SHUXUE ZIXI YU FUDAO

数学

自习与辅导

立体几何

夏明德 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

立体几何

夏明德 编

上海科学技术出版社

数学自习与辅导

立体几何

夏明德　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海新华印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张6.25　字数138,000

1987年4月第1版　1987年4月第1次印刷

印数：1—89,000

统一书号：13119·1346　　定价：0.86元

出版说明

《数学自习与辅导》是配合各类中学学生和自学青年进行文化课学习的课外读物。高中部分共六个分册。

本书的出版，旨在指导读者通过自习的方式，加深理解数学概念，熟练掌握基本解题思路和方法，进而使读者在把握知识重点、难点、关键和提高综合运用知识的能力等方面，都有所得益。

本书为立体几何。

由于时间仓促，疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

目　　录

第一章 直线和平面

一、平 面

平面是一个只能描述而不能下定义的最基本的空间概念。我们可以从生活中常见的一些平的物体的表面，例如平的玻璃面、平静的水面等等，从而得到抽象的平面的形象。

平面是一个十分重要的概念，它是研究空间图形性质的重要理论基础，可以说，整个立体几何学的科学大厦，就是建立在平面及其基本性质的基础之上的，我们必须引起足够的重视。

平面这一节中的重点是平面的三条基本性质，或称平面三公理，这是研究空间图形性质的理论基础，其中尤以平面的确定这一公理及其三条推论最为关键。

平面这一节中的难点是平面的无限延展性，初学的同学常常把平面错误理解为有限的，即有边界的，于是错误地认为两个平面相交于一条线段或者交于一点。

在平面这一节中，关键是要掌握平面图形的画法。掌握空间图形画法规则，把空间图形在平面内画得既富于立体感，又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系，对正确思维和正确解题是很有益的。

【学习指导和例题】

例 1 试判断：

(1) 一个平面把空间分成几个部分?

(2) 两个相交平面把空间分成几个部分?

(3) 三个两两相交的平面的交线过一点，这三个平面把空间分成几个部分?

解 (1) 根据平面的无限延展性的特点可知，它把整个空间一分为二①，因此说，一个平面把空间分成两部分。

(2) 两个相交平面分别把空间一分为二，因而它们把空间共分成四个部分，它们分别以交线处的两个平面为界。

(3) 这三个相交平面所构成的图形，实际上就是过两个相交平面的交线上任一点平面，与前面两个平面分别相交所构成的空间图形。显然，这第三个平面将原来被两个相交平面分成的空间四个部分又一分为二，这样共将空间分成八个部分(图 1-1)。

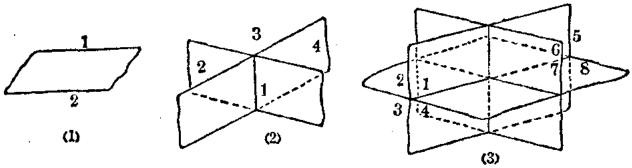


图 1-1

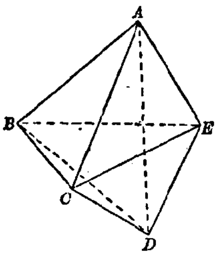


图 1-2

例 2 空间任意五点②可以确定几个平面。

解 设空间任意五点为 A、B、C、D、E。

任取其中三点，由平面公理 3 可知可确定一个平面。这样的平面有:

① 为简化起见，略去平面本身这一部分.

② 空间任意五点，一般是指这五点中，任意三点不在一直线上，任意四点不在同一平面内.

平面 ABC，平面 ABD，平面 ABE，平面 ACD，平面 ACE，平面 ADE，平面 BCD，平面 BCE，平面 BDE，平面 CDE 共十个（图 1-2）。

【说明】 一般地，如果空间有 n 个点（$n \geqslant 3$ 的正整数），其中任意三点不共线，任意四点不共面时，这 n 个点中可以确定的平面数，相当于从 n 点中任选三点的组合数。由组合公式

$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}$$

可求得平面数。如空间任意 100 点可确定

$$C_{100}^3 = \frac{100\times 99\times 98}{1\times 2\times 3} = 161700 \text{ 个平面。}$$

