践与社会实践中均有概率问题存在。可是许多问题不都是基本事件个数有限的，纵然机会均等，这就是下面的几何型问题。

1.1.3 几何型概率

假定基本事件空间 Ω 的度量是一块面积、体积或长度，一般可设 Ω 为欧氏空间某个可度量区域，有利事件 A 是 Ω 中某可度量子集。假定每个基本事件 $\omega\in\Omega$ 都是机会均等的，这

就是几何型问题。定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|} \tag{1.1.7}$$

这里 $|\Omega|$ 与 $|A|$ 分别表示相应的面积，体积或长度，一般为 Ω 及 A 的有关测度。

例 1.1.6 停船问题 某码头只能容纳一只船停靠，现有两条船可能在同一天到达，且在 24 个时内到港机会均等，假定两船停靠时间各为 3 小时及 4 小时，试求有一船需在港外等待的概率？

基本事件空间 Ω 可表为平面区域：

$$\Omega=\{(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 24\}$$

有利事件 A 为 Ω 中的子集：

$$A=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant y\leqslant x+3 \text{ 或 } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant y+4\}$$

如图 1.1.1 所示，结果得：

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{24^2-(24-3)^2/2-(24-4)^2/2}{24^2}=0.27$$

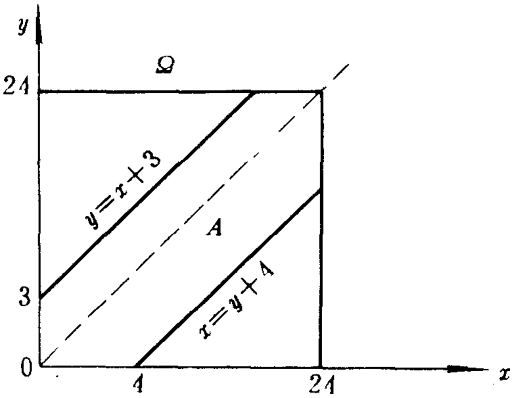


图 1.1.1 停船问题

§1.2 概率空间

古典型概率与几何型概率都是假定基本事件“机会均等”，然而许多实际问题中，不具备这种特点。比如，在产品检验中，一次抽样为次品或正品机会并不均等，在正常社会中，生男孩与生女孩的比率也不一样，诸如此类，都表明只考虑等可能性的问题，是远不够用的。那么，一般地应该如何定义概率呢？这个问题的研究经过了漫长的时间。历史上认为概率论作为学科发展起源于 B. Pascal（1623－1662）与 P. Fermat（1601－1665）的通信研究。经过了几代学者的努力，直到本世纪三十年代，才由苏联著名数学家 A. N. Kolmogorov（柯尔莫哥洛夫）在公理化基础上得到了彻底的解决。近代概率论严格说来是建立在测度论的基础上，但本书范围限定不用测度论，不过还是按现代公理化观点严格表述概率论的基础，这样做的目的是在数学基础允许范围内使理论现代化，增强科学性，扩大适用面。

1.2.1 概率论的公理结构

现代概率论建立在概率空间的基础上。首先，把一切基本事件的全体 $\Omega=(\omega)$ 设想为一个抽象集合，有限或无限集；其次，把所关心的随机事件的全体，也就是 Ω 的部分子集之集合 $\mathscr{F}$ 称为事件域。这里为运算方便，假定 $\mathscr{F}$ 中事件满足下列意义的"封闭性"要求：

公理 I 事件域公理

(i) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(ii) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\bar{A}=\Omega-A\in\mathscr{F}$；

(iii) 若一列 $A_j\in\mathscr{F}$，$j=1,2\cdots$，则可列并集 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathscr{F}$。满足公理 (i)，(ii) 及 (iii) 的 Ω 的子集类 $\mathscr{F}$ 称为 Ω 上的 σ 域（或 σ 代数）。

以后，我们称 $\Omega=(\omega)$ 为**基本事件空间**，其中元 ω 称为**基本事件**，Ω 上 σ 域 $\mathscr{F}$ 中集合 $A\in\mathscr{F}$ 称为**随机事件**，简称**事件**。二元体 $(\Omega,\mathscr{F})$（$\mathscr{F}$ 满足 (i) — (iii)）称为**可测空间**。

公理 (i) 表示 Ω 是个随机事件，这是个特殊的事件，因为它在每次试验中必然发生，所以也称**必然事件**；公理 (ii) 表示，若 A 是事件，则 $\bar{A}=\Omega-A$ 也是事件，称为 A 的**对立事件**（或**补事件**，**余事件**）；公理 (iii) 表明可列事件的并集（和事件）还是事件，这里在于强调可列可加性，这是柯氏公理的关键，并没有规定不可列事件还是事件。

