非线性连续介质力学

匡震邦 编著

上海交通大学出版社

上海交通大学“九五”重点教材

非线性连续介质力学

匡震邦 编著

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书叙述非线性连续介质力学的基本理论和近代发展。本书共 13 章和 3 个附录。主要介绍有限变形理论和相关的应力理论，特别是有关增率的理论；概括本构方程的普遍原理和各种固体、流体和电磁介质本构理论的主要方面和近代发展，并引入了这些非线性理论在理论分析和工程应用中的一些例题，有助于增进学生解决实际问题的能力；系统地介绍了不可逆过程热力学在连续介质力学中的应用及其可能的进一步发展；以及适当地介绍了连续介质力学在计及材料微观组织时的处理方法。本书还包括了作者及其学生们的一些工作：广义变分问题，热动力学内变量理论的一个合理体系，弹塑性体积分型本构方程的一般理论和电介质的破坏与畸变的模态能量理论。前 6 章（或前 7 章）可用作硕士生教材，以讲课为主；其后诸章可用作博士生教材。

本书由浅入深，物理概念和数学推演并重，书中给出了一些例题和习题以供学生们练习。本书在大学课程和近代力学文献之间架起了一座桥梁，可供力学、数学和工程科学的研究生用作教材，也是有关学科的大学教师和科技工作者的有益的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

非线性连续介质力学/匡震邦编著.—上海：上海交通大学出版社，2002
ISBN 7-313-02734-6

Ⅰ.非…　Ⅱ.匡…　Ⅲ.非线性连续介质力学
Ⅳ.033

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 045820 号

非线性连续介质力学
匡震邦　编著
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030）
电话：64071208　出版人：张天蔚
常熟市印刷二厂印刷　全国新华书店经销
开本：787mm×1092mm　1/16　印张：23.75　字数：587 千字
2002 年 1 月第 1 版　2002 年 1 月第 1 次印刷
印数：1～1050
ISBN 7-313-02734-6/O·140　定价：38.00 元

前　　言

随着科学和工程技术的迅速发展，人们对自然界的认识日益深刻，不仅对工程结构强度设计的要求日益提高，而且还要求在使用过程中安全性是可控的。因此，对结构中的应力、变形和破坏机理的认识，对非牛顿流体的运动规律，固体和流体的相互作用，应力场、温度场和电磁场等的多场耦合理论等，都提出了更高的要求。所有这些都和介质的有限变形理论及多场作用下的非线性本构理论密切相关，力学工作者正面临着严峻的挑战。

在目前大学的力学课程中，有关上述几方面的知识显得薄弱，这就要求研究生的课程加以补充。如何在大学课程和近代力学之间架起一座坚实的桥梁，是一项艰巨的任务。近 20 年来，本书作者曾作过一些认真的努力，于 1989 年曾出版了《非线性连续介质力学基础》一书，承蒙同行们青睐，被许多学校用作教材，并获 1992 年全国优秀教材奖。十余年来，这一领域又有了重大进展，加之“基础”一书早已售完，因此有必要写一本新书，这便是写作本书的由来。本书遵循由浅入深的原则，物理概念和数学表达并重；本书涉及连续介质中众多的领域，以适应力学和其他学科领域的相互渗透，拓宽同学们的视野；本书还收录了文献中常用的公式和理论，以便同学们毕业后仍可继续查阅，成为一本常备书。

从上海交通大学的教学实践来看，前 6 章（或前 7 章）用作硕士生教材，以讲课为主，并把后面诸章作一概括性介绍，讲课约 40 学时。后面诸章为博士生教材，约计 32 学时，自学与讲课并重，并配合文献阅读。本书诸章配有少量习题，供研究生练习。

承蒙西安交通大学出版社同意，本书较多地引用了《非线性连续介质力学基础》一书的内容；同时本书得到国家自然科学基金重点项目（批准号为 10132010）的部分资助，在此一并致谢。

希望本书对力学系和相关学科的研究生，以及教育和科技工作者有所帮助。鉴于作者水平有限，错误和不当之处，望读者和专家们指正。

匡震邦

2001 年 3 月于上海

目　　录

1 引 论

1—1 连续介质力学的范围

随着新材料和新技术的使用，特别是高分子材料的使用与加工成型技术，要求提供更轻、更安全、更能精确控制变形的结构。从20世纪40年代中期开始，非线性连续介质力学得到了较快的发展，在随后的几十年中，主要研究连续介质的变形和运动，连续介质热力学和本构关系；从20世纪70年代开始，连续介质力学扩展到材料的损伤、破坏和宏微观力学，成为近代力学最重要的基础之一。

