初中一年级（下）

中学数学系列讲座

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会
编

清华大学出版社

中学数学系列讲座

初中一年级

（下册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是初中一年级下学期学生的数学课外读物. 目的是为了扩大学生知识面, 丰富解题方法, 提高数学的分析解题能力.

全书共十讲, 内容包括二元一次方程组、乘法公式、对称式、分式及分式方程、代数恒等式、换元法、分离系数法等. 每讲都有方法介绍、例题分析、总结规律, 并配有练习题与答案. 本书可供自学青年及初中数学教师参考使用, 并为各校开展课外数学小组活动提供素材.

中学数学系列讲座

初中一年级(下册)

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

保定科技印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

☆

开本: 787×1092 1/32 印张: 5 字数: 110 千字

1989 年 2 月第 1 版 1989 年 2 月第 1 次印刷

印数: 00001—30000 定价: 1.30 元

ISBN 7-302-00359-9/O·67

前　言

《中学数学系列讲座》共分 11 册，初中一、二、三年级及高中一、二年级上、下各一册，高三年级全一册。

这套书是以“十年制数学教学大纲”为依据，参照各年级教科书内容与实际教学进度编写而成，这是一套具有提高性质的课外读物，用以扩大学生的知识面，开拓视野，丰富解题方法，提高学生分析问题与解决问题的能力。

本“系列讲座”以数学专题讲座的形式编写，各讲独立成章，便于学生根据自己的兴趣和需要灵活选读，亦可供中学数学教师和自学者参考，并为各校开展数学课外活动提供素材。

这套书由北京市海淀区教师进修学校数学组与北京数学会海淀区分会联合组成编委会，负责组织编写，并得到海淀区教育局的支持和指导。由于经验不足，一定有不少缺点，请读者批评指正，以便今后修改与补充。

《中学数学系列讲座》编委会

《中学数学系列讲座》

编委会名单

目　录

第一讲

可化为二元一次方程组的方程组的换元解法

阎敬先

二元一次方程组是最简单的方程组，可以通过代入消元，加减消元的方法将其消去一个未知数，把解二元一次方程组化为解一元一次方程，从而求得二元一次方程组的解。但是，有些分式方程组，无理方程组或更为复杂的方程组（注1），通过加减消元，代入消元不容易或不能解出方程组的解，为此我们介绍解方程组的另一种方法——换元法。

一、换元法的解题思路

由于二元一次方程组简单，通常用代入消元，加减消元就可以求出方程组的解来。

例1 解方程组：

$$\begin{cases} x+y=2 & ① \\ x-y=2 & ② \end{cases}$$

解 (1) 由①得 $y=2-x$ ③

把③代入②得 $x-(2-x)=2$

$x-2+x=2$，$2x=4$，$x=2$。把 $x=2$ 代入③ $y=2-2$。

$\therefore\ y=0$。$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 是方程组的解。这是用代入法解二元一次方程组。

解（2）由①＋②得 $2x=4$，$x=2$，把 $x=2$ 代入① $2+y=2$，$\therefore y=0$，$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 是原方程组的解。这是用加减消元法解二元一次方程组。

任何一组二元一次方程组都可以用这两种方法求解。

我们不妨把方程组进行这样的变形：

解(3) 由① $x+y=2$ 得 由② $x-y=2$ 得

$$\begin{cases} (x-1)+(y-1)=0 & ③ \\ (x-1)-(y-1)=2 & ④ \end{cases}$$

在方程组中都出现了 $x-1$，$y-1$ 这样含有未知数的表达式。通过代入消元或加减消元求出表达式的值，然后再通过表达式求出未知数的值。为了简单可设两个辅助未知量：设 $x-1=u$，$y-1=v$。则方程组变形为：

$$\begin{cases} u+v=0 & ⑤ \\ u-v=2 & ⑥ \end{cases} \quad 得 \quad \begin{cases} u=1 \\ v=-1 \end{cases}$$

又由 $x-1=u$，$u=1$，$x=2$，$y-1=v$，

$v=-1$，$y-1=-1$，$y=0$。

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 是原方程组的解。

这种类型的方程组进行这样的变形求解显然是多此一举的了。但对于大量的方程组，例如：

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{3y}=1 \\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{10}{y}=5. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+2}}=1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+2}}=4 \end{cases}$$