进一步，从公理 (i) — (iii) 还可推得如下性质：

(F_1) 空集 $\varnothing=\bar{\Omega}\in\mathscr{F}$，即不可能事件 $\varnothing$ 也是随机事件；

(F_2) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，则和事件 $A\cup B\in\mathscr{F}$；

(F_3) 若 $A_j\in\mathscr{F}$，$j=1,2,\cdots$，则可列交事件 $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}A_j\in\mathscr{F}$；

(F_4) 若 A，$B\in\mathscr{F}$，则差事件 $A-B=A\bar{B}\in\mathscr{F}$。

上述结论都是集合运算的常识，不难由第 I 组三条公理推得，这里不细导，留作习题。

上面第 I 组公理 (i) — (iii) 是关于随机事件域 $\mathscr{F}$ 的规定性，下面第 II 组公理 (iv) — (vi) 给出了概率的公理化结构。

公理 II 概率公理

设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间，在事件域 $\mathscr{F}$ 上定义实值集函数 $P(A)$，$A\in\mathscr{F}$，满足：

(iv) 非负性：$P(A)\geqslant 0$ ， $\forall A\in\mathscr{F}$；

(V) 规范性：$P(\Omega)=1$；

(vi) 完全可加性：若 $A_j\in\mathscr{F}$，$j=1,2,\cdots$，$A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，则

$$P\Big(\sum_{j=1}^{\infty}A_j\Big)=\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j)$$

这里用 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}A_j$ 表示不交事件或不相容事件之和，如果 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **不相容**或**不相交**。

满足上述公理 (iv) — (vi) 的事件域 $\mathscr{F}$ 上的完全可加集函数 $P(A)$，$A\in\mathscr{F}$，称为 σ 域 $\mathscr{F}$ 上的**概率测度**，简称**概率**。满足公理 I 和 II 的三元总体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为**概率空间**。上述公理 (i) — (iv) 就是概率公理化结构的全部内容，许多概率的进一步性质全是在此基础上推导出来的。在进一步研究之前先看些例子，以加深对上述公理化的具体认识。

例 1.2.1 Bernoulli（贝努利）概型

许多随机现象都属于两态基本事件空间型，就是说，每次试验只有两种可能结果，不失一般性，可分别记为 0 及 1，即 $\Omega=\{0,1\}$，$|\Omega|=2$。比如，“正品与次品”、“有奖与无奖”、射击中“击中与否”、“生男孩与生女孩”…，诸如此类，均为两态事件类型。若将此类随机现象独立重复观察 n 次，如 n 次抽查产品，n 次射击等，得一样本空间（基本事件空间）$\Omega=\{\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n):\omega_i=0$ 或 $1,\ i=1,\cdots,n\}$，此时，Ω 中元素总数为 $|\Omega|=2^n$。取 $\mathscr{F}$ 为 Ω 中所有子集所成的集合，$\mathscr{F}=S(\Omega)$（一般用 $S(D)$ 记集合 D 之全体子集所成之集合，这是 D 上最大 σ 域，若 $|A|<\infty$，则 $|S(A)|=2^{|A|}$），$\mathscr{F}=\{A:A\subset\Omega\}$，

$$|\mathscr{F}|=1+\binom{M}{1}+\binom{M}{2}+\cdots+\binom{M}{M}=2^M,M=2^n=|\Omega|$$

定义：（用△表示定义符）

$$P(\omega)\triangleq p^{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i}\cdot q^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i}\quad,\quad\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in\Omega\tag{1.2.1}$$

其中 $0\leqslant p\leqslant 1$，$q\triangleq 1-p$；

$$P(A)\triangleq\sum_{\omega\in A}P(\omega)\quad,\quad A\in\mathscr{F}\tag{1.2.2}$$

可以验证，上述 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间（满足公理 I 及 II）。事实上，$P(\omega)$ 表示 n 次观察出现事件 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 的概率。在背景上，可以认为一次观测出现对应于 1 的事件的概率为 p，$0\leqslant p\leqslant 1$；其对立事件 0 出现的概率为 $q=1-p$，于是可记 $p(\omega_i)=p^{\omega_i}q^{1-\omega_i}$，$n$ 次独立观测出现事件 $\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 的概率为

$$P(\omega)=\prod_{i=1}^{n}P(\omega_i)=\prod_{i=1}^{n}p^{\omega_i}q^{1-\omega_i}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i}q^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i}$$

$$\omega=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in\Omega$$

这就是历史上著名的贝努利（Bernoulli）概型，它给出了所有两态（不一定机会均等）事件 n 次独立观察的概率空间结构。 #

1.2.2 概率的基本性质

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为任一概率空间。据公理 (i) — (vi)，概率具有下列基本性质：

