

TOSHIBA
YOUXIANYUAN
FENXI

土石坝有限元 分析

陈慧远 编著

HeHai DaXue ChuBanShe

河海大学出版社

95671

TV642
7453

土石坝有限元分析

陈慧远 编著

河海大学出版社

内 容 提 要

本书是作者从七十年代开始参加土石坝有限元计算实践,并在这方面进行了科研和教学的基础上编写的。从土的应力应变关系,非线性分析方法讲到土石坝在静、动力作用下的应力应变和渗流等的有限元分析,以及计算成果在土石坝设计中的应用。书末附有土石坝非线性应力应变分析FORTRAN语言程序。本书是《水利水电工程建筑专业》高年级本科生和研究生的选修课教材,也可供水工结构工程技术人员作为土石坝有限元分析入门的自学参考书。

土石坝有限元分析

陈慧远 编著

河海大学出版社出版
(江苏省南京市西康路1号)
江苏省新华书店发行
江苏武进村前印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/16 印张8 插页1 字数197千字
1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷
印数1—3000册

ISBN 7-5630-0002-X/TV.1

定价: 2.50元

前 言

土石坝这个古老的坝型，在世界坝工中为数最多，约占总数90%以上。土石坝具有能利用当地材料、对坝址地质条件适应性强、工期短、造价低等优点。自70年以来，它在世界高坝中所占的比重日趋增加，世界上所建造的百米以上的高坝中土石坝占54%以上。

60年以来，高速、大容量电子计算机问世，有限元技术得到迅速发展，使人们借助于电子计算机对土石坝进行静、动力应力应变分析成为可能。又随着土石料的应力应变模式的日趋完善，通过计算成果和实际原体观测的大量对比，土石坝的各种有限元分析已日益成为设计土石坝的有力工具。

自70年代中后期起，作者开始对粘土和沥青混凝土心墙砂砾石坝做了有限元分析，以后又对坝基带混凝土防渗墙的土石坝，以及面板堆石坝做了分析。从1981年77级开始，每年都对我校《水利水电工程建筑专业》高年级本科生和土石坝方向的研究生开设了“土石坝有限元分析”选修课程，并陆续在各地举办过几次“土石坝有限元分析”短训班。在此基础上，编写了这本讲授30学时课的教材，供教学需要。也可供有关工程技术人员作为土石坝有限元分析入门的自学参考书。

由于作者水平所限，诚恳地欢迎读者和有关专家对错误和不妥之处提出批评和指正。

作 者

1987年1月

目 录

第一章 土的应力应变关系	(1)
§ 1-1 应力张量及其分解	(1)
§ 1-2 应力张量的不变量	(2)
§ 1-3 八面体上的应力 应力强度	(4)
§ 1-4 应变张量	(5)
§ 1-5 应力应变关系的类型	(7)
§ 1-6 线弹性应力应变关系	(8)
§ 1-7 非线性双曲线应力应变关系	(12)
§ 1-8 弹塑性的应力应变关系	(16)
参考文献.....	(21)
第二章 非线性分析方法	(22)
§ 2-1 概述	(22)
§ 2-2 迭代法	(24)
§ 2-3 增量法	(26)
§ 2-4 初应力法	(29)
§ 2-5 初应变法	(30)
§ 2-6 弹塑性分析	(32)
参考文献.....	(37)
第三章 土石坝有限元分析	(38)
§ 3-1 概述	(38)
§ 3-2 施工逐级加荷	(38)
§ 3-3 初蓄水时坝体应力和变形	(41)
§ 3-4 摩擦接触单元	(45)
§ 3-5 混凝土防渗墙采用梁单元	(48)
§ 3-6 增量初应力迭代法程序	(51)
§ 3-7 计算成果在坝体设计中的应用	(54)
参考文献.....	(68)
第四章 土石坝动力分析	(69)
§ 4-1 振动基本方程式	(69)
§ 4-2 逐步积分法	(71)

§ 4-3 土的动力性质	(75)
§ 4-4 砂土的振动液化	(83)
§ 4-5 循环荷载下孔隙水压的增长	(86)
参考文献	(92)

第五章 土石坝渗流分析.....(93)