还有一些超越方程组用上题解(3)的方法就显示出它的优越性了。我们把这种方法叫作换元法。

换元法适用于解方程和方程组，它的一般原理是什么呢？

如果方程 $F(x)=0$ 的左端 $F(x)$ 表示为 $F(x)=f(t)$，$t=\varphi(x)$.而方程 $f(t)=0$ 与 $t=\varphi(x)$ 是比较简单的方程，则可进行换元：令 $t=\varphi(x)$，方程 $F(x)=0$ 化为方程 $f(t)=0$，假定 t_1、t_2、…、t_k 是 $f(t)=0$ 的 k 个根，解方程 $F(x)=0$ 就归结为解 k 个比较简单的方程：$t_i=\varphi(x)$，$i=1,2,\cdots,k$。这样就可以由 $t=\varphi(x)$ 求出相应的 x 值了。

对于方程组来说，什么叫换元法解方程组呢？

如果方程组中只有某一种（或几种）含有未知数的表达式时，则可以先设辅助未知量求出这种(或这几种)表达式的值，然后再通过表达式的值，求出原方程组中未知量的值，从而达到解方程组的目的。这种解方程组的方法叫做换元法。

在应用换元法时需要注意的是：

(1) 如果代换 $t=\varphi(x)$ 后，扩大或缩小了方程 $F(x)=0$ 的未知数的取值范围，应注意增根或失根。只要从扩大或缩小了的未知数取值范围内剔去或找回即可。

(2) 如果 $F(x)$ 是几个式子复合而成的(注 2)，进行了改变未知数取值范围的恒等变形，同时考虑有增根或失根的可能。

这两点在应用换元法解方程或方程组时应特别注意。

二、可以应用换元法来解的方程组类型

1. 特殊的分式方程组

含有分式方程的方程组叫分式方程组。对于特殊的分式方程组，可以利用设辅助未知数的换元法，把分式方程化为整式方程。这样来解分式方程组方便。

例 2 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2 & ① \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 & ② \end{cases}$ （Ⅰ）这是比较简单的分式方程组。

解：设辅助未知数，令

$$u=\frac{1}{x},\qquad v=\frac{1}{y}.$$

$\therefore \begin{cases} u+v=2 & ③ \\ u-v=1 & ④ \end{cases}$ （Ⅱ）把方程组（Ⅱ）进行代入消元或加减消元．③＋④得 $u=\dfrac{3}{2}$。把 $u=\dfrac{3}{2}$代入③得 $v=\dfrac{1}{2}$。

$$\therefore \begin{cases} u=\dfrac{3}{2} \\ v=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad 又\because \quad \begin{matrix} u=\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2} & \therefore x=\dfrac{2}{3} \\ v=\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2} & \therefore y=2 \end{matrix} \quad \therefore \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=2 \end{cases}$$

是原方程组的解（注：由方程组（Ⅰ）变形到方程组（Ⅱ）未知数的允许值的范围没有扩大也没有缩小）。

我们再看比例 2 略微复杂一点的例 3。

例 3 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=-1 & ① \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=-6 & ② \end{cases}$ （Ⅰ）

解：我们还设 $u=\dfrac{1}{x}$，$v=\dfrac{1}{y}$。$\therefore$ 方程组（Ⅰ）就变为：

$$\begin{cases} 2u+3v=-1 & ③ \\ 3u-2v=-6 & ④ \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})$$

把③×2得：$\begin{cases} 4u+6v=-2 & ⑤ \\ 9u-6v=-18 & ⑥ \end{cases}$ 把④×3得： ⑤+⑥得，$13u=-20$

$$\therefore\ u=-\frac{20}{13},\quad \therefore\ \frac{1}{x}=-\frac{20}{13},\quad \therefore\ x=-\frac{13}{20}.$$

把 $u=-\frac{20}{13}$ 代入③得 $-\frac{40}{13}+3v=-1$，

$$\therefore\quad 3v=\frac{27}{13} \qquad\qquad \therefore\ v=\frac{9}{13}$$

又∵ $v=\frac{1}{y}=\frac{9}{13}$，∴ $y=\frac{13}{9}$. 在由方程组(Ⅰ)变形到方程组（Ⅱ）的过程中，未知数 x，y 的取值范围没有发生变化。

$$\because \begin{cases} x=-\frac{13}{20} \\ y=\frac{13}{9} \end{cases}$$ 是原方程组的解。

例 4 前面的例子：

$$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{5}{3y}=1 & ① \\ \frac{9}{x}+\frac{10}{y}=5 & ② \end{cases} \qquad (\text{Ⅰ})$$

解：设 $u=\frac{1}{x}$，$v=\frac{1}{y}$. ∴ 方程组(Ⅰ)变形为

$$\begin{cases} 2u+\frac{5}{3}v=1 & ③ \\ 9u+10v=5 & ④ \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})$$

