

Advanced Structural Dynamics

高等 结构动力学

于建华 谢用九 魏泳涛 编著



四川大学出版社

四川大学研究生教材建设基金重点资助项目

高等结构动力学

于建华 谢用九 魏泳涛 编著

四川大学出版社

责任编辑:李川娜
责任校对:朱兰双
封面设计:罗 光
责任印制:曹 琳

图书在版编目(CIP)数据

高等结构动力学/于建华,谢用九,魏泳涛编著.
成都:四川大学出版社,2001.5
ISBN 7-5614-1993-7

I. 高... II. ①于...②谢...③魏... III. 结构动力学 IV.0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 029546 号

书 名 高等结构动力学

作 者 于建华 谢用九 魏泳涛 编著
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段 24 号 (610065)
印 刷 成都金龙印务有限责任公司
发 行 新华书店经销
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 15.50
字 数 375 千字
版 次 2001 年 5 月第 1 版
印 次 2001 年 5 月第 1 次印刷
印 数 0 001~1 000 册
定 价 35.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科
联系。电话:5412526/5414115/
5412212 邮编:610064

◆本社图书如有印装质量问题,请
寄回印刷厂调换。

版权所有◆侵权必究

序

“年年岁岁花相似，年年岁岁人不同”。在世纪之交，经过又一次高教体制改革，强强合并后的新四川大学已成为我国西部地区规模最大、学科门类最齐全的新型综合性研究型大学。

作为新世纪的献礼，我校研究生教材建设基金资助的第一批研究生优秀教材正式出版了，我在此表示热烈地祝贺。

众所周知，21世纪是知识经济的世纪，国际竞争空前激烈。竞争的焦点是科学技术，竞争的核心是创新型人才，竞争的关键是国民教育。对于四川大学这样的国家重点大学而言，则要注意大力发展研究生教育，扩大研究生规模，注重研究生质量。

校长、教师、教材是办学中的三大要素。教材是教学改革与师生智慧的重要的物化的结晶。正是基于这种思考，我校决定在以学科建设为龙头的同时，努力加强研究生的教材建设，通过各种渠道，筹集了专项基金，用以资助研究生优秀教材的编写和出版。我们首次资助的是有博士学位授权点的学科专业中涉及面大、使用面宽的研究生学位平台课程的优秀教材。今后，还将陆续扩大教材基金资助的范围，包括资助我校新增加的医学门类的有关教材的出版。

这次推出的研究生教材的基本特点是：符合该学科教学大纲的基本要求，有较强的理论性和系统性。它既反映了该学科发展的新知识、新动向、新成就，也反映了我校教师在该门学科教学与科研中的成果与经验。

前人说得好：古今之成大学问、大事业者，都必须经过三种境界。“昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路”，此第一境也；“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴”，此第二境也；“众里寻他千百度，回头蓦见，那人正在灯火阑珊处”，此第三境也。研究生的优秀教材的建设应该算作一种“大事业”。本教材的作者们对于研究生教育改革的执着追求，令人钦佩；他们的无私奉献精神，值得赞扬；他们所取得的教学科研成果应该积极推广，使它产生应有的社会效益，为百年名校增添光彩。我希望在首批及以后陆续出版的我校研究生教材中能出现“传诸后世”的佳作，更希望我校有更多教授、名家动手撰写研究生教材，为建设国内一流、在国际上有影响的新四川大学而做出更大的贡献。

