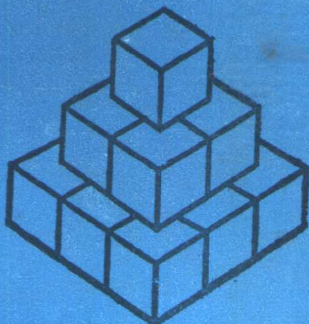
高级中学课本

# 代 数

DAISHU

（乙种本）

下 册



$$1^2+2^2+\cdots+n^2$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

人民教育出版社

高级中学课本（试用）
代　　数
（乙种本）
下　　册
人民教育出版社数学室编
*
人民教育出版社出版
天津教育出版社重印
天津市新华书店发行
天津新华印刷二厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张7.75 字数160,000
1984年11月第1版　　1985年5月第1次印刷
印数1—129,000
书号 K7012·0614　　　　定价0.63元

# 说　明

一、这套高中用的数学课本(乙种本)是根据教育部颁发的《高中数学教学纲要(草案)》中的基本要求内容编写的，共分四册：《代数》上、下册，《立体几何》全一册，《平面解析几何》全一册，供二年制或三年制高中选用.

二、本册内容包括：数列与数学归纳法，不等式，*行列式和线性方程组，复数，排列、组合、二项式定理，*概率. 其中带*号部分为选学内容.

三、本书习题共分三类：练习、习题、复习参考题.

1. 练习　供课堂练习用；

2. 习题　供课内、外作业用；

3. 复习参考题　供复习本章知识时使用.

习题及复习参考题的题量多于通常所需题量，供教学时根据情况选用.

四、本书由人民教育出版社数学室编写. 参加编写的有曾宪源、饶汉昌、贾云山、蔡上鹤、方明一等. 全书由吕学礼校订.

# 目　录

# 第五章　数列与数学归纳法

## 一　数　　列

### 5.1　数列

我们看下面的例子：

图 5-1 表示堆放的钢管，共堆放了 7 层．自上而下各层的钢管数排列成一列数：

$$4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \tag{1}$$

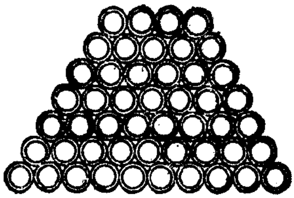


图　5-1

自然数 1, 2, 3, 4, 5, …的倒数排列成一列数：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots. \tag{2}$$

$\sqrt{2}$ 的精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, …的不足近似值排列成一列数：

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots. \tag{3}$$

$-1$ 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂，……排列成一列数：

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots. \tag{4}$$

无穷多个 1 排列成一列数:

$$1, 1, 1, 1, \cdots. \tag{5}$$

象上面的例子中,按一定次序排列的一列数叫做**数列**.数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**,各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项),第 2 项,……,第 $n$ 项,…….对于上面的数列(1),每一项与它的序号有下面的对应关系:

$$\begin{array}{cccccccc} \text{项} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{序号} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

这告诉我们:数列可以看作一个定义域为自然数集 $N$(或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$)的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中 $a_n$ 是数列的第 $n$ 项.有时我们把上面的数列简记作 $\{a_n\}$.例如,把数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

简记作 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.如果数列 $\{a_n\}$ 的第 $n$ 项 $a_n$ 与 $n$ 之间的函数关系可以用一个公式来表示,这个公式就叫做这个数列的**通项公式**.例如,数列(1)的通项公式是 $a_n = n+3\,(n \leqslant 7)$,数列(2)的通项公式是 $a_n = \frac{1}{n}$.如果已知一个数列的通项公式,那么只要依次用 $1, 2, 3, \cdots$ 去代替公式中的 $n$,就可以求出这个数列的各项.