(P_1) $P(\varnothing)=0$，即不可能事件的概率为 0。

证：据完全可加性及 $\varnothing=\varnothing+\varnothing+\varnothing+\cdots$，有

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots\tag{1.2.3}$$

此式只能在 $P(\varnothing)=0$ 时成立。 #

(P_2) 有限可加性：$\mathscr{F}$ 中任意有限个不交事件 $A_1,\cdots,A_n$，$A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，有

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\tag{1.2.4}$$

证：由完全可加性及 (P_1) 即得。 #

(P_3)

$$P(\overline{A})=1-P(A),\quad A\in\mathscr{F}\tag{1.2.5}$$

证：由 $\Omega=A+\overline{A}$，有限可加性及 $P(\Omega)=1$ 有

$$1=P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})\qquad\#$$

(P_4) 单调性：对任意二事件 A，$B\in\mathscr{F}$，$A\subset B$，有

$$P(A)\leqslant P(B)\tag{1.2.6}$$

及

$$P(B-A)=P(B)-P(A)\qquad\text{(可减性)}$$

从而对任一 $A\in\mathscr{F}$，有

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1 \tag{1.2.7}$$

证：可写 $B=A+(B-A)$，由（P_2）得

$$P(B)=P(A)+P(B-A) \geqslant P(A)。 \quad \#$$

（P_5）对任意 A，$B\in\mathscr{F}$，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.2.8}$$

证：由（P_2）有

$$P(A)=P(A-B)+P(AB)$$

$$P(B)=P(B-A)+P(AB)$$

及
$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B-A)+P(AB)$$

综合此三式即得式（1.2.8）。 #

式（1.2.8）称为概率加法公式。一般地，对任意 n 个事件 A_1，…，$A_n\in\mathscr{F}$ 有

$$P(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)=S_1-S_2+S_3-S_4+\cdots+(-1)^{n-1}S_n \tag{1.2.9}$$

其中

$$S_1 \triangleq \sum_{j=1}^{n}P(A_j), \qquad S_2 \triangleq \sum_{i<j}P(A_iA_j)$$

$$S_3 \triangleq \sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k),\cdots,S_n \triangleq P(A_1A_2\cdots A_n)$$

式（1.2.9）称为**一般加法公式**，可由式（1.2.8）及归纳法证得。

（P_6）对任意一列事件 $A_j\in\mathscr{F}$，$j=1$、2、…有

$$P(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}P(A_j) \tag{1.2.10}$$

特别地，对任意二事件 A、$B\in\mathscr{F}$，有

$$P(A\cup B) \leqslant P(A)+P(B) \tag{1.2.11}$$

证：将 $\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$ 表示为不交事件之和，

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j=A_1+\overline{A}_1A_2+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3+\cdots, \tag{1.2.12}$$

再由完全可加性及单调性有

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j)&=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)+\cdots\\&\leqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots \quad \#\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

（P_7） 概率具有连续性

（1）下连续性：对任意一列递增事件 $A_j\in\mathscr{F}$，$j=1$，2，…，$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots$，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n) \tag{1.2.14}$$

（2）上连续性：对任意一列递减事件 $B_j\in\mathscr{F}$，$j=1$，2，…，$B_1\supset B_2\supset B_3\supset\cdots$，有

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}P(B_n) \tag{1.2.15}$$

证：（1）由递增性有

$$A \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1+\overline{A}_1A_2+\cdots+\overline{A}_{k-1}A_k+\cdots,$$

由此据完全可加性及（P_4）得

$$P(A)=P(A_1)+\sum_{k=2}^{\infty}[P(A_k)-P(A_{k-1})]=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

(2) 记 $A_j=\bar{B}_j$，$j=1, 2, \cdots$，由 (1) 得

$$1-P(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}P(\bar{B}_n)=1-\lim_{n\to\infty}P(B_n) \quad \#$$