§ 5-1 渗流基本方程及其离散	(93)
§ 5-2 渗流问题的有限元法	(95)
§ 5-3 浸润线等自由表面的确定	(100)
参考文献	(101)

附录 土石坝非线性有限元应力应变计算程序.....(102)

第一章 土的应力应变关系

§ 1-1 应力张量及其分解

物体内任意一点的应力状态可以由一定数量的应力分量表示，在直角坐标系 $oxyz$ 中，应力分量是：

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$$

这九个应力分量的大小不仅与物体的受力情况有关，而且也与 x, y, z 坐标轴的方向有关。如果某些量依赖于坐标轴的选择，并且在坐标变换时，它们的变化存在一定的规律性，则这些量构成一个数学上的整体，称为张量。一点的应力状态是由应力分量所确定的物理量，而应力分量具有上述张量的性质，所以九个应力分量的总体称为应力张量，它表示在一点上的应力状态。

应力张量可以用符号 $\sigma_{ij}(i, j = x, y, z)$ 表示，写成如下形式：

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

式(1-1)与 3×3 阶的矩阵写法相同。在这里 i 代表行， j 代表列，行、列数1, 2, 3对应于 x, y, z 。例如第一行第一列的元素为 σ_{11} ，即应力分量为 σ_{xx} (简写为 σ_x)；第二行第三列的元素为 σ_{23} ，即应力分量为 τ_{yz} ，其余类推。由于剪应力的互等性， $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ，……，应力张量与 3×3 阶的对称矩阵写法相同，是“对称张量”。

当直角坐标系 $oxyz$ 经旋转变为另一坐标系 $ox'y'z'$ (图1-1)时，应力张量 σ_{ij} 变为另一应力张量 $\sigma'_{i'j'}$ ($i', j' = x', y', z'$)。设新坐标轴对于原坐标系各轴的方向余弦如下表所示：

表 1-1

新 轴	原 轴		
	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

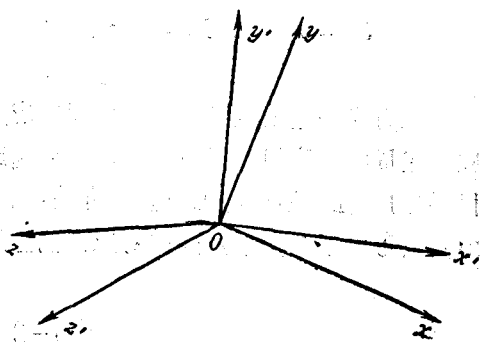


图 1-1 坐标的变换

根据投影关系，可以得出坐标轴旋转后应力分量的六个变换关系式。例如：

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1 \\
 (\sigma_{y'} \text{ 和 } \sigma_{z'} \text{ 可由轮换下标 } 1, 2, 3 \text{ 得到}) \\
 \tau_{x'y'} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \tau_{yz} (m_1 n_2 \\
 &\quad + m_2 n_1) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1) \\
 (\tau_{y'z'} \text{ 和 } \tau_{z'x'} \text{ 可由轮换下标 } 1, 2, 3 \text{ 得到})
 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

由式(1-2)可知, 应力分量的变换关系式是方向余弦 $l_1, m_1, n_1, \dots$ (称为转换系数)的二次式。由于这样的关系, 根据数学上的定义, 应力张量是二阶张量。同理, 当坐标轴旋转后, 矢量分量的三个变换关系式是转换系数的一次式, 所以矢量称为一阶张量; 而标量则不依赖于坐标轴的选择, 称为零阶张量。

为了研究应力状态与塑性变形的关系, 需要将应力张量分解为两个分张量, 即

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

式(1-3)中的 σ_m 为三个正应力的平均值, 称为平均应力, 即

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

在式(1-3)右方第一个分张量只含有 σ_m , 称为球形应力张量, 简称为应力球张量; 第二个分张量称为偏斜应力张量, 简称为应力偏量。

应力球张量可表示为:

$$\sigma_m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_m \delta_{ij}$$

式中的符号 δ_{ij} , 称为克罗内克(Kronecker) δ 。它有这样的特点

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i=j) \\ 0 & (\text{当 } i \neq j) \end{cases}$$