四川大学副校长
四川大学研究生院院长
中国科学院院士

刘应明 教授

2001年3月8日

2001/3/8

目 录

前言	(1)
第1章 结构动力学的一般概念	(3)
1.1 结构动力分析的目的	(3)
1.2 非随机荷载的类型	(4)
1.3 三类动力问题	(4)
1.4 几种离散的方法	(5)
1.5 动力体系运动方程建立的途径	(7)
第2章 单自由度体系的振动	(9)
2.1 运动方程的建立	(9)
2.1.1 直接平衡法	(9)
2.1.2 虚功分析	(10)
2.1.3 哈密顿原理的应用	(11)
2.2 重力的影响	(11)
2.3 支座扰动的影响	(12)
2.4 广义单自由度体系	(13)
2.4.1 刚体集合型的广义单自由度体系	(13)
2.4.2 分布柔度型广义单自由度体系的近似求解——瑞利法	(15)
2.5 自由振动反应	(16)
2.5.1 无阻尼自由振动	(16)
2.5.2 有阻尼自由振动	(18)
2.6 在简谐荷载作用下的反应	(23)
2.6.1 无阻尼体系	(24)
2.6.2 阻尼体系	(25)
2.6.3 共振反应	(28)
2.7 在任意周期荷载作用下的反应	(29)
2.8 在冲击荷载作用下的反应	(31)
2.8.1 冲击荷载反应的一般性质	(31)
2.8.2 各种脉冲波的动态响应分析	(31)
2.8.3 反应谱及震动谱	(34)
2.9 在任意动力荷载作用下的反应与杜哈梅尔积分	(36)
2.9.1 无阻尼体系的杜哈梅尔积分及数值计算	(36)
2.9.2 有阻尼体系的杜哈梅尔积分及计算	(39)

习题	(41)
第3章 多自由度体系的振动	(45)
3.1 自由度的选择	(45)
3.2 用动力平衡条件建立动力方程	(45)
3.3 用影响系数法建立运动方程	(47)
3.4 结构特性矩阵的计算与动力问题的有限元列式	(51)
3.5 特性矩阵的线性近似	(58)
3.5.1 分布荷载的线性近似	(58)
3.5.2 集中质量矩阵	(59)
3.6 框架结构运动方程的建立	(61)
3.7 静力凝聚	(63)
3.8 频率向量与振型阵	(65)
3.9 正交条件	(68)
3.9.1 基本条件	(68)
3.9.2 规格化	(69)
3.10 正则坐标	(70)
3.11 无阻尼体系非耦合的运动方程	(72)
3.12 阻尼体系非耦合的运动方程	(74)
3.13 振型叠加法概要	(75)
习题	(79)
第4章 离散结构动力学方程的逐次积分法	(82)
4.1 增量的平衡方程	(82)
4.1.1 逐次积分法的引入	(82)
4.1.2 增量平衡方程	(83)
4.2 中心差分法	(85)
4.2.1 中心差分法的基本公式	(85)
4.2.2 中心差分法的计算步骤	(85)
4.2.3 中心差分法的特点	(86)
4.2.4 例题	(87)
4.3 豪鲍尔特(Houbolt)法	(88)
4.3.1 豪鲍尔特法的基本公式	(88)
4.3.2 豪鲍尔特法的计算步骤	(88)
4.3.3 豪鲍尔特法的特点	(89)
4.3.4 例题	(89)
4.4 威尔逊- θ 法	(90)
4.4.1 线性加速度假设	(90)
4.4.2 威尔逊- θ 法的求解公式	(91)

4.4.3	威尔逊- θ 法的计算步骤	(92)
4.4.4	例题	(93)
4.5	纽马克(Newmark)法	(94)
4.5.1	纽马克法的基本假定和计算公式	(94)
4.5.2	纽马克法的计算步骤	(95)
4.5.3	例题	(96)
4.6	数值积分法的稳定性和计算精度	(98)
4.6.1	计算精度和稳定性的概念	(98)
4.6.2	运动方程变换和解的形式改进	(99)
4.6.3	算子矩阵 A 和算子向量 L 的推导	(99)
4.6.4	稳定性分析	(101)
4.6.5	计算精度分析	(103)
	习题	(105)
第5章	多自由度系统特殊情况及变分解法	(106)
5.1	多自由度系统的几种特殊情况	(106)
5.1.1	半定系统的求解	(106)
5.1.2	退化系统(简并系统)的求解	(109)
5.2	用变分法求解多自由度体系的动力问题	(113)
5.2.1	广义坐标	(113)
5.2.2	拉格朗日运动方程	(113)
	习题	(116)
第6章	实用振动分析	(117)
6.1	结构的动力特征值问题解的性质	(117)
6.1.1	广义的和标准形式的特征值问题	(117)
6.1.2	结构的动力特征值问题解的性质	(117)
6.2	矩阵迭代法	(119)
6.2.1	基本振型分析	(119)
6.2.2	第二振型分析	(122)
6.2.3	第三振型和更高振型分析	(124)
6.2.4	最高振型分析	(125)
6.2.5	带有移位的迭代法	(127)
6.3	霍尔兹(Holzer)法	(129)
6.4	瑞利-里兹(Rayleigh-Ritz)分析	(133)
6.5	子空间迭代法	(134)
	习题	(136)
第7章	地震学基础	(137)
7.1	地震的基本知识	(137)