概率公理中关键一条是完全可加性，它实质上等价于连续性。

定理 1.2.1 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是任一可测空间（$\mathscr{F}$ 满足公理 I），$P(A)$，$A\in\mathscr{F}$，是 $\mathscr{F}$ 上非负集函数，且 $P(\Omega)=1$，则 P 满足完全可加性的充要条件是 P 有限可加且具有下连续性。

证：必要性由 (P_2) 和 (P_7) 可得。

充分性：设一列不交事件 $A_j\in\mathscr{F}$、$j=1, 2, \cdots$、$A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，有

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_j=B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots, \tag{1.2.16}$$

其中 $B_1=A_1$，$B_2=A_1+A_2$，$\cdots$，则 $\{B_n\}$ 为递增序列，由下连续性及有限可加性有

$$P(\sum_{j=1}^{\infty}A_j)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}P(B)$$
$$=\lim_{n\to\infty}P(\sum_{j=1}^{n}A_j)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}P(A_j)$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j) \tag{1.2.17}$$

即得完全可加性。 #

§ 1.3 概率算法

1.3.1 古典型公式

首先指出，古典型概率可纳入公理结构范畴。取 $\Omega\doteq\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$，$|\Omega|=n$，$\mathscr{F}=S(\Omega)$ 为 Ω 之所有子集所成的集。

定义

$$P(\omega)\triangleq\frac{1}{|\Omega|}, \forall\ \omega\in\Omega, P(\varnothing)\triangleq 0;$$
$$P(D)\triangleq\frac{|D|}{|\Omega|}, \forall\ D\in\mathscr{F} \tag{1.3.1}$$

$|D|$ 是事件 D 中元素个数。可以验证，上述 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一概率空间。不过计算古典型概率主要还是依靠组合分析工具具体计算，这里强调的是要仔细明辨一些背景问题的提法，否则解题结果会是答非所问。为此看一著名例子。

例 1.3.1 设有 n 个质点，每点以概率 $\frac{1}{N}$ 落入 N $(N\geqslant n)$ 个盒子中的每一个里，试求事件 A “某预先指定的 n 个盒中各含一点” 的概率。

解法 1：(Maxwell—Boltzman) 假定各质点不相同可辨认，盒子容量不限，此时每点可落入任一盒中，基本事件空间 Ω 可表为 $\Omega=\{\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots\omega_n): \omega_i=1, 2, \cdots, N, 1\leqslant i\leqslant n\}$，这里基本事件 $\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 中分量 ω_i 表示第 i 个质点落入盒子的号码，故 ω_i 可取值 $1, 2, \cdots, N$，$(1\leqslant i\leqslant n)$，于是 $|\Omega|=N^n$。假定 A 中指定 n 个盒子的号码为 $i_1<i_2<\cdots<i_n$，$1\leqslant i_k\leqslant N$，则 $\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_n)\in A$，当且仅当 $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$，取 $(i_1, \cdots, i_n)$

的任一排序，于是$|A|=n!$，这样得

$$P(A)=n!/N^n \tag{1.3.2}$$

解法 2：(Bose—Einstein) 假定各种质点相同不可辨，盒子容量不限，此时落点结果只能看出每个盒中有几个质点，实质相当于将N个盒子并排成一线，用盒子的公共壁共 ($N-1$) 个将n个质点分隔一下，于是基本事件可表为$\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$，其中$m=n+N-1$，表$n$个质点和$N-1$个内壁的位置数，$\omega_i=0$ (表质点占位)，或 1 (表内壁位置)，并且$\sum_{i=1}^{m}\omega_i=N-1$，这样$|\Omega|=\binom{n+N-1}{n}=\binom{n+N-1}{N-1}$，事件$A$中恰含一个基本事件，于是得

$$P(A)=1\Big/\binom{n+N-1}{n} \tag{1.3.3}$$

解法 3：(Fermi—Dirac) 假定质点相同不可辨，每个盒子只能容纳一个质点，此时基本事件$\omega=(\omega_1, \cdots, \omega_N)$，$\omega_i=1$或 0，表示第$i$个盒子有一质点或无质点，且$\sum_{i=1}^{N}\omega_i=n$，则$|\Omega|=\binom{N}{n}$，事件$A$中恰含一个基本事件，从而得

$$P(A)=1\Big/\binom{N}{n} \qquad \# \tag{1.3.4}$$

上述三种解法在相应的假定下都是正确的，之所以一题三解，结果各异，原因在于原题目出的不十分明确，还有细究的余地。所以，针对实际背景，构造相应恰当的模型是解决问题的关键。如果建模有误，即使计算结果精确，也可能与实际不符，这是在应用科学中需要特别注意的问题。