由③ $\begin{cases} 6u+5v=3 & ④ \\ 9u+10v=5 & ⑤ \end{cases}$

把⑤×(−2) 得

$\begin{cases} -12u-10v=-6 & ⑥ \\ 9u+10v=5 & ④ \end{cases}$ ⑥+④得 $-3u=-1$ $u=\dfrac{1}{3}$

把 $u=\dfrac{1}{3}$ 代入⑤： $6\times\dfrac{1}{3}+5v=3$

$$\therefore\ v=\frac{1}{5}. \quad \because\ u=\frac{1}{x}=\frac{1}{3}. \quad \therefore\ x=3.$$

$$\because\ v=\frac{1}{y}=\frac{1}{5} \qquad \therefore\ y=5.$$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$ 是原方程的解.

我们再来看看较复杂的例子.

例 5 $\begin{cases} \dfrac{2}{x-3}+\dfrac{5}{2y+3}=-4 & ① \\ \dfrac{6}{x-3}-\dfrac{2}{2y+3}=5 & ② \end{cases}$ （Ⅰ）

这题里含有未知数的代数式 $\dfrac{1}{x-3}$，$\dfrac{1}{2y+3}$.

解：设 $u=\dfrac{1}{x-3}$， $v=\dfrac{1}{2y+3}$. 方程组（Ⅰ）变形为

$$\begin{cases} 2u+5v=-4 & ③ \\ 6u-2v=5 & ④ \end{cases} \qquad （Ⅱ）$$

③×3 得 $6u+15v=-12$ ⑤

⑤−④ $17v=-17$. $v=-1$. 把 $v=-1$ 代入③：

$$2u-5=-4, \quad u=\frac{1}{2}.$$

$\because\quad u=\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\ x-3=2$，$\therefore\ x=5$。

$\because\ v=\dfrac{1}{2y+3}=-1$，$\therefore\ 2y+3=-1$，$\therefore\ y=-2$。

$\therefore\quad \begin{cases}x=5\\y=-2\end{cases}$ 是原方程组的解。

我们利用换元法还可以解含有三个未知数的代数式的方程组。

例 6

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=1 & ①\\[2ex] \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=-3\dfrac{1}{2} & ②\\[2ex] \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=-9\dfrac{1}{2} & ③\end{cases}\qquad (\mathrm{I})$$

解：设 $\dfrac{1}{x}=u$，$\dfrac{1}{y}=v$，$\dfrac{1}{z}=t$。那么原方程组就变为

$$\begin{cases}u-2v+t=1 & ④\\[1ex] 2u+3v-t=-3\dfrac{1}{2} & ⑤\\[1ex] 3u-v-2t=-9\dfrac{1}{2} & ⑥\end{cases}\qquad (\mathrm{II})$$

先消去 t

$$\begin{array}{l}④+⑤:\\[2ex] ④\times 2+⑥\end{array}\begin{cases}3u+v=-2\dfrac{1}{2} & ⑦\\[2ex] 5u-5v=-7\dfrac{1}{2} & ⑧\end{cases}\qquad (\mathrm{III})$$

解方程组（Ⅲ）$\begin{cases}u=-1\\[1ex] v=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 把 $u=-1$，

$v=\frac{1}{2}$代入④得：$-1-1+t=1$，　$\therefore\ t=3$

$$\begin{cases}\frac{1}{x}=-1\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{z}=3\end{cases}\qquad \therefore\begin{cases}x=-1\\ y=2\\ z=\frac{1}{3}\end{cases}$$ 是原方程组的解。

2. 特殊的无理方程组（注3）：

含有无理方程的方程组叫无理方程组。对于特殊的无理方程组，可以利用设辅助未知数的换元法，把无理方程化为有理方程。这样来解无理方程组比较简单。

例 7

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2 & ①\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=-1 & ②\end{cases}\qquad (\text{Ⅰ})$$

解：设 $u=\sqrt{x}$，　$v=\sqrt{y}$，方程组（Ⅰ）变形为

$$\begin{cases}u+v=2 & ③\\ u-v=-1 & ④\end{cases}\quad (\text{Ⅱ})$$ 解方程组（Ⅱ）$$\begin{cases}u=\frac{1}{2}\\ v=\frac{3}{2}\end{cases}$$

又 $\because\ u=\sqrt{x}=\frac{1}{2}$，　$\therefore\ x=\frac{1}{4}$

$\because\ v=\sqrt{y}=\frac{3}{2}$，　$\therefore\ y=\frac{9}{4}$。$\because$由方程组（Ⅰ）变为方程组（Ⅱ），未知数的取值范围没有发生变化，

$$\therefore\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{9}{4}\end{cases}$$ 是原方程的解。