例 3 空间六边形的对边分别平行且相等，试证六边中点共面。

分析 设空间六边形为 $ABCDEF$（图 1-3），按题设有 $AB \underline{\parallel} ED$，$BC \underline{\parallel} FE$，$CD \underline{\parallel} AF$，若 G、H、K、L、M、N 分别为六条边 AB、BC、CD、DE、EF、FA 的中点，欲证 G、H、K、L、M、N 共面，由于 $GN \parallel HM \parallel KL$，可连 NK，只需证明 NK 分别与 GN，HM，KL 相交即得。

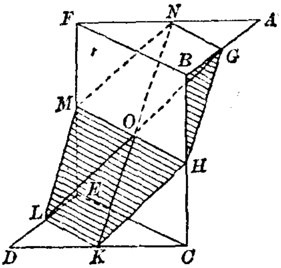


图 1-3

证明 连结 NG、FB、MH、CE 及 LK。由三角形中位线及平行四边形对边中点连线性质可知：

$$NG \underline{\parallel} \frac{1}{2}BF,\quad BF \underline{\parallel} HM \underline{\parallel} CE,\quad LK \underline{\parallel} \frac{1}{2}CE.$$

$$\therefore\ NG \parallel HM \parallel KL,\quad \text{且 } NG \underline{\parallel} KL.$$

连结 NK、GL，设其交点为 O，则 O 为 NK 的中点。

同理，$HK \underline{\parallel} MN$

$\left(\because\ HK \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BD,\ MN \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AE,\ 而\ AE \mathrel{\underline{\parallel}} BD\right)$.

则 NK 与 MH 交于一点，且于此点平分。

即　　MH 与 NK 交于 NK 的中点 O。

于是，三平行线 NG、MH、LK 均与直线 NK 相交。

故　　NG、MH、LK 三线共面。

即　　G、H、K、L、M、N 六点共面。

【说明】 本题若不采用三平行线分别与直线相交的方法求证，则要证明六点共面就很复杂。

例 4　画出过 A、B、C 三点的平面与其它已知平面的交线。

(1) $\alpha\cap\beta=a$, A、$B\in\beta$, $C\in\alpha$，如图 1-4(1)；(2) $\alpha\cap\beta=a$, $\alpha\cap\gamma=b$, $\beta\cap\gamma=c$, A、$B\in\alpha$, $C\in\gamma$，如图 1-4(2)。

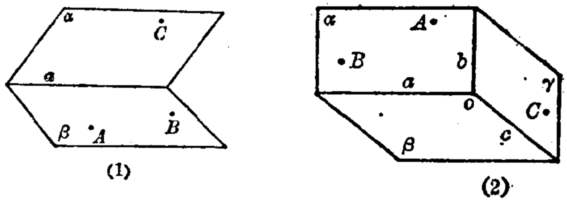


图 1-4

解　(1) 设过 A、B、C 三点的平面为 γ，

$\because$　$\alpha\cap\beta=a$, A、$B\in\beta$,

$\therefore$　$\beta\cap\gamma=AB$。设 $a\cap AB=X$。

$\because$　C、$X\in\alpha$,

$\therefore$　$\alpha\cap\gamma=CX$（公理 1）。

因此，由相交直线 AB，CX 所确定的平面 γ，即过三点 A、B、C 的平面，其与平面 β、α 的交线分别为 AB 及 CX（图 1-5）。

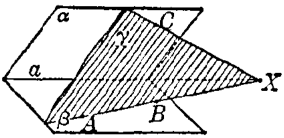


图 1-5

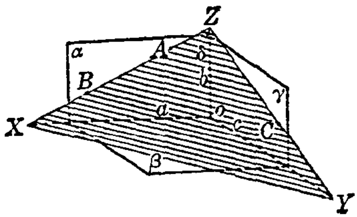


图 1-6

(2) 设过 A、B、C 三点的平面为 δ,

∵ A、$B\in\alpha$、δ,

∴ $\alpha\cap\delta=AB$(公理 1).

设 $a\cap AB=X$, $b\cap AB=Z$.

∵ c、$Z\in\gamma$、δ,

∴ $\gamma\cap\delta=CZ$(公理 1).

设 $c\cap ZC=Y$.

∵ X、$Y\in\beta$、δ.

∴ $\beta\cap\delta=XY$(图 1-6).

因此，由 XZ、ZY、XY 三条相交直线所确定的平面 δ，即过 A、B、C 三点的平面. 平面 δ 与平面 α、β、γ 的交线分别为 XZ, XY 及 ZY.