古典概率的应用题目很多，不能一一列举。只有通过做大量练习才能熟练掌握。

1.3.2 条件概率与乘法公式

定义 1.3.1 设$P(B)>0$，已知事件B下事件A的**条件概率**定义为

$$P(A/B)\triangleq P(AB)/P(B) \tag{1.3.5}$$

有时条件概率比较好算，于是得概率的**乘法公式**：

$$P(AB)=P(B)P(A/B) \tag{1.3.6}$$

这其实是 (1.3.5) 的换写，但它给概率计算带来方便。一般**乘法公式**为

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.3.7}$$

其中$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$。此式按定义 1.3.1 为恒等式。

定义 1.3.2 **称事件 A 与 B 独立**，如果

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.3.8}$$

由此定义可见，若$P(B)>0$，则A与B独立当且仅当

$$P(A/B)=P(A) \tag{1.3.9}$$

这表明“独立性”的定义是名符其实的。一般地，称$A_1, A_2, \cdots, A_n$诸事件**总体独立**，如果对任意有限个$A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$，均有

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}) \tag{1.3.10}$$

$$1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$$

注意，式 (1.3.10) 表示共有$C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$个式子成立。

定理 1.3.1 设有概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，$B\in\mathscr{F}$，且 $P(B)>0$ 定义

$$P_B(A) \triangleq P(A/B), A\in\mathscr{F} \tag{1.3.11}$$

则 $(\Omega, \mathscr{F}, P_B)$ 也是一概率空间。

证：直接验证公理（i）－（vi），留作练习。 #

1.3.3 全概率公式与 Bayes 公式

称有限或可列个事件 $\{A_j\}\subset\mathscr{F}$ 为完备系，如果

$$A_iA_j=\varnothing, i\neq j,$$
$$\sum_j A_j=\Omega\text{、且 } P(A_j)>0 \quad j=1,2,\cdots。 \tag{1.3.12}$$

对于任一事件 $B\in\mathscr{F}$ 及完备系 $\{A_j\}$，有

$$P(B)=\sum_j P(A_j)P(B/A_j)。 \tag{1.3.13}$$

式（1.3.13）称为**全概率公式**，由完备系的定义及可加性（或完全可加性）得之。此公式的实质在于将事件 B 的概率计算转化为一个完备系下的条件概率的计算，有时后者容易计算。

设 $\{A_j\}\subset\mathscr{F}$ 为完备系，$P(B)>0$，$B\in\mathscr{F}$，则有

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B/A_j)} \tag{1.3.14}$$

这就是 Bayes 公式，也叫**后验概率公式**。Bayes 公式除在初等概率计算中提供算法外，也是在现代统计中形成 Bayes 字派的思想基础。

1.3.4 计算概率举例

例 1.3.2 罐子概型 设罐中有 N 个球，a 个黑球，$b=N-a$ 个白球，从中随机摸 m 次球，试求取得 k 个黑球的概率 p_k（$0\leqslant k\leqslant m\leqslant N$）。

解法 1：假定有放回地摸球。第一次取得黑球的概率为$\frac{a}{N}$，取得白球的概率为$\frac{b}{N}$，在有放回的假定下，可以认为各次摸球是相互独立的，故 m 次摸球在指定 k 次中取得黑球，另外 $m-k$ 次恰为白球的概率为 $(a/N)^k\cdot(b/N)^{m-k}$，又因为这 k 次得黑球可以是 m 次中的任意 k 次，故所求概率为

$$p_k=\binom{m}{k}\left(\frac{a}{N}\right)^k\left(\frac{b}{N}\right)^{m-k}\quad, \quad 0\leqslant k\leqslant min(a,m) \tag{1.3.15}$$

这当中使用了独立性、乘法公式及加法公式，这里可以 $m\geqslant N$。

解法 2：假定无放回地摸球。这相当于一把取出 m 个球，其中恰有 k 个黑球（结果与例 1.1.4 一样）的概率为

$$p_k=\binom{a}{k}\binom{b}{m-k}\Big/\binom{N}{m} \tag{1.3.16}$$

$$(0\leqslant k\leqslant min\{a,m\}\leqslant m\leqslant N) \quad \#$$

这里又遇到实际背景模型化的问题。如果考虑产品检验背景，有放回摸球相当于假定次品率 $p_0=a/N$ 是不变的，从生产线上抽检产品 m 次，恰得 k 个次品的概率即为

$$\binom{m}{k}p_0^k(1-p_0)^{m-k} \tag{1.3.17}$$