数列可以用图形来表示．在画图时，为方便起见，在平面直角坐标系两条坐标轴上取的单位长度可以不同．图5-2(1)，(2)分别是数列(1)，(2)的图形表示．从图上看，数列可用一群孤立的点表示．

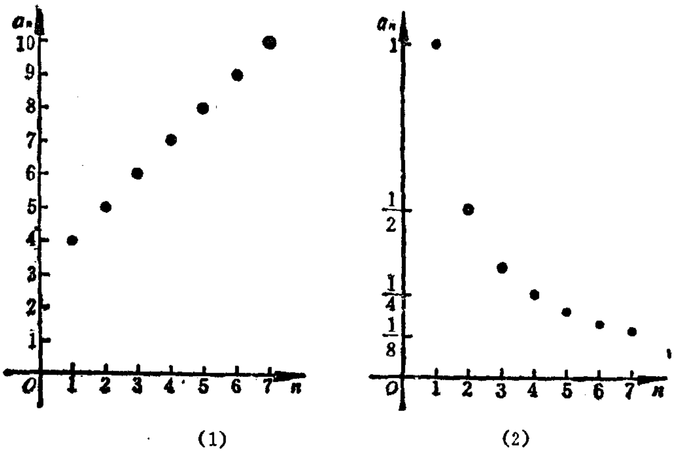


图 5-2

项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**．上面的数列(1)是有穷数列，数列(2)，(3)，(4)，(5)都是无穷数列．

**例 1** 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$；　　　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n$．

**解**：(1) 在通项公式中依次取$n=1, 2, 3, 4, 5$，得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1, 2, 3, 4, 5$, 得到数列$\{a_n\}$的前 5 项为

$$-1, 2, -3, 4, -5.$$

**例 2** 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) $1, 3, 5, 7$;

(2) $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$;

(3) $-\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}$.

**解**: (1) 数列的前 4 项 $1, 3, 5, 7$ 都是序号的 2 倍减去1, 所以通项公式是 $a_n=2n-1$;

(2) 数列的前 4 项$\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$的分母都是序号加上1, 分子都是分母的平方减去 1, 所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1};$$

(3) 数列的前 4 项$-\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, -\frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}$的绝对值都等于序号与序号加上 1 的积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正, 所以通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

## 练 习

**1.** 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式, 写出它的前 5 项:

(1) $a_n=n^2$;　　　　(2) $a_n=10n$;

(3) $a_n=5(-1)^{n+1}$;　　(4) $a_n=\frac{2n+1}{n^2+1}$.

2. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的第7项与第10项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^3}$;　　(2) $a_n=n(n+2)$;

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(4) $a_n=-2^n+3$.

3. (口答)说出数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1) 2, 4, 6, 8;　　(2) 15, 25, 35, 45;

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$;

(4) $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并对每一个数列各写出一个通项公式：

(1) 2, 4, (　), 8, 10, (　), 14;

(2) 2, 4, (　), 16, 32, (　), 128, (　);

(3) (　), 4, 9, 16, 25, (　), 49;

(4) (　), 4, 3, 2, 1, (　), $-1$, (　);

(5) 1, $\sqrt{2}$, (　), 2, $\sqrt{5}$, (　), $\sqrt{7}$.

**例3**　已知数列$\{a_n\}$的第1项是1，以后的各项由公式$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}$给出，写出这个数列的前5项.

**解**: $a_1=1,$

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=\frac{8}{5}.$$

**练 习**

写出下面数列$\{a_n\}$的前 5 项:

1. $a_1=5,\quad a_{n+1}=a_n+3.$
2. $a_1=2,\quad a_{n+1}=2a_n.$
3. $a_1=3,\quad a_2=6,\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n.$
4. $a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}.$

## 5.2 等差数列

考察上一节中提到过的数列

$$4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10. \tag{1}$$

我们可以发现，这个数列有这样的特点:从第 2 项起，每一项与它的前一项的差都等于 1.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，公差通常用字母 $d$ 表示. 例如，数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots$$

与

$$5, 0, -5, -10, \cdots$$

都是等差数列，它们的公差分别是 2 与 $-5$。)

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是等差数列，它的公差是 $d$，那么

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots.$$

由此可知，等差数列$\{a_n\}$的通项公式是

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.}$$

如果一个等差数列$\{a_n\}$的首项是 1，公差是 2，那么将它们代入上面的公式，就得到通项公式

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 2,$$

即

$$a_n = 2n - 1.$$

这个数列可用图 5-3 来表示. 从图中看到，表示这个等差数列各项的点都在同一直线 $y = 2x - 1$ 上.