客观世界的物质和运动是非常复杂的。机械的、物理的、化学的和生物的各种运动，往往交织在一起；客观的物质往往同时具有机械的、热学的、光学的、电磁学的和化学的等多种属性。人们为了认识具体的复杂的现实的物体运动，首先将其分解成简单材料的简单运动，把握其中起主导作用的因素，然后逐一研究，建立各种分支学科，这便是“分解”的方法。分支学科发展到一定阶段，它们相互渗透，构成新的分支或交叉学科。由于生产发展的需要，科学技术的进步，人们认识到和努力寻求各分支学科间的共性，把它们综合起来研究，形成内容更为广泛、更为基本也更为统一的综合理论，这便是“综合”的方法。分解和综合的方法是人们认识自然界的基本方法。

在力学范畴内，质点、刚体、弹性体、粘弹性体、弹塑性体、理想流体、牛顿粘性流体、非牛顿流体、电磁固体、电磁流体等便是从客观物质中抽象出来的公认的理论模型；静态变形和应力分析，相对运动和动力分析，应力波和电磁波的传播，质量守恒和可变系统的运动，保守和耗散系统分析，稳定性、分叉和混沌的运动，确定性与随机性的运动等，便是从客观运动中抽象出来的运动模型。不同材料模型和不同的运动方式，构成了力学中众多的分支。虽然这些分支学科各有特点，互不相同，但它们全体仍然服从一些共同的规律；把这些分支学科放到一起来讨论，看看哪些规律是它们共有的，哪些是不同的，相互启发和借鉴，促进发展，在更统一的基础上进行研究，这是连续介质力学的最重要的内容之一。

连续介质力学的方程可分为两类：一类适用于所有物体，构成了自然界的普适规律，如质量守恒、电荷守恒、能量守恒、牛顿运动方程、马克斯威尔电磁学方程、熵产率恒正原理等；另一类是各种物体特有的规律，构成了各自的本构方程，不同的本构方程是各种材料相互区别的标志，是在相同环境下，物体具有不同运动的原因。虽然不同的介质具有不同的本构关系，但本构关系本身却满足一些共同的准则，如确定性原理、客观性原理、局部作用和衰减原理等；自然界只存在符合其内在属性的本构关系，本构关系的探讨构成了连续介质力学的另一个最重要的内容。

连续介质力学采用的本质上是宏观唯象的方法，但近年来通过引入内变量，迅速地和物质的微观结构相结合；内变量可以是物质内部真实的结构变量，如位错密度和形态缺陷浓度、相变程度、微裂纹的数量和形态等，也可以是内部结构变化的综合反映的量，如塑性应变或其他非弹性应变、剩余极化强度等。因此，对可以用连续变化来研究物质内部结构演化的

情况，连续介质力学便可应用到物质的微观力学，损伤力学和晶体塑性理论便是很好的例子；在材料的破坏理论中，连续介质力学也发挥了应有的作用。在物质的微观力学中，更好地发挥连续介质力学的作用，这是又一个主要内容。

连续介质力学把现实物体抽象成理论模型，讨论它们的本构方程；把现实物体的运动抽象成理论模型的运动，利用数学和实验的方法，在外界环境作用下，精确描述物体的运动响应。理论和实验相辅相成，求得理论结果和现实运动在本质上一致。

连续介质力学作为一门课程，可以放在各分支学科之前学习，使读者对力学有一概括的了解，然后再对所需各分支学科进行更深入的学习；它也可以放在各分支学科之后学习，研究各分支学科之间的内部联系，以高度统一的观点去把握各分支学科。连续介质力学既可以看成各分支学科的出发点，也可以看成各分支学科的归宿。作为出发点，它给出了各分支学科的骨架；作为归宿，它却可使各分支学科内容充实、成为高度统一起来的客观有机体。

1—2　连续介质力学中的“基元”

连续介质力学以现实物体运动的理论模型作为研究对象，并力求在本质上能予以准确描写。正像建房时首先要有钢筋水泥和砖瓦那样，为了描写运动，需要给出一些基本的名词和术语，它们构成连续介质力学的“基元”。通过一些定律、理论和公式，把这些名词和术语相互联系起来，便构成连续介质力学的理论体系。本节中将给出一些最基本的名词和术语的主要含义。

1—2—1　物体

在某一确定的瞬时，物体具有确定的几何形状和质量，物体还具有电磁、热容、可承受载荷和变形等许多重要属性。物体由原子或分子等相互分立的微小质点组成的。原子具有确定的质量并占据一定的空间。如氢原子的质量约为 1.67×10^{-27}kg 和占据约 $10^{-31}\,\mathrm{m}^3$ 的空间；对其他原子量较大的单个原子占据的空间，一般也不大于 $10^{-28}\,\mathrm{m}^3$。因此在 $10^3\,\mathrm{nm}^3$ 的体积中仍含有约 $10^4\sim10^7$ 个原子，数量依然很大，可以相当准确地采用数学中连续的概念，用现成的数学方法去处理问题。物体可以抽象成各种模型，如按性质可分为质点、刚体、粘弹塑性体、流体、颗粒体等；如按几何形状可分为一维的弦和杆、二维的板壳和三维的块体等。物体与物体是可以相互区别的；若干个物体可以形成集合，组成系统；不属于这个系统的物体构成这个系统的环境或外界。