令 $S_x = \sigma_x - \sigma_m$, $S_y = \sigma_y - \sigma_m$, $S_z = \sigma_z - \sigma_m$; $S_{xy} = \tau_{xy}$, $S_{yz} = \tau_{yz}$, $S_{zx} = \tau_{zx}$, $\dots$, 则应力偏量可用符号 S_{ij} 表示如下:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_z \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

应力球张量表示各方向受相同压应力或拉应力的应力状态, 即静水压力情况。从原来的应力张量中扣除静水压力部分, 就得到应力偏量。从实验资料得知, 很多材料(特别是金属材料)的塑性变形只与应力偏量有关, 而应力球张量只与弹性的体积改变有关。在岩土力学中需要考虑塑性变形, 因此对应力偏量的研究是很重要的。

§ 1-2 应力张量的不变量

根据应力张量的定义, 应力张量的各个分量依赖于坐标轴的选择, 当坐标变换时, 应力分量随之按一定的规律改变。下面将看到, 在应力分量改变时, 由应力分量以一定形式组成

的某些量是不随坐标的变换而改变的, 这些量称为应力张量的不变量。

应力张量的不变量与主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 有关。如已知应力张量 σ_{ij} , 可解以下三次方程求得主应力。

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0 \quad (1-5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

方程(1-5)有三个实根, 即三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 。方程(1-5)中的三个系数 I_1, I_2, I_3 , 具有以下性质:

当坐标轴 x, y, z 的方向改变时, 应力张量的各个分量都要改变, 但主应力的数值并不改变, 即方程(1-5)的根不变, 因此该式的系数也不变。如取坐标轴与应力主轴重合, 则应力张量中的剪应力分量等于零, 而正应力分量就是主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 式(1-6)成为:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

根据以上的讨论, I_1, I_2, I_3 的数值与坐标轴的方向无关, 分别称为应力张量的第一、第二和第三不变量。这三个不变量可以用式(1-6)或式(1-7)表示。在式(1-7)中, 这三个不变量是由主应力表示的, 可以更明显地看出它们的不变性。这种与坐标轴方向无关的不变性对于研究各向同性材料是很有用的。

应力偏量 S_{ij} 也是一个应力张量, 它表示一种特殊的应力状态, 即三个正应力 S_x, S_y, S_z 之和为零。既然它是应力张量, 同样也有不变量。以 S_x, S_y, S_z 代替式(1-6)中的 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, 可得到应力偏量的不变量。

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= S_x + S_y + S_z = 0 \\ J_2 &= -(S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\ J_3 &= S_x S_y S_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{zx}^2 - S_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

J_1, J_2, J_3 分别为应力偏量的第一、第二和第三不变量。如果选取应力主轴为坐标轴, 则应力张量的剪应力分量为零, 同样地应力偏量的剪应力分量也为零, 仅有主分量 S_1, S_2, S_3 。由此可知, 应力偏量与应力张量的主方向是一致的。以 S_1, S_2, S_3 表示的应力偏量的不变量是

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= S_1 + S_2 + S_3 = 0 \\ J_2 &= -(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1) = -\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ J_3 &= S_1 S_2 S_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

应力偏量的不变量既具有不变性又扣除了静水压力的影响, 所以比应力张量的不变量更有用。其中应力偏量的第二不变量 J_2 在岩土力学中起重要作用。

§ 1-3 八面体上的应力 应力强度

在本节中将讨论某些特殊面上的应力。设已知物体內任意一点的应力主轴和主应力，通过该点作一特殊面，令该面的法线 N 与三个应力主轴1、2、3成相等的夹角，则法线的方向余弦彼此相等。又因为三个方向余弦的平方和等于1，所以有

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

这样的面称为等斜面。为了研究上述等斜面上的应力，从物体內一点附近取出等斜面与三个应力主面所组成的四面体为考察对象，受力情况如图1-2所示。令等斜面上的三角形 abc 面积为 dA ，则在三个应力主面上的三个三角形的面积都等于 $\frac{dA}{\sqrt{3}}$ 。令等斜面上的合

应力为 P_N ，它在1、2、3方向的分量分别为 X_N 、 Y_N 和 Z_N ，则根据1方向的平衡条件有

$$X_N dA = \sigma_1 \frac{dA}{\sqrt{3}}$$

或
$$X_N = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}$$

同理
$$Y_N = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad Z_N = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