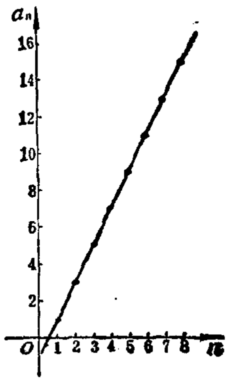



图 5-3

**例 1** 求等差数列 $8, 5, 2, \cdots$ 的第 20 项.

**解**：∵ $a_1=8$，$d=5-8=-3$，$n=20$，

∴ $$a_{20}=8+(20-1)\times(-3)$$
$$=-49.$$

**例 2** 等差数列$-5$，$-9$，$-13$，… 的第几项是$-401$？

**解**：$a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，$a_n=-401$，

因此，

$$-401=-5+(n-1)\times(-4).$$

解得

$$n=100.$$

答：这个数列的第 100 项是$-401$.

**例 3** 梯子的最高一级宽 33cm，最低一级宽 110cm，中间还有 10 级，各级的宽度成等差数列．计算中间各级的宽．

解：用$\{a_n\}$表示题中的等差数列，由已知条件，有

$$a_1=33,\qquad a_{12}=110,\qquad n=12,$$

$$a_{12}=a_1+(12-1)d,$$

即

$$110=33+11d.$$

解得

$$d=7.$$

因此，

$$a_2=33+7=40,$$

$$a_3=40+7=47,$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

$$a_{11}=96+7=103.$$

答：梯子中间各级的宽从上到下依次是 40，47，54，61，

68, 75, 82, 89, 96, 103cm.

如果在 $a$ 与 $b$ 中间插入一个数 $A$, 使 $a, A, b$ 成等差数列, 那么 $A$ 叫做 $a$ 与 $b$ 的**等差中项**.

如果 $A$ 是 $a$ 与 $b$ 的等差中项, 那么 $A-a=b-A$, 所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

容易看出, 在一个等差数列中, 从第 2 项起, 每一项(有穷等差数列的末项除外)都是它的前一项与后一项的等差中项.

**练　习**

**1.** (1) 求等差数列 3, 7, 11, … 的第 4, 7, 10 项;

(2) 求等差数列 10, 8, 6, … 的第 20 项;

(3) 求等差数列 2, 9, 16, … 的第 $n$ 项;

(4) 求等差数列 $0,\ -3\frac{1}{2},\ -7, \cdots$ 的第 $n+1$ 项.

**2.** 在等差数列 $\{a_n\}$ 中:

(1) 已知 $d=-\frac{1}{3}$, $a_7=8$, 求 $a_1$;

(2) 已知 $a_1=12$, $a_6=27$, 求 $d$;

(3) 已知 $a_1=3$, $a_n=21$, $d=2$, 求 $n$;

(4) 已知 $a_4=10$, $a_7=19$, 求 $a_1$ 与 $d$.

下面通过具体例子, 说明求等差数列的前 $n$ 项和的方法.

为了求出图 5-1 所示的钢管的总数, 我们可以设想如图 5-4 那样, 在这堆钢管的旁边倒放着同样的一堆钢管. 这样, 每层的钢管数都相等, 即

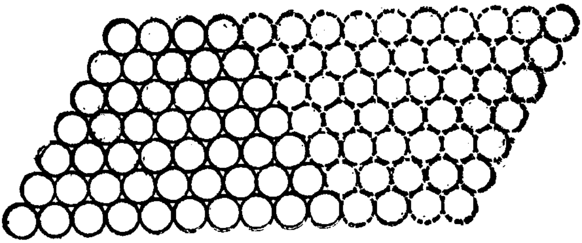


图 5-4

$$4+10=5+9=6+8=\cdots=10+4.$$

由于共有 7 层，两堆钢管的总数是$(4+10)\times 7$，因此所求的钢管总数是

$$\frac{(4+10)\times 7}{2}=49.$$

一般地，设有等差数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,$$

它的前 $n$ 项的和是$S_n$，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等差数列$\{a_n\}$的通项公式，上式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d];\quad (1)$$