7.1.1	地震的种类和成因	(137)
7.1.2	地震震级及烈度	(141)
7.2	地震波	(144)
7.2.1	弹性波理论简介	(144)
7.2.2	地震波的种类和性质	(148)
7.2.3	地震波的观测结果	(149)
7.2.4	地震波记录	(149)
7.3	地震对结构的影响	(149)
7.3.1	地震灾害	(149)
7.3.2	地震引起结构破坏的影响因素	(151)
	习题	(153)
第8章	结构抗震分析的基本原理	(154)
8.1	结构的地震响应及地震反应谱	(154)
8.1.1	简单振子的地震反应	(154)
8.1.2	地震反应谱	(155)
8.1.3	设计地震的选择	(157)
8.2	地震反应的数定分析的地震输入机制	(162)
8.3	结构在水平地震作用下的反应计算	(163)
8.3.1	集中质量单自由度体系	(163)
8.3.2	广义单自由度体系	(165)
8.3.3	集中质量多自由度体系	(168)
8.4	考虑转动干扰及多点输入时结构地震反应计算	(177)
8.4.1	刚性地基转动干扰	(177)
8.4.2	对多点多相位地震输入的结构反应计算方法	(178)
8.5	竖直地震的抗震验算	(179)
8.5.1	高耸结构	(179)
8.5.2	大跨度结构	(180)
8.6	结构的非线性地震反应分析	(180)
8.6.1	采用时程分析法计算非线性地震反应	(180)
8.6.2	钢筋混凝土构件的恢复力模型	(181)
8.6.3	按层间剪切模型计算框架非弹性地震反应	(184)
8.6.4	非线性地震反应分析的一般方法	(189)
8.7	延性系数法	(192)
	习题	(194)
第9章	工程结构的隔震和减振控制	(197)
9.1	隔振原理	(197)
9.1.1	主动隔振与被动隔振的力学模型	(197)

9.1.2 例题.....	(200)
9.2 工程结构隔震的原理.....	(201)
9.2.1 工程结构减震控制的概念.....	(201)
9.2.2 建筑物隔震的原理.....	(202)
9.2.3 隔震装置及基本要求.....	(204)
9.3 夹层橡胶隔震座的构造及参数近似计算.....	(205)
9.3.1 夹层橡胶隔震座的构造和力学特性.....	(205)
9.3.2 隔震座材料参数的近似计算.....	(208)
9.4 隔震建筑的地震反应计算.....	(210)
9.5 建筑物控振原理和方法.....	(215)
9.5.1 控制方法和控制系统的重要环节.....	(216)
9.5.2 结构主动控制的减震原理.....	(218)
9.5.3 主动施加控制力的减震控制简介.....	(218)
9.6 主动控制算法简介.....	(220)
9.6.1 经典线性最优控制算法.....	(220)
9.6.2 瞬时最优控制算法.....	(221)
9.7 结构的半主动控制.....	(222)
9.8 智能材料结构及计算智能简介.....	(223)
9.8.1 智能材料结构.....	(223)
9.8.2 计算智能简介.....	(225)
复习参考题.....	(227)
习题.....	(228)
参考文献.....	(229)
习题解答.....	(230)

前 言

本书是为土木、水利、工程力学、机械专业硕士研究生的学位课程“高等结构动力学”而编写的教材。此课程旨在帮助研究生掌握结构动力学的基础理论、建模技能及分析计算方法，并能运用理论知识解决工程实际问题。