1—2—2　时空系

时间、空间和运动物体是相互依赖的，不可能相互间毫不相关地各自单独存在，离开空间和时间来讨论物体的存在和运动是没有意义的。空间表示物体的形状、大小和相互位置的关系，时间表示物体运动过程的顺序。为了定量地描写物体的运动，必须在时间和空间中选出特定的标架系，作为描写物体运动的基准，这种标架系称为时空系。空间是三维的，原则上可用任意三个互不重合的标架来描写，但在大多数情况下，为方便计，取用正交坐标系，特别是直角正交坐标系（以后简称直角坐标系）。位置的变动是可逆的，正向和反向运动都是许可的。时间是一维的，用一根时间轴来描写；宏观物体的时间变化是不可逆的，永远从“过去”走向“未来”；时间的不可逆性和事件的因果律相关，原因在前，结果在后。但在讨论

微观世界时，有时时间也理想化为可逆的，即把时间倒退回去，事件可恢复到原先的状态，而又不对环境产生任何影响。在许多实际问题中，需要从一个时空系转换到另一个时空系，在经典理论中要求这种转换保持同一事件的时间间隔和空间间隔都保持不变；在相对论中，时空是相互关联的，时空系的转换只要求同一事件的四维时空间中的间隔保持不变。尺寸的基本单位是 m(米)，时间的基本单位是 s(秒)。

1—2—3 质量和电荷

质量是物体机械运动惯性的量度，电荷及其运动是电磁场产生的根源。质量和电荷是物体的基本属性，没有不具质量和电荷的物体。对有限体或理想化的质点，质量是一个有限的正数，而电荷可正可负，因而一个物体的宏观表现可以是电中性的。电量最小的可能分割的单位是一个电子具有的电荷 $e=1.6021917\times10^{-19}$ C(库仑)，质量的基本单位是 kg(千克)。质量和电荷都是可加量，即物体的总量是其各部分的量的直接和；它们都服从守恒定律，不能被消灭，也不能无中生有。和物体的几何形态相对应，质量可分为点集中质量，线、面和体分布质量。电荷同样如此。

1—2—4 运动

物体状态随时间的变化过程称为运动。物体的状态是用有关的参数描写的，通常称这些参数为广义位移，如机械运动中物体中各点位置的变化或位移与应变，电磁场中的电位移(电感应强度)与磁感应强度，热学中的熵等等。在生物体中还描写生物体的诞生、成长和衰亡的高级过程。物体的运动是构成物体的诸质点运动的有机总和。物体的运动必须服从自然界的某些普适规律，如质量、电荷、能量守恒定律和动量方程、动量矩方程等。

1—2—5 力

力是改变物体运动的原因。任何两个物体之间均存在引力，任意两个电荷之间均存在电力，电磁场中运动带电粒子承受电磁力，物体之间的相互接触产生机械力，甚至化学反应也采用亲和力的概念。和 1—2—4 中广义位移对应的共轭的广义力为：机械应力↔应变，电场强度↔电位移，磁场强度↔磁感应强度，温度↔熵，等等。力是矢量。物体受到外界环境作用的力称为外力，而物体内部各部分之间的相互作用力称为内力。根据力的作用方式又可分为点集中力，线、面和体分布力。力的基本单位是 N(牛，$kg\cdot m/s^2$)。

1—2—6 功和能

广义力和微分广义位移的点积(纯量积)得出的量称为微分功，功是微分功的总和。物体的内(部)能(量)和动能、热交换能量和外力的功，服从由热力学第一定律表述的能量守恒和转化原理，不同形式的能量可以相互转化，但不能被消灭，也不能无中生有。能量是一个抽象的但又是十分基本的概念，它是纯量，系统的总能量是其各部分能量的直接和。能量极值原理在连续介质力学中也占有十分重要的位置。

1—2—7 温度和热量

温度是物体冷热程度的量度。较热的物体有较高的温度，处于热平衡的物体具有相同的温度。从高温物体自发流向低温物体的能量以热量的形式表现出来。在所有不同形式的

能量中，热量具有极其特殊的位置，一切形式的能量的不可逆部分最终都转化成热量而耗散。常用的温度单位是热力学温度 K 或摄氏温度℃。

1—2—8 熵

熵是在热力学第二定律的数学表述中引进的一个状态函数，熵是可加函数，系统的熵等于各部分熵的直接和。熵在平衡态是很好定义了的，也是大家都接受的物理量。在非平衡态的不可逆过程，是否存在熵，或是否有必要引入熵的概念，人们还存在不同的看法。而理性热力学的倡导者们却把熵看成是无须用其他物理量定义的“本原量”或“先验量”。本书从实用的观点出发，假设熵的存在而不去讨论它的合法性。环境供给物体的热量和物体内部不可逆过程产生的热量的总和除以物体的温度称为总熵，前者为可逆熵，后者为不可逆熵。不可逆熵随时间的变化称为熵产率，根据热力学第二定律，熵产率永不为负。熵产率在耗散系统的本构关系的研究中具有重要的意义。