而合应力为：

$$P_N = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (1-10)$$

等斜面上的正应力为：

$$\sigma_N = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} + \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m \quad (1-11)$$

即等斜面上的正应力 σ_N 等于平均应力。由此可得出等斜面上的剪应力

$$\tau_N = \sqrt{P_N^2 - \sigma_N^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1-12)$$

与式(1-9)比较，得知等斜面上的剪应力 τ_N 与应力偏量的第二不变量 J_2 有以下关系：

$$\tau_N = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{J_2} \quad (1-13)$$

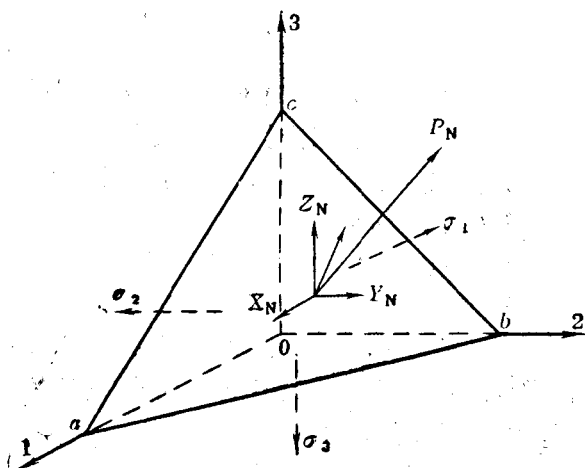


图 1-2 等斜面上的应力

在已知物体内一点附近，都可以作出八个上述的等斜面(图1-3)，它们形成一个封闭的正八面体。因此 σ_N 和 τ_N 也称为八面体上的正应力和剪应力，通常用 σ_8 和 τ_8 表示。在塑性力学中，为了使用方便，令 $\sigma_i =$

$\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8$ ，称为应力强度或“等效应力”。

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (1-14)$$

当单向拉伸时，设单向拉应力为 σ_1 ，而 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 。代入式(1-14)得 $\sigma_i = \sigma_1$ ，与单向应力相等。这就是“等效”命名的由来，也是将 τ_8 乘上系数 $3/\sqrt{2}$ 的原因所在。由式(1-8)，应力强度也可以表示为：

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sqrt{3J_2} \quad (1-15)$$

应力强度与应力偏量的第二不变量 J_2 有关，所以也是与坐标轴方向无关的量，而且也是与应力球张量无关的量。它与 J_2 一样，在岩土力学中常用到，但只用它的绝对值，即在式(1-14)和(1-15)中只取正的平方根。

§ 1-4 应变张量

物体内任意一点的应变状态是由应变分量所确定的几何量。在直角坐标系 $oxyz$ 中，应变分量是：

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}, \gamma_{zx}, \gamma_{xz}$$

其中剪应变分量有互等性，只有六个应变分量是独立的。这六个应变分量也是与坐标轴方向有关的量，当坐标轴的方向改变时可以得到与式(1-2)相似的变换关系式，因此应变分量同样也组成一个张量，称为应变张量，表示一点的应变状态。应变张量用符号 ε_{ij} 表示：

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1-16)$$

此处剪应变分量前有系数 $\frac{1}{2}$ ，这样当坐标变换时，应变分量才服从张量的坐标变换式， ε_{ij} 才形成一个张量。由于剪应变分量的互等性，应变张量也是对称的。

当坐标轴转到应变主轴的方向时，应变张量成为：

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

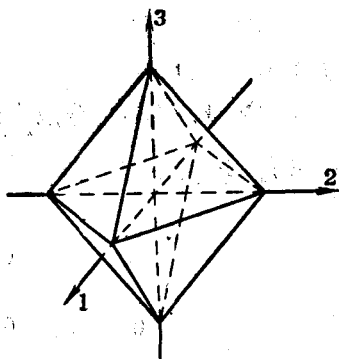


图 1-3 正八面体

式中剪应变分量为零，而正应变分量 ε_1 、 ε_2 、 ε_3 ，称为主应变。主应变的差值

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (1-17)$$

称为主剪应变。

应变张量同样可以分解为两个分张量：球形应变张量（应变球张量）和偏斜应变张量（应变偏量）。令平均应变 $\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ 则