本书是在四川大学和西南交通大学有关讲义的基础上，通过较长时间(8~10年)的教学实践而逐渐修改而成。

本书以工科专业本科的力学和数学课程(理论力学、材料力学、结构力学、高等数学和工程数学)作为起点，在取材与编排上有以下的特点：①突出解决工程实际问题的能力，在重视基础理论系统性的同时，在不失严密性的前提下，着重阐述理论和方法的工程背景和实际应用，而不拘泥于公式的繁琐推导。②在取材上注意采纳国内外相关教材的内容和提法，尽可能反映该领域内最新成就和进展。

全书共分9章，其中前3章介绍单自由度与多自由度系统动力分析的基础知识，第4章至第6章分别介绍求解动力问题的数值解法、较深入问题的求解方法以及实用振动分析的技巧和方法。第7章、第8章分别介绍地震学基础知识及结构抗震分析的基本原理。第9章介绍结构动力学中几个前沿领域的理论和应用，包括结构隔震理论及其应用，工程减震控制理论及其应用等。

在每章之后配有习题和思考题，在书末附有部分习题的答案。

本书的前6章可以作为土木工程、力学、水利等专业的结构动力学本科教材。

本书得到了四川大学研究生教材建设基金的重点资助和四川大学建筑学院的大力支持，在此表示由衷感谢。

于建华教授与谢用九教授参与全教材的编写和修改、定稿工作，魏泳涛博士参与第2章至第6章和第8章的部分章节的编写工作，硕士谢凌志、陈颖参加部分习题解答和提示的编写，硕士研究生李金桥、曹波、冷谦参与插图绘制工作。

本书在编写和审校过程中，得到了四川大学出版社李川娜和韩果两位编辑的大力帮助。

作者希望本书能为提高研究生教学质量起到绵薄之力，由于时间和水平所限，本书定有不妥甚至错误之处，恳请读者批评指正。

编者
2001年4月

第1章 结构动力学的一般概念

1.1 结构动力分析的目的

随着现代工程技术的飞速发展,各种结构的尺寸日益增大,新型结构不断出现,结构的重量日趋减小,对结构进行动力分析的要求越来越迫切。工程结构对于动力荷载如风荷载、冲击荷载、旋转机械引起的周期荷载以及地震荷载等的反应(包括位移、变形和应力等),已成为工程师们在进行结构设计时必须考虑的一个问题。近年来对结构物发生破坏的原因进行调查,可以看到,对结构物静态特性考虑不周,造成破坏的情况较少;而绝大多数情况是对于结构物动态特性考虑不周引起的破坏。研究结构动力学的目的就是要保证结构在整个使用期间,在可能发生的动力荷载作用下能够正常工作,确保它的安全、可靠。这就需要确定结构物在任意动力荷载作用下随时间变化的反应。确定结构反应的方法有两种:分析的方法和实验的方法。对于复杂结构,两种方法可以同时并用,本教材只讨论分析的方法。

在结构分析中,我们学过在静荷载的作用下结构反应(位移、变形和应力)的计算问题,这类问题称为静力问题。在静力问题中,静荷载是不随时间变化的,由它引起的结构反应也不随时间变化,因而它具有单一解,一次分析便能得到所要求的全部解答。同时,结构在承受静荷载时,因受力过程缓慢,结构质量的惯性力可忽略不计。这样,结构的静力分析问题就变得十分简单了。