1—3 方阵的本征值与本征矢量

1—3—1 一般讨论

由 $m\times n$ 个元素排成的 m 行 n 列的矩形阵列称为矩阵，记为 $\boldsymbol{A}$，其元素为 A_{ij}，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。若行数和列数同为 n 时也称为 n 阶方阵，元素为复数时称复方阵，全部元素都是实数时称实方阵，和方阵对应的行列式 $|\boldsymbol{A}|=\det\boldsymbol{A}$ 不为零时称为非奇异方阵，此时存在逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\qquad\text{或}\qquad\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}\tag{1-1}$$

式中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{*}$ 中的元素 A_{ij}^{*} 是行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 A_{ij} 的代数余子式。

记 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}$，即 $\overline{A}_{ij}$ 是 A_{ij} 的共轭复数。称 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite(艾尔米特)矩阵，如

$$\boldsymbol{A}=\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\qquad\text{或}\qquad A_{ij}=\overline{A}_{ji}\tag{1-2a}$$

式中 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ 为 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的转置矩阵。如 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为酉矩阵。称 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，如

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\qquad\text{或}\qquad A_{ij}=A_{ji}\qquad A_{ij}\ \text{为实数。}\tag{1-2b}$$

如 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。显然，实对称矩阵总是 Hermite 矩阵，而 Hermite 矩阵只当它是实矩阵时才是对称矩阵。

在连续介质力学中，常出现下述形式的齐次代数方程

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}\qquad\text{或}\qquad(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}\tag{1-3}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{u}$ 为 n 行的(单列)列阵。要式(1-3)有非零解，必须 $\boldsymbol{u}$ 前系数的行列式为零，即

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0\tag{1-4}$$

称式(1-4)为 $\boldsymbol{A}$ 的本征方程，$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的本征矩阵，$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的本征多项式；λ_{α} 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个本征值，和其对应的本征矢量是 $\boldsymbol{u}_{\alpha}$；$\boldsymbol{A}$ 的全部本征值的集合称为本征谱，记为 $\{\lambda_{\alpha}\}$，全部本征矢量的集合记为 $\{\boldsymbol{u}_{\alpha}\}$。式(1-4)是 λ 的 n 次多项式，因此由代数理论知，在复数空间至

少有一个根，即 $\boldsymbol{A}$ 至少存在一个本征矢量。

一般矩阵的本征值存在下列关系：

(1) 由于 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$ 所以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 有相同的本征多项式，故有相同的本征值。

(2) 由 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ 推知 $(\boldsymbol{A}^{-1}-\lambda^{-1}\boldsymbol{I})\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的本征值为 λ^{-1}，本征矢量为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$。

(3) 由于 $|\lambda\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}|=|\bar{\lambda}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\bar{\lambda}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，若 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，则 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ 的本征值为 $\bar{\lambda}$。

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为一非奇异矩阵，则说 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 相似。由于 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$，所以相似矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 有相同的本征多项式，因而有相同的本征值。但应注意，有相同本征值的矩阵不一定相似。

(5) 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}$，所以 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\lambda^2\boldsymbol{u}$，进一步推出 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{u}=\lambda^n\boldsymbol{u}$，即若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的本征值，则 λ^n 是 $\boldsymbol{A}^n$ 的本征值。

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 的本征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0 \tag{1-5a}$$

则 $\boldsymbol{A}$ 满足下述方程

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{1-5b}$$

上式称为 Cayley-Hamilton 定理。由这一定理知，对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，任何 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次幂以上的项均可用其 $n-1$ 次幂以下的项表示，这可用来简化物体的本构方程。现在来证明这一定理。令 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$，它的伴随矩阵 $\boldsymbol{B}^*$ 可以写成

$$\boldsymbol{B}^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{B}_0+\lambda^{n-2}\boldsymbol{B}_1+\cdots+\lambda\boldsymbol{B}_{n-2}+\boldsymbol{B}_{n-1}$$

式中 $\boldsymbol{B}_{n-1},\cdots,\boldsymbol{B}_0$ 均为 $n\times n$ 的常数矩阵。由式(1-1)和(1-5)知

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*=f(\lambda)\boldsymbol{I} \tag{1-6a}$$

或

$$\begin{aligned}&\lambda^n\boldsymbol{B}_0+\lambda^{n-1}(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A})+\lambda^{n-2}(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A})+\cdots\\&\quad+\lambda(\boldsymbol{B}_{n-1}-\boldsymbol{B}_{n-2}\boldsymbol{A})-\boldsymbol{B}_{n-1}\boldsymbol{A}=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{1-6b}$$

使上式中 λ 的同次幂的系数相等，可得

$$\left.\begin{array}{ll}\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A}=a_{n-1}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}=a_{n-2}\boldsymbol{I}\ \cdots & \\ \boldsymbol{B}_{n-1}-\boldsymbol{B}_{n-2}\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{B}_{n-1}\boldsymbol{A}=a_0\boldsymbol{I}\end{array}\right\} \tag{1-7a}$$