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{pmatrix} \quad (1-18)$$

应变球张量表示各方向有相同的正应变，它代表体积应变部分。应变偏量中三个正应变之和等于零，说明体积改变为零，所以它仅代表形状应变部分。

应变球张量可表示为：

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} = \varepsilon_m \delta_{ij}$$

$$\text{令 } e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_m, \quad e_y = \varepsilon_y - \varepsilon_m, \quad e_z = \varepsilon_z - \varepsilon_m, \quad e_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \quad e_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \quad e_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}, \quad \dots,$$

则应变偏量可用符号 e_{ij} 表示为：

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_x & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_y & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & e_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & e_z \end{pmatrix} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij} \quad (1-19)$$

应变偏量和应力偏量一样，也有它的不变量。应变偏量的第一、第二和第三不变量分别为

$$\left. \begin{aligned} J_1' &= e_x + e_y + e_z = 0 \\ J_2' &= \frac{1}{6}[(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)] \\ &= \frac{1}{6}[(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] \\ J_3' &= e_x e_y e_z + 2e_{xy} e_{yz} e_{zx} - e_x e_{yz}^2 - e_y e_{zx}^2 - e_z e_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

为了便于使用，令 $e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2'}$ ，得

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \quad (1-21)$$

ε_1 称为应变强度，也称为等效应变，如用主应变表示，则

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad (1-22)$$

在§1-3中已讨论过单向应力状态下的应力强度 σ_1 ，现在再讨论一下应变强度 ε_1 。设单向应力为 σ_1 ，而 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 。由于材料是各向同性的，所以在 σ_1 的方向相应地有主应变 ε_1 ，而横向应变 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\nu\varepsilon_1$ ，式中 ν 为材料的泊松比。由实验得知，当材料发生塑性变形时，通常 $\nu = \frac{1}{2}$ ，所以 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon_1$ 。以此代入式(1-22)，得 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1$ ，即在单向应力状态下，应变强度等于与单向应力相对应的正应变，这可以说明“等效”的含义和乘系数的原因。当然，应变强度也只用其绝对值。

§ 1-5 应力应变关系的类型

图1-4表示从一个圆柱形土样的压缩试验可能得到的几种应力应变曲线类型。图1-4a表示加荷曲线与卸荷曲线重合，当荷载除去后，所有应变都将恢复，这就是弹性性状。如果象图1-4b所示的关系是线性的，则土是线弹性的。

如果在卸荷时应变并不恢复(图1-4c)，则这种不能恢复的应变称为塑性应变，这种土表现为塑性性状。图1-4d表示刚塑性特性，它不具有弹性或可恢复的应变。

通常，在弹塑性性状中可恢复的和不可恢复的应变都有一些(图1-4e)。图1-4e例子中共有三种弹塑性的类型，其区别在于应力达到屈服应力 σ_y 后的性状。曲线1是完全塑性的情况，在塑性范围内，屈服应力并不受应变的影响。曲线2是应变硬化的情况。曲线3是应变软化的情况。

上述各种情况所包含的应力和应变都是同时发生的。粘滞性和粘弹性材料在荷载不变情况下，随着时间的延续应变仍然不断地继续增加(图1-4f)，或者应变保持常量时，应力发生松弛而降低(图1-4g)。线性粘弹性材料