【说明】 对于平面公理的理解与掌握，不能停留在背得出条文上，重要的是要结合空间形体，会根据平面公理进行作图与表达，这方面初学者往往是感到比较困难的.

读者可以自己设计两个相交的平面；三个两两相交且交线经过一点的平面；或者一个已知的长方体或正方体，然后给出这些面上任意位置的三个点 A、B、C(一般不要使 A、B、C 成一直线)，然后分别画出过 A、B、C 三点的平面与其它平面的交线，这对于理解与应用平面公理发展空间想象力，是大有

好处的。

例 5 画出图 1-7 所示的正方体 A_1C 过棱上三已知点 C、E、G 的截面①。

解 ∵ 截面与侧面 CB_1 公有 C、E 两点，

∴ 截面与侧面 CB_1 相交于直线 CE。

∴ CE 与 C_1B_1 的交点 X 既在截面上又在底面 A_1C_1 上。

∵ 截面与底面 A_1C_1 公有 X、G 两点，

∴ 截面与底面 A_1C_1 相交于直线 XG。设 XG 交 A_1B_1 于 F，交 C_1D_1 于 Y。

∴ XG 与 C_1D_1 的交点 Y 既在截面上又在背面 C_1D 上。

∵ 截面与平面 C_1D 公有 C、Y 两点，

∴ 截面与平面 C_1D 公有直线 CY。

∴ CY 与 DD_1 的交点 H 既在截面上又在平面 C_1D 上。

∴ C、E、F、G、H 五点为截面与棱 CC_1、BB_1、A_1B_1、A_1D_1、

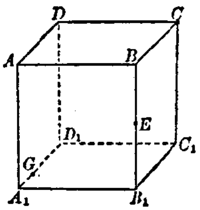


图 1-7

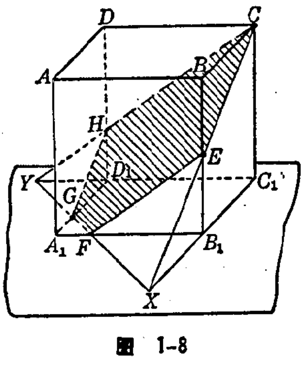


图 1-8

① 用一个平面去截一个几何体，该平面在几何体内部的图形叫做这个几何体的截面。

D_1D 的交点，此五点在一个平面上。

因此，五边形 $EFGHC$ 为所求过 C、E、G 三点的截面（图 1-8）。

例 6 证明两两相交而交点不在同一点的四条直线在同一平面内。

分析 设四条直线 a、b、c、d 两两相交，交点分别为 A、B、C、D、E、F，欲证 a、b、c、d 共面，可先从 a、b 相交得 A、B、F、D、E 共面 α，然后再证明点 C 亦在 α 内即可（图 1-9）。

证明 取 a、b 两条相交直线作一平面 α。

$\because$ a 与 b、c、d 相交于 A、E、D，

$\therefore$ A、D、$E \in a$，则 A、D、$E \in \alpha$。

$\because$ b 与 a、c、d 相交于 A、B、F，

$\therefore$ A、B、$F \in b$，则 A、B、$F \in \alpha$。

$\because$ D、$F \in \alpha$；B、$E \in \alpha$，

而 D、$F \in d$，B、$E \in c$，

$\therefore$ c、$d \subset \alpha$。 $\therefore$ $C \in \alpha$。

因此，a、b、c、d 四条直线都在平面 α 内。

【说明】

(1) 如图 (1-10)，当 a、b、c 相交于 A，d 与 a、b、c 分别相交于 D、F、E 时，a、b、c、d 也共面，证法步骤同上。

(2) 如图 1-11，a、b 相交于 A，b、c 相交于 B，c、d 相交

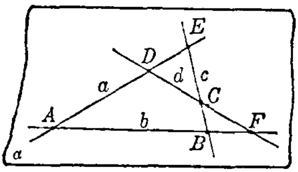


图 1-9

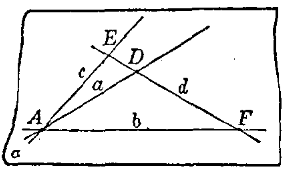


图 1-10

于 C, d、a 相交于 D 时，就不属于两两相交，即不符合题设每两条直线都相交的条件。（如 a 与 c 不相交，b 与 d 不相交，则 a、b、c、d 就不一定共面。）