依次用 $\boldsymbol{A}^n,\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A},\boldsymbol{I}$ 右乘上式中各项后可得

$$\left.\begin{array}{ll}\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^n & \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}^{n-1}-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A}^n=a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\\ \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}^{n-2}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}^{n-1}=a_{n-2}\boldsymbol{A}^{n-2} & \\ \cdots & \\ \boldsymbol{B}_{n-1}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_{n-2}\boldsymbol{A}^2=a_1\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}_{n-1}\boldsymbol{A}=a_0\boldsymbol{I}\end{array}\right\} \tag{1-7b}$$

把式(1-7b)中的一系列等式的左右两端分别相加，便得出式(1-5b)。特别是当 $n=3$ 时有

$$\boldsymbol{A}^3-\mathrm{I}_A\boldsymbol{A}^2+\mathrm{II}_A\boldsymbol{A}-\mathrm{III}_A\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{1-8a}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{I}_A&=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=A_{ii}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ \mathrm{II}_A&=\frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^2-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2]=\frac{1}{2}(A_{ii}A_{jj}-A_{ij}A_{ji})=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1\\ \mathrm{III}_A&=\det\boldsymbol{A}=\frac{1}{3}\left[\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^3-\frac{3}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{A}^2\,\mathrm{tr}\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})^3\right]=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

式中重复指标表示求和，如 $A_{i3}A_{i3}=A_{13}A_{13}+A_{23}A_{23}+A_{33}A_{33}$。

由式(1-5b)得 $n=2$ 时有

$$\boldsymbol{A}^2-(\mathrm{tr}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}+(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{1-8b}$$

1—3—2 Hermite 矩阵和实对称矩阵

对于 Hermite 矩阵，其本征值为实数，所有相异本征值对应的本征矢量相互正交，对于具有不同本征矢量的相重本征值也可构造相互正交的本征矢量。现在来证明这一定理。

(1) 设 n 阶 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有相异的本征值。先设 λ_α 为复数，$\bar{\lambda}_\alpha$ 为其共轭值，相应的本征矢量分别为 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 和 $\bar{\boldsymbol{u}}_\alpha$。由式(1-3)得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_\alpha=\lambda_{\underline{\alpha}}\boldsymbol{u}_\alpha \tag{1-10a}$$

本书中采用重复指标表示求和的规则，但在指标下方加一短横“—”，则表示该指标不参与求和。因此上式中 $\lambda_{\underline{\alpha}}\boldsymbol{u}_\alpha$ 不表示求和，只单纯表示 $\lambda_{\underline{\alpha}}$ 是和 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 对应的本征值。转置上式再取其共轭值，计及 $\boldsymbol{A}=\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ 便得

$$\bar{\boldsymbol{u}}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\bar{\lambda}_{\underline{\alpha}}\bar{\boldsymbol{u}}_\alpha^{\mathrm{T}} \tag{1-10b}$$

以 $\bar{\boldsymbol{u}}_\alpha^{\mathrm{T}}$ 左乘式(1-10a)，以 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 右乘式(1-10b)，然后两式相减得

$$(\lambda_\alpha-\bar{\lambda}_\alpha)\bar{\boldsymbol{u}}_{\underline{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_{\underline{\alpha}}=0$$

因 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 是非平凡解，不为零，由此推出 $\lambda_\alpha=\bar{\lambda}_\alpha$，即 λ_α 是实数。以 $\bar{\boldsymbol{u}}_\beta^{\mathrm{T}}$ 左乘式(1-10a)得

$$\bar{\boldsymbol{u}}_\beta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_\alpha=\lambda_{\underline{\alpha}}\,\bar{\boldsymbol{u}}_\beta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_\alpha \tag{1-11a}$$

同样，对于 $\lambda_\beta\neq\lambda_\alpha$ 可写出

$$\bar{\boldsymbol{u}}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_\beta=\lambda_{\underline{\beta}}\,\bar{\boldsymbol{u}}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_\beta$$

转置上式后再取共轭值便得

$$\bar{\boldsymbol{u}}_\beta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_\alpha=\bar{\lambda}_{\underline{\beta}}\,\bar{\boldsymbol{u}}_\beta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_\alpha \tag{1-11b}$$

从式(1-11a)减去(1-11b)并计及 $\bar{\lambda}_\beta=\lambda_\beta$，得

$$(\lambda_{\underline{\alpha}}-\lambda_{\underline{\beta}})\bar{\boldsymbol{u}}_\beta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_\alpha=0 \tag{1-11c}$$

由于已设 $\lambda_\alpha\neq\lambda_\beta$，所以 $\bar{\boldsymbol{u}}_\beta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_\alpha=0$，即 $\boldsymbol{u}_\alpha$ 和 $\boldsymbol{u}_\beta$ 两个矢量在复欧氏空间(酉空间)正交。我们可以适当选择比例因子，使本征矢量规范化或归一化，即

$$\boldsymbol{u}_\beta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_\alpha=\delta_{\alpha\beta} \tag{1-12}$$