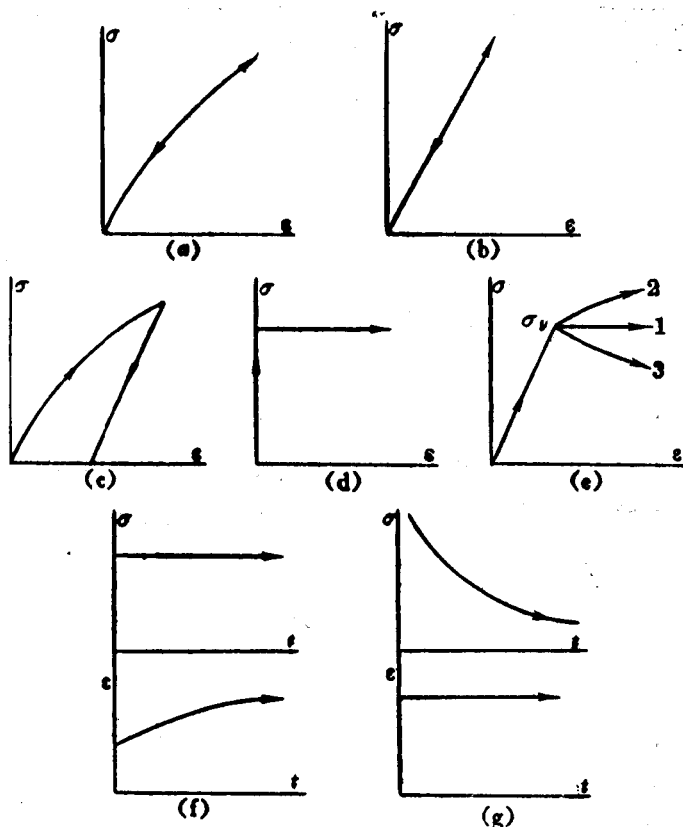


图 1-4 应力应变曲线类型

(a) 非线性弹性；(b) 线弹性；(c) 弹塑性；(d) 刚塑性；(e) 弹塑性：
1) 完全塑性，2) 应变硬化，3) 应变软化；(f) 常应力粘弹性徐变；
(g) 常应变粘弹性松弛

在给定的时间内其应力和应变具有线性关系。换言之，如果施加一个荷载后在 t 时间内产生了一定的应变，那末，当施加二倍的荷载并维持同样的时间 t 时，则会产生二倍的应变。当一方面应力与应变间呈线性关系，而另一方面应力、应变与时间也呈线性关系的情况，在现实中几乎是不存在的。

§ 1-6 线弹性应力应变关系

如果土的应力与应变成正比关系，它就是线弹性的，可以用广义虎克定律来表示，在数值分析工作中，最有用的是把应力和应变写成向量的形式：

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \quad (1-23)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T \quad (1-24)$$

当用于平面问题时，这些向量就可以减为：

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T \quad (1-25)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T \quad (1-26)$$

由于有六个应力的独立分量和六个应变的独立分量，最一般的情况就需要有36个系数来建立它们的线性关系。然而，根据线性变形弹性体所储存的能量，可以证明这些系数必须形成一个对称的数组。例如， σ_x 与 ε_y 的相关系数项就必须同 σ_y 与 ε_x 的各有关项相同。应力应变矩阵的这种对称性，可将独立数目减少到21个。这个线性关系可用矩阵形式表示：

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (1-27)$$

$$[D] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{pmatrix} \quad (1-28)$$

对
称

如果材料为各向同性，则坐标轴可以任意选定而不会影响弹性常数，可使独立项的数目大为减少，于是矩阵 $[D]$ 只有两个独立项，且变为：

$$[D] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix} \quad (1-29)$$

这种常数可以用一些不同的参数表示，最常用的如下：

1. 杨氏模量 E 在简单拉伸或简单压缩试验中，反映轴向应变与轴向应力关系的参数。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (1-30)$$

2. 泊松比 ν 在简单拉伸或简单压缩试验中，反映轴向应变与横向应变关系的参数。

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1-31)$$

3. 剪切模量 G 反映剪应力与剪应变关系的参数。

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (1-32)$$

4. 体积模量 K 反映体积应变 ε_v 与平均应力或八面体应力 σ_8 关系的参数。

$$\sigma_8 = K\varepsilon_v \quad (1-33)$$

5. 拉梅(Lame)常数 λ 、 μ 反映轴向应力与体积应变及轴向应变关系的参数。

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon_v + 2\mu\varepsilon_x \quad (1-34)$$

σ_y 和 σ_z 也有类似方程，并且

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \quad (1-35)$$

其他剪应力也有类似方程。

6. 侧限变形模量 M 在两个侧限面上的法向应变为零的情况下，反映轴向应力与轴向应变关系的参数。

$$\sigma_x = M\varepsilon_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad (1-36)$$

在上述这些常数之间，存在下列关系：

$$\left. \begin{aligned} G = \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} & K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} & M &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