再把项的次序反过来，$S_n$ 又可以写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d].\quad (2)$$

把(1)，(2)的两边分别相加，得

$$\begin{aligned}2S_n&=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{ 个}}\\&=n(a_1+a_n).\end{aligned}$$

由此得到等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项的和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$, 所以上面的公式又可写成

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

**例 4** 如图 5-5, 一个堆放铅笔的V 形架的最下面一层放 1 支铅笔, 往上每一层都比它下面一层多放 1 支, 最上面一层放 120 支. 这个V 形架上共放着多少支铅笔?

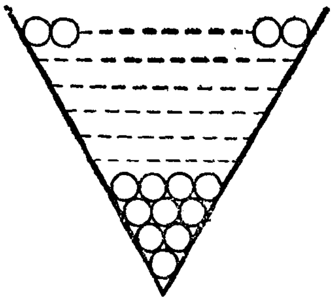


图 5-5

**解**: 由题意可知, 这个 V形架上共放着 120 层铅笔, 且自下而上各层的铅笔数组成等差数列, 记为$\{a_n\}$, 其中 $a_1=1$, $a_{120}=120$. 根据等差数列$\{a_n\}$前 $n$ 项和的公式, 得

$$S_{120}=\frac{120\times(1+120)}{2}=7260.$$

**答**: V 形架上共放着 7260 支铅笔.

**例 5** 求集合$M=\{m\mid m=7n, n\in N, 且m<100\}$的元素个数, 并求这些元素的和.

解：∵ $$7n<100,$$

∴ $$n<\frac{100}{7},$$

$$n<14\frac{2}{7}.$$

由于满足上面不等式的自然数 $n$ 共有 14 个，集合 $M$ 中的元素共有 14 个．将它们从小到大列出，得

$$7, \quad 7\times 2, \quad 7\times 3, \quad \cdots, \quad 7\times 14,$$

即

$$7, 14, 21, \cdots, 98.$$

这个数列是等差数列，记为$\{a_n\}$，其中$a_1=7$, $a_{14}=98$．因此，

$$S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735.$$

答：集合 $M$ 共有 14 个元素，它们的和等于 735.

例 5 表明，在小于 100 的正整数中共有 14 个数是 7 的倍数，它们的和是 735.

**例 6** 已知一个直角三角形的三条边的长成等差数列，求证它们的比是 3:4:5.

**证明**：将成等差数列的三条边的长从小到大排列，它们可以表示为$a-d$，$a$，$a+d$，这里 $a-d>0$, $d>0$．由于它们是直角三角形的三条边的长，根据勾股定理，得到

$$(a-d)^2+a^2=(a+d)^2.$$

解得

$$a=4d,$$

从而这三条边的长是 $3d$, $4d$, $5d$.

因此，这三条边的长的比是 3:4:5.

## 练 习

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 的 $S_n$:

(1) $a_1=5, a_n=95, n=10$;

(2) $a_1=100, d=-2, n=50$;

(3) $a_1=\frac{2}{3}, a_n=-\frac{3}{2}, n=14$;

(4) $a_1=14.5, d=0.7, a_n=32$.

2. (1) 求自然数列中前 $n$ 个数的和;

(2) 求自然数列中前 $n$ 个偶数的和。

## 习 题 十 五

1. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 3, 6, 9, 12;　　(2) 0, −2, −4, −6;

(3) $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$;

(4) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times4}$;

(5) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}$;

(6) $\sqrt[3]{1}, -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{4}$.

2. 已知无穷数列 $1\times2, 2\times3, 3\times4, 4\times5, \cdots, n(n+1), \cdots$.

(1) 求这个数列的第 10 项，第 31 项及第 48 项;

(2) 420 是这个数列中的第几项?

3. (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是1，第 2 项是2，以后各项由公式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 给出。写出这个数列的前10项。