式中 $\delta_{\alpha\beta}$ 为 Kroneckerδ，当 $\alpha=\beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta}=1$，$\alpha\neq\beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta}=0$。

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 的本征值集合中有两个相同，如 $\lambda_1=\lambda_2$，且重根 λ_1 存在两个独立的本征矢量 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$(半退化情形)，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1=\lambda_1\boldsymbol{u}_1 \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2=\lambda_2\boldsymbol{u}_2=\lambda_1\boldsymbol{u}_2$$

从而对任意的纯量 α 和 β 有

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{u}_1+\beta\boldsymbol{u}_2)=\lambda_1(\alpha\boldsymbol{u}_1+\beta\boldsymbol{u}_2)$$

即 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 所在平面内的任一矢量都是本征矢量，因此总可以任选一对正交的本征矢量为 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，使式(1-12)仍然成立。显然对三重根等等有同样的情况；特别是当 λ 为 n 重根且有 n 个独立本征矢量时，可选任一组正交归一化矢量作为本征矢量，此时对应的 $\boldsymbol{A}$ 称为球形张量。对独立本征矢量的个数少于本征值重数的退化情形需另外讨论，可参看有关书籍。

现进一步证明，若 $\boldsymbol{A}$ 是正定的 Hermite 矩阵，那么其本征值均为正实数。所谓正定矩阵是指对任一矢量 $\boldsymbol{v}$ 恒有

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} > 0 \qquad 当\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \tag{1-13}$$

证明如下。设 $\boldsymbol{u}_a$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个正交归一化本征矢量，引进由 $\boldsymbol{u}_a$ 组成的 $n\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_n]$。把 $\boldsymbol{v}$ 用归一化本征矢量展开（谱分解），即令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{w}=[w_1,w_2,\cdots,w_n]^{\mathrm{T}}$ 为展开式的常量系数列阵，从而由正定性条件得

$$\overline{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{w}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = \lambda_1 w_1\overline{w}_1 + \lambda_2 w_2\overline{w}_2 + \cdots + \lambda_n w_n\overline{w}_n > 0$$

因 $\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$，是对角线矩阵。由于 $w_k\overline{w}_k>0$，所以由上式推知，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全部大于零。

上面有关 Hermite 矩阵的本征值与本征矢量的理论，全部适用于实对称矩阵，而且在全部公式中，任一变量的共轭变量便是其自身。

1—3—3 可以化两个矩阵同时为对角阵的理论

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵，则必存在一 n 阶非奇异矩阵，使

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n] \tag{1-14}$$

式中 λ_k，$k=1,2,\cdots,n$ 是 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的 n 个实根。

证明如下。因 $\boldsymbol{A}$ 是实正定矩阵，所以必存在一非奇异实阵 $\boldsymbol{M}$，使 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}$；又因 $\boldsymbol{B}$ 是实对称阵，所以 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$ 也是实对称的，因而必存在一正交阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$ 对角化，即

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$ 的实本征值。若令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}$，则有 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$；因 $\boldsymbol{Q}$ 是正交阵，故 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}^{-1}$，所以 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$ 是相似阵，两者有相同的本征值，即 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$。又因

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}[\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2,\cdots,\lambda-\lambda_n]$$

所以 λ_k 是 $|\lambda\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$ 的根。

1—4 欧氏空间直角坐标系中的矢量与张量代数

1—4—1 置换符号与行列式的值

置换符号 $\boldsymbol{e}$ 是三指标的符号，又称排列符号、交错符号，定义为

$$e_{klm} = \begin{cases} 1，如\ k,l,m\ 为顺序\ 1,2,3\ 的偶置换 \\ -1，如\ k,l,m\ 为顺序\ 1,2,3\ 的奇置换 \\ 0，所有其他情形 \end{cases} \tag{1-15}$$

因此，名义上 e_{klm} 有 27 个分量，但只有 6 个不为零，即

$$e_{123} = e_{231} = e_{312} = 1 \qquad e_{213} = e_{132} = e_{321} = -1。$$

排列符号 $\boldsymbol{e}$ 和 Kroneckerδ 函数之间存在下列关系：

$$\left.\begin{aligned} & e_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \qquad e_{ijk}e_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix} \\ & e_{ijk}e_{kqr} = \delta_{iq}\delta_{jr} - \delta_{ir}\delta_{jq} \qquad e_{ijk}e_{rjk} = 2\delta_{ir} \end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

利用 $\boldsymbol{e}$，二阶行列式 $|\boldsymbol{A}|=|A_{kl}|=j$ 可以写成

$$j = |\boldsymbol{A}| = \frac{1}{6} e_{klm} e_{rst} A_{kr} A_{ls} A_{mt} = e_{klm} A_{1k} A_{2l} A_{3m} \tag{1-17a}$$