线弹性应力应变关系最常用的几种模式如下：

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (1-38)$$

$$\text{或者 } [D] = \begin{pmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \quad (1-39)$$

$$\text{或者 } [D] = \begin{bmatrix} M & M-2G & M-2G & 0 & 0 & 0 \\ M-2G & M & M-2G & 0 & 0 & 0 \\ M-2G & M-2G & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

在平面应变的条件下, ε_z 、 γ_{xz} 和 γ_{yz} 均为零, 所以应力应变关系成为:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1-41)$$

$$\text{其中 } \{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T, \quad \{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$$

$$\begin{aligned} [D] &= \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M & M-2G & 0 \\ M-2G & M & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这些关系也可以写成逆形式如下:

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1}\{\sigma\} \quad (1-42)$$

$$\text{其中 } [D]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

由于土体的力学性质遵守有效应力原理, 因此应变也一定取决于有效应力, 而不是总应力, 如采用增量形式, 可以按式(1-42)表示如下:

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_x &= \frac{1}{E'} (d\sigma_x' - \nu' d\sigma_y' - \nu' d\sigma_z') \\
 d\epsilon_y &= \frac{1}{E'} (d\sigma_y' - \nu' d\sigma_x' - \nu' d\sigma_z') \\
 d\epsilon_z &= \frac{1}{E'} (d\sigma_z' - \nu' d\sigma_x' - \nu' d\sigma_y') \\
 d\gamma_{xy} &= \frac{2}{E'} (1 + \nu') d\tau_{xy}' \\
 d\gamma_{yz} &= \frac{2}{E'} (1 + \nu') d\tau_{yz}' \\
 d\gamma_{zx} &= \frac{2}{E'} (1 + \nu') d\tau_{zx}'
 \end{aligned} \tag{1-43}$$

式中 E' 和 ν' 是相当于有效应力变化时的弹性模量和泊松比，线弹性材料的 E' 和 ν' 可取为常量，如写成主应力和主应变的形式，则式(1-43)变为：

$$\begin{aligned}
 d\epsilon_1 &= \frac{1}{E'} (d\sigma_1' - \nu' d\sigma_2' - \nu' d\sigma_3') \\
 d\epsilon_2 &= \frac{1}{E'} (d\sigma_2' - \nu' d\sigma_1' - \nu' d\sigma_3') \\
 d\epsilon_3 &= \frac{1}{E'} (d\sigma_3' - \nu' d\sigma_1' - \nu' d\sigma_2')
 \end{aligned} \tag{1-44}$$

这因为在主平面上的剪应力和剪应变为零。

在轴对称($d\sigma_2' = d\sigma_3'$ 和 $d\epsilon_2 = d\epsilon_3$)的情况下，由于体积应变 e_v 为应变张量的第一不变量，即 $e_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ ，按式(1-44)得出

$$\begin{aligned}
 de_v &= d\epsilon_1 + 2d\epsilon_3 = \frac{1-2\nu'}{E'} (d\sigma_1' + 2d\sigma_3') \\
 &= \frac{3(1-2\nu')}{E'} dp' = \frac{1}{K'} dp'
 \end{aligned} \tag{1-45}$$

其中 $dp' = \frac{1}{3}(d\sigma_1' + 2d\sigma_3')$ 为轴对称情况下的平均应力增量 $d\sigma_m'$ 。

令轴对称情况下的应变强度增量为 de_s ，按式(1-22)及(1-44)得出

$$\begin{aligned}
 de_s &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2} = \frac{2}{3} (d\epsilon_1 - d\epsilon_3) \\
 &= \frac{2(1+\nu')}{3E'} (d\sigma_1' - d\sigma_3') = \frac{2(1+\nu')}{3E'} dq' = \frac{1}{3G'} dq'
 \end{aligned} \tag{1-46}$$

其中 $dq' = d\sigma_1' - d\sigma_3'$ 。 q 为轴对称情况下的应力强度，即式(1-14)中的 σ_1 。从式(1-45)及

(1-46)分别得出 $K' = \frac{E'}{3(1-2\nu')}$ 为体积模量； $G' = \frac{E'}{2(1+\nu')}$ 为剪切模量。

平面应变的情况 $d\epsilon_z = 0$ ，代入式(1-44)得 $d\sigma_2' = \nu'(d\sigma_1' + d\sigma_3')$ ，因此