可以想象，过两相交直线 a、b 的平面 α，与过两相交直线 c、d 的平面 β，它们仅公有 B、D 两点，因而 α、β 相交于 BD 这条交线，因此，不能确定点 C 在 a、b 所确定的平面内，这样，就不能得出 a、b、c、d 共面的结论（如空间四边形 $ABCD$）。

（3）本题如果只具有“两两相交”的条件，而没有给出“交点不在同一点”的限制，显然，a、b、c、d 四条直线都经过同一点的情况也是符合题意的，此时，四条直线一般就不可能共面，在一般情况下，它们最多可以构成六个平面。

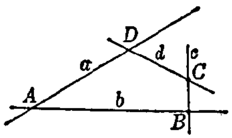


图 1-11

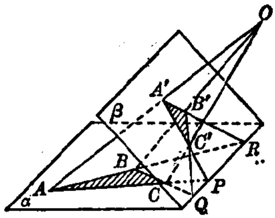


图 1-12

例 7 两个三角形 ABC 与 $A'B'C'$ 所在平面不平行，且其对应顶点的连线交于一点 O，求证对应边的三个交点 P、Q、R 三点共线（图 1-12）。

分析 关键在于证明这些交点同属于两个三角形所在的两个平面内，则三点必在这两平面的交线上。

证明 $\because$ AB、$A'B'$ 在平面 AOB 内，

$\therefore$ AB、$A'B'$ 若不平行，必有交点，设为 R。

同理，AC 与 $A'C'$，BC 与 $B'C'$ 交于某点设为 P、Q。

$\because$ AB、$A'B'$ 分别在 α、β 平面内，

$\therefore$　AB、$A'B'$ 的交点 R 同属于 α、β 平面。

同理，AC、$A'C'$ 的交点 P，BC、$B'C'$ 的交点 Q 同属于 α、β 平面。

即　P、Q、R 三点同属于 α、β 平面的交线。

$\therefore$　P、Q、R 三点共线。

【说明】　本题为著名的“空间图形的笛沙格定理”，它是平面图形的笛沙格定理的扩张，是射影几何中的一个重要命题。

本题如果改变为：“如果两个三角形的对应边延长分别相交，且三个交点在同一直线上，则对应顶点的连线交于一点或者互相平行”。命题也成立，读者不妨自行证明之。

基本练习题 1.1

1. 判断下列命题，凡正确的，在括号内画“√”，不正确的画“×”。

(1) 线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 不全在平面 α 内。　　(　)

(2) 平面 α 和平面 β 只有一个公共点。　　(　)

(3) 两平面公有 A、B 两点，则公有射线 AB。　　(　)

(4) 空间三点确定一个平面。　　(　)

(5) 三角形、平行四边形、梯形是平面图形。　　(　)

(6) 四边形、五边形必是平面图形。　　(　)

(7) 过空间一点作三条直线，这三条直线能确定一个平面。　　(　)

(8) 空间三条直线两两平行，且不在同一平面内，则可确定三个平面。　　(　)

(9) 一条直线与 n 条平行线都相交，则可确定一个平面。　　(　)

(10) 过一条直线的平面有无数。　　(　)

2. 读出下列符号和画出略图：

(1) $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，$C\in AB$。

(2) $A\in\alpha$，$a\in\alpha$，$A\in a$。

(3) $a\cap\alpha=A$, $b\cap\alpha=A$.

(4) $a\cap b=A$, $a\not\subset\alpha$, $b\not\subset\alpha$.

(5) $\alpha\cap\beta=a$, $b\cap a=A$, $b\subset\beta$.

(6) $\{A、B、C\}\subset\alpha$, $C\notin AB$, $\{A, C\}\subset\beta$, $\beta\neq\alpha$.

3．试用符号表示下列空间关系，并画出略图

(1) 点A属于平面α，但不属于平面β.

(2) 直线a通过不属于平面α的点M，并且a不在平面α内.

(3) 直线a和b相交于点M，M属于平面α，且a在α内，b不在α内.

(4) 直线a和平面α相交于点M，平面α和平面β相交于直线b，并且b不通过点M.

4．三角形的两个顶点属于一个平面α，如果已知α还包含

(1) 三角形内切圆圆心；

(2) 三角形外接圆圆心.

那么，这个三角形的第三个顶点属于平面α吗？为什么.

5．如果一个平面α，它包含

(1) 矩形的三个顶点；

(2) 矩形的两个顶点及对角线的交点.