令 A_{ij}^{-1} 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素，则

$$\partial j / \partial A_{kr} = j A_{kr}^{-1} = A_{kr} \text{ 的代数余子式} \tag{1-17b}$$

1—4—2 直角坐标系中的矢量与张量表示

图 1-1 表示欧氏空间中的直角坐标系与矢量。引入基矢 $\boldsymbol{i}_k$，$\boldsymbol{i}_k$ 是在 ox_k 坐标轴方向的单位矢量。定义基矢的点积或纯量积为

$$\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_l = \delta_{kl} \tag{1-18}$$

定义基矢的矢量积或叉积为

$$\boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_l = e_{klm} \boldsymbol{i}_m \tag{1-19}$$

定义二阶张量的基张量为 $\boldsymbol{i}_k \otimes \boldsymbol{i}_l$，其中记号“$\otimes$”表示张量积，用作并矢符号；高阶张量的基张量可类似定义。本节中，我们用黑斜体小写英文字母，如 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 等表示矢量，用黑斜体大写英文字母，如 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{W}$ 等表示张量。

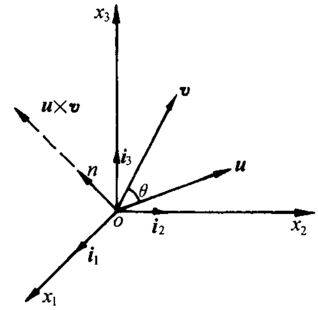

图 1-1 欧氏空间中的直角坐标系

设 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 为矢量，在直角坐标系中可表成

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{u} = u_k \boldsymbol{i}_k = |\boldsymbol{u}| \alpha_k \boldsymbol{i}_k & \alpha_k = u_k / |\boldsymbol{u}| \\ \boldsymbol{v} = v_l \boldsymbol{i}_l = |\boldsymbol{v}| \beta_l \boldsymbol{i}_l & \beta_l = v_l / |\boldsymbol{v}| \end{array}\right\} \tag{1-20}$$

式中 α_k，β_l 分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 的方向余弦。点积或内积

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_k v_k = |u||v| \cos\theta \tag{1-21}$$

式中 θ 为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 之间的夹角，$\cos\theta = \alpha_k \beta_k$。矢量积或叉积

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = u_k v_l \boldsymbol{i}_k \times \boldsymbol{i}_l = e_{klm} u_k v_l \boldsymbol{i}_m = e_{klm} |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \alpha_k \beta_l \boldsymbol{i}_m = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\theta \boldsymbol{n} \tag{1-22}$$

上式已应用了关系

$$\sin\theta \boldsymbol{n} = e_{klm} \alpha_k \beta_l \boldsymbol{i}_m \tag{1-23}$$

而 $\boldsymbol{n}$ 为由 $\boldsymbol{u}$ 转到 $\boldsymbol{v}$，按右螺旋法则决定的垂直于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的单位矢量。

由式(1-22)还可推出 $e_{klm} = \boldsymbol{i}_k \cdot (\boldsymbol{i}_l \times \boldsymbol{i}_m)$。利用基张量，二阶张量可表成

$$\boldsymbol{T} = T_{kl} \boldsymbol{i}_k \otimes \boldsymbol{i}_l \tag{1-24}$$

T_{kl} 称为张量 $\boldsymbol{T}$ 的分量。用符号 $\boldsymbol{T}$ 表示张量是一种直接记法或张量符号法，这一记法的优点是排除了处理坐标的麻烦。用张量的分量 T_{kl} 来表示张量，往往有利于代数运算；$T_{kl} \boldsymbol{i}_k \otimes \boldsymbol{i}_l$ 为并矢记法，对初学者很方便。本书将同时采用这三种记法。顺便指出，两个矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的张量积可以形成二阶张量，即 $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v} = u_k v_l \boldsymbol{i}_k \otimes \boldsymbol{i}_l$；但应注意，两个矢量只有 6 个独立分量，而二阶张量有 9 个独立分量，因而并非每个二阶张量均可由两个矢量的张量积得出。单位张量 $\boldsymbol{I}$ 和直角坐标系中的伪置换张量 $\boldsymbol{e}$ 可定义成(参见 1—4—4)

$$\boldsymbol{I} = \delta_{kl} \boldsymbol{i}_k \otimes \boldsymbol{i}_l \qquad \boldsymbol{e} = e_{klm} \boldsymbol{i}_k \otimes \boldsymbol{i}_l \otimes \boldsymbol{i}_m \tag{1-25}$$