例 8 $\begin{cases} 3\sqrt{x-1}-2\sqrt{y-1}=1 & ① \\ 2\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}=1 & ② \end{cases}$ （Ⅰ）

解：设 $u=\sqrt{x-1}$，$v=\sqrt{y-1}$。方程组（Ⅰ）变形为

$\begin{cases} 3u-2v=1 & ③ \\ 2u+v=1 & ④ \end{cases}$ （Ⅱ） 解方程组（Ⅱ）得 $\begin{cases} u=\dfrac{3}{7} \\ v=\dfrac{1}{7} \end{cases}$

$\because\ u=\sqrt{x-1}=\dfrac{3}{7}$ $\therefore\ x-1=\dfrac{9}{49}$ $\therefore\ x=1+\dfrac{9}{49}=\dfrac{58}{49}$

$\because\ v=\sqrt{y-1}=\dfrac{1}{7}$ $\therefore\ y-1=\dfrac{1}{49}$ $\therefore\ y=1+\dfrac{1}{49}=\dfrac{50}{49}$

∵由方程组（Ⅰ）变为方程组（Ⅱ）及解 $u=f(x)$，$v=g(x)$ 的过程中，未知数的取值范围未发生变化，

$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{58}{49} \\ y=\dfrac{50}{49} \end{cases}$ 是原方程组的解。

例 9

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt{y-2}}=7 & ① \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{3}{\sqrt{y-2}}=-1 & ② \end{cases} \quad (\text{Ⅰ})$$

解：这个题比上题更为复杂，但解题的思路和方法不变。

设： $u=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$，　$v=\dfrac{1}{\sqrt{y-2}}$。

方程组（Ⅰ）变为

$$\begin{cases} u+5v=7 & ③ \\ u-3v=-1 & ④ \end{cases} \quad (\text{Ⅱ})$$

解方程组（Ⅱ）得 $\begin{cases} u=2 \\ v=1. \end{cases}$

$\because\ u=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=2,\qquad \therefore \sqrt{x-1}=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore\ x-1=\dfrac{1}{4},\qquad \therefore\ x=\dfrac{5}{4}.$

$\because\ v=\dfrac{1}{\sqrt{y-2}}=1,\qquad \therefore \sqrt{y-2}=1.$

$\therefore\ y-2=1,\qquad \therefore\ y=3.$

∵ 在把方程组（Ⅰ）变为方程组（Ⅱ）的过程中及解 $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=2$，$\dfrac{1}{\sqrt{y-2}}=1$ 时，未知数的取值范围都没有发生变化，即未知量的允许值没有扩大也没有缩小。

$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{5}{4} \\ y=3 \end{cases}$ 是原方程组的解。

例 10

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}}+1=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{y-1}}}+1 & ① \\ \dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}}+\dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{1}{y-1}}}=7 & ② \end{cases}\qquad（Ⅰ）$$

此题比以上所有题目都复杂，它含有未知数的代数式 $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{y-1}}}$，是个比较复杂的代数式。

题目复杂，但解题的思路和方法不变。仍然用设辅助未知数的换元法，设两次未知数来解决。

解：设 $u=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}}$，$\dfrac{1}{x-1}=w$；$v=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{y-1}}}$，

$\dfrac{1}{y-1}=t$，$\therefore\ u=\dfrac{1}{\sqrt{w}}$，$v=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$。

方程组(Ⅰ)变形整理为

$$\begin{cases}u-2v=0 & ③\\ 2u+3v=7 & ④\end{cases}\qquad (Ⅱ)$$

解方程组(Ⅱ)得 $\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}$

又 $\because\ u=\dfrac{1}{\sqrt{w}}=2$，$\therefore \sqrt{w}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore w=\dfrac{1}{4}$。

$\because w=\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{4}$，$\therefore\ x-1=4$，$\therefore\ x=5$。

$\because\ v=\dfrac{1}{\sqrt{t}}=1$，$\therefore\ \sqrt{t}=1$，$\therefore\ t=1$。

$\because\ t=\dfrac{1}{y-1}=1$，$\therefore\ y-1=1$，$\therefore\ y=2$。

在整个方程组变形和解方程组过程中，未知数的允许值范围没有扩大也没有缩小。

$\therefore\ \begin{cases}x=5\\ y=1\end{cases}$ 经检验是原方程组的解。

3． 特殊的高次方程组

高次方程组相当复杂，初一所学知识远远达不到要求。但对少数特殊的高次方程，还是可以用换元法加以解决的。

例 11 $\begin{cases}x^2=4 & ①\\ x^2+y^2=5 & ②\end{cases}\qquad (Ⅰ)$