那么，这个矩形的其余的顶点属于α吗？为什么.

6．如果一个平面α，它包含：

(1) 圆上两个不同的点；

(2) 圆上三个不同的点.

那么，圆上所有的点属于这个平面α吗？为什么.

7．正方体的上底面为$ABCD$，下底面对应于上底面的各点为$A_1B_1C_1D_1$.

(1) 直线AC_1和A_1B能不能相交？A_1C_1和D_1C呢？

(2) 过下列各组直线能不能作一个平面：

AD, B_1C_1; DC, DB_1; BC, AA_1?

(3) 若正方体棱长为a，过它相交于一个顶点的三条棱的另一端作一个截面，求这个截面的面积.

8. 如果空间四边形 $ABCD$ 的四边中点为 E、F、G、H，那么

(1) E、F、G、H 四点共面；

(2) EG 和 FH 相交且互相平分.

9. 求证一个平面和不在这个平面内的一条直线最多只能有一个公共点.

10. 求证：和相交于三点的三条直线都相交的直线必共面.

11. 已知 $a\cap b=C$，$b\cap c=A$，$c\cap a=B$，$A\neq B$. $A_1\in a$，$B_1\in b$，$C_1\in(A_1B_1)$，求证 $C_1\in(ABC)$.

12. 已知 $\alpha\cap\beta=m$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a\cap b=A$. 求证 $A\in m$.

13. 画出下列平面图形在水平位置时的直观图：

(1) 边长分别为 5cm、6cm、4cm 的三角形；

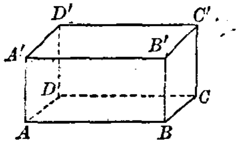
(2) 边长为 4 cm 的正三角形；

(3) 边长为 3cm 的正六边形；

(4) 相邻两边分别为 4cm 和 5cm 的矩形；

(5) 相邻两边分别为 4cm 和 5cm，夹角为 60° 的平行四边形；

(6) 半径为 3cm 的圆的内接正五边形.



(第 14 题)

14. 根据长方体的直观图，分别画出下列符号所表示的关系的图形 ($\square_{A'D}$ 表示平面 $A'AD$)：

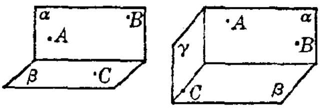
(1) $\square_{A'D}\cap\square_{A'B}=A'A$；

(2) $\square_{A'C'}\cap\square_{B'C}=B'C'$；

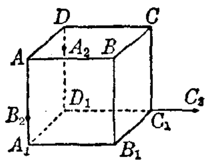
(3) $\square_{A'C'}\cap\square_{A'B}=A'B'$；

(4) $\square_{D'C}\cap\square_{AC}=DC$；

(5) $\square_{A'D}\cap\square_{DC'}\cap\square_{DB}=D$；



(第 15 题)



(第 16 题)

(6) $\square_{A'D}\cap\square_{AC}=AD$，且 $\square_{AC}\cap\square_{B'C}=BC$.

15. 画出图中过 A、B、C 三点的平面和其它平面的交线。

16. 画出过正方体 AC_1 中 $A_2B_2C_2$ 三点的截面。

二、空间两条直线

空间两条直线的位置关系，除了包含在平面内的两条直线的位置关系，即平行与相交两种之外，最显著的是空间多了一种既不平行又不相交的位置关系，即是异面直线。这是这一节的重点内容。

在直线的平行关系中，平几中的一条性质："在同一个平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行"。扩充到空间直线的平行关系中，得到公理 4，即"平行于同一条直线的两条直线互相平行"。显然，这里把"在同一平面内的三条直线"的限制取消了。通常我们称这条公理为"平行传递公理"。

在直线的相交关系中，也由平几的一条定理："在同一个平面内，如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，并且方向相同，那么这两个角相等"。扩充得到定理"如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，并且方向相同，那么这两个角相等"。显然，这里也把在"同一平面内的两个角"的限制取消了。通常我们把这条定理称为"平行等角定理"。

在异面直线关系中，重点是异面直线的概念，难点是异面直线所成的角及异面直线的距离。解决难点的关键是转化的方法，即将异面直线所成的角转化为共面直线所成的角；将异面直线的距离转化为平面内点与直线的距离。一句话，即将空间的几何图形问题转化为平面内的几何问题去解决。