上述二阶张量的定义可很容易地推广到任意阶张量。设 $\boldsymbol{T}$ 为 m 阶张量，$\boldsymbol{S}$ 为 n 阶张量，则有

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{T} = T_{k_1 k_2 \cdots k_m} \boldsymbol{i}_{k_1} \otimes \boldsymbol{i}_{k_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{i}_{k_m} \\ \boldsymbol{S} = S_{l_1 l_2 \cdots l_n} \boldsymbol{i}_{l_1} \otimes \boldsymbol{i}_{l_2} \cdots \otimes \boldsymbol{i}_{l_n} \\ \boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{S} = T_{k_1 k_2 \cdots k_m} S_{l_1 l_2 \cdots l_n} \cdot \boldsymbol{i}_{k_1} \otimes \boldsymbol{i}_{k_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{i}_{k_m} \otimes \boldsymbol{i}_{l_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{i}_{l_n} \end{array}\right\} \tag{1-26}$$

式中 $\boldsymbol{i}_{k_1} \otimes \boldsymbol{i}_{k_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{i}_{k_m}$ 为 m 阶的基张量，利用上述张量的定义，易于定义矢量和张量、张量

和张量间的点积，即

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=u_k\boldsymbol{i}_k\cdot T_{lm}\boldsymbol{i}_l\otimes\boldsymbol{i}_m=u_kT_{km}\boldsymbol{i}_m \\ &\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}=T_{kl}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_l\cdot S_{mn}\boldsymbol{i}_m\otimes\boldsymbol{i}_n=T_{kl}S_{ln}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_n \\ &\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v})\qquad \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w} \end{aligned}\right\}\tag{1-27}$$

定义双点积为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}&=(T_{kl}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_l):(S_{mn}\boldsymbol{i}_m\otimes\boldsymbol{i}_n) \\ &=T_{kl}S_{mn}(\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{i}_m)(\boldsymbol{i}_l\cdot\boldsymbol{i}_n) \\ &=T_{kl}S_{mn}\delta_{km}\delta_{ln}=T_{kl}S_{kl} \\ \boldsymbol{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{S}&=T_{kl}S_{mn}(\boldsymbol{i}_l\cdot\boldsymbol{i}_m)(\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{i}_n)=T_{kl}S_{lk} \end{aligned}\right\}\tag{1-28}$$

但也有些作者把 $\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$ 定义成和本处的 $\boldsymbol{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{S}$ 相同。

矢量和张量，张量和张量之间的叉积可表示为

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{u}=T_{kl}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_l\times u_m\boldsymbol{i}_m=T_{kl}u_m\boldsymbol{i}_k\otimes(\boldsymbol{i}_l\times\boldsymbol{i}_m)=T_{kl}u_mc_{lmn}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_n \\ &\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{S}=T_{kl}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_l\times S_{mn}\boldsymbol{i}_m\otimes\boldsymbol{i}_n=T_{kl}S_{mn}c_{lmr}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_r\otimes\boldsymbol{i}_n \\ &\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{T})\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{v}) \\ &\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{T})=\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T})-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{T} \\ &(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{T})=-\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{T}) \end{aligned}\right\}\tag{1-29}$$

如张量 $\boldsymbol{S}$ 有逆，记为 $\boldsymbol{S}^{-1}$，其定义为

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}^{-1}=S_{kl}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_l\cdot S^{-1}_{pq}\boldsymbol{i}_p\otimes\boldsymbol{i}_q=S_{kl}S^{-1}_{lq}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_q=\delta_{kq}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_q=\boldsymbol{I}\tag{1-30}$$

张量 $\boldsymbol{S}$ 的转置记为 $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$，则有

$$\boldsymbol{S}=S_{kl}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_l\qquad \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=S_{kl}\boldsymbol{i}_l\otimes\boldsymbol{i}_k=S_{lk}\boldsymbol{i}_k\otimes\boldsymbol{i}_l\tag{1-31}$$

如 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$，便称 $\boldsymbol{S}$ 为对称张量；如 $\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$，便称 $\boldsymbol{S}$ 为反对称张量，反对称张量可用轴矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示：$\boldsymbol{Sx}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}$，或

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}:\boldsymbol{S}=-\frac{1}{2}e_{klm}S_{lm}\boldsymbol{i}_k\qquad S_{lm}=-e_{klm}\omega_k\tag{1-32}$$

上式和一些文献的定义差一负号，但上式在讨论旋率时较方便。

利用张量的并矢记法，可直接证明

$$(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\qquad (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S})^{-1}=\boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\qquad (\boldsymbol{T}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{T}^{-\mathrm{T}}\tag{1-33}$$

1—4—3 张量和矩阵记法的比较

表 1-1 给出张量和矩阵记法的例子，其中 ϕ 为纯量，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$ 为矢量，其余记号为张量。

表 1-1 张量和矩阵的某些记法比较

张量符号法	张量分量法	矩阵记法
$\phi=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$	$\phi=u_kv_k$	$\phi=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}$	$T_{kl}=u_kv_l$	$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}$	$w_k=T_{kl}u_l$	$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{Tu}$
$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}$	$w_k=T_{lk}u_l$	$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}$	$w_k=u_lT_{lk}$	$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$
$\phi=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{v})$	$\phi=T_{kl}u_lv_k$	$\phi=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Tu}$