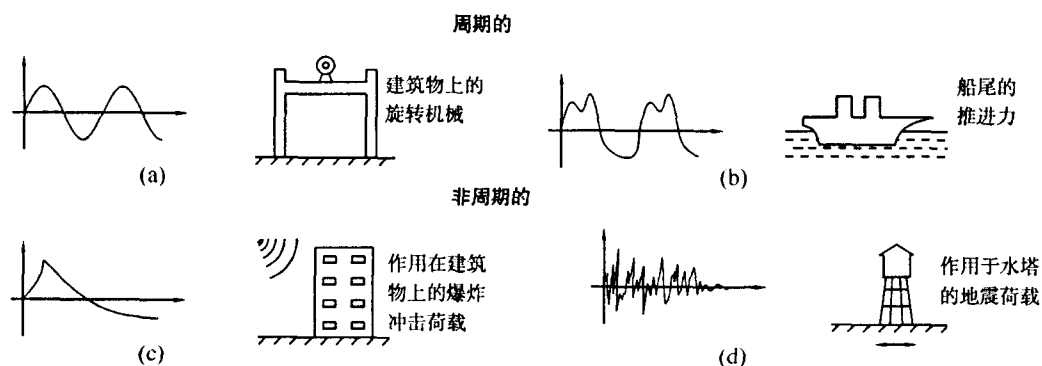
在结构动力学中,结构承受的荷载是动荷载,荷载的大小、方向和作用点都可以随时间变化。由它引起的结构的反应,亦即结构的挠度和应力,也是随时间变化的。因此不能像静力问题那样得到单一解,而必须求得反应时程中的一系列解答。同时,结构在承受动荷载时,结构上的质量是运动的,要产生抵抗加速度的惯性力。结构内部的弹性力不仅要平衡外荷载,还必须平衡由加速度引起的惯性力,这就使得结构的动力分析要比静力分析复杂得多。

结构的静力分析方法和动力分析方法在性质上是根本不同的。但在结构线弹性分析中,往往把施加荷载的静力分量和动力分量区分开来,然后分别计算结构对于每种荷载的反应,最后再将两个反应分量叠加得出总的反应。

结构动力分析的方法分为数定的和非数定的两种。在给定情况下,采用哪种方法取决于荷载的性质。如果荷载随时间的变化完全已知,无论变化多么不规则或者变化率多么大,都把这类荷载称为非随机荷载。结构在非随机荷载下的反应分析定义为数定分析。如果荷载随时间的变化不是完全已知的,但可以按统计的方法来定义,这种荷载称为随机荷载。结构在随机荷载作用下的反应分析定义为非数定分析。本教材只讨论结构的数定分析。

1.2 非随机荷载的类型

非随机荷载可以分为周期荷载和非周期荷载两种。按一定时间间隔重复其变化规律的荷载称为**周期荷载**。最简单的周期荷载是图1-1(a)所示的简谐荷载。这种荷载随时间的变化曲线是一条正弦曲线或者是一条余弦曲线，此类荷载是由旋转机械装置中质量的不平衡引起的。较复杂的周期荷载不能用单一的函数来表示，但如果利用傅里叶级数，这类荷载可以表示为三角函数之和。因此周期荷载下的反应分析，原则上可以按同样的标准过程进行。较复杂的周期荷载如图1-1(b)，可以由往复式机械装置中的惯性力引起或者由船尾推进器所产生的流体动压力引起。



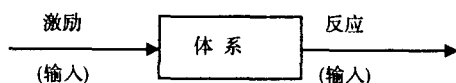
(a) 简谐荷载 (b) 复杂荷载 (c) 冲击荷载 (d) 长持续时间的荷载

图 1-1 典型动力荷载的特性及来源

非周期荷载可以是短持续时间的冲击荷载或者是长持续时间的一般形式的荷载，如图1-1(c)，(d)。爆炸引起的强大气流作用于结构是发生冲击荷载的典型例子。这种短持续时间的荷载可以用特殊的简化方法来进行分析。一般形式的长持续时间的荷载，例如由地震引起的荷载，只能用动力分析的一般方法进行分析。

1.3 三类动力问题

在动力问题中，通常把研究的对象称为**体系**。它可以是一个零部件，也可以是一个完整的结构。动荷载等引起体系发生振动的因素称为**激励(输入)**，它们作用于体系使其产生的振动运动称为**反应(输出)**。这三者构成了动力问题的三个要素，它们之间的关系可以用下面的框图来表示：



动力问题按欲求上述三要素中的某一个分为三类:

① 反应问题: 已知激励和体系, 求反应。这是工程中最常见、最基本的问题, 也是我们研究的主要内容。其主要目的是验算结构工作时的反应(位移、变形、应力等)是否满足预定的安全要求或其他要求。

② 识别问题: 已知激励和反应, 求体系。即识别体系的物理特性(如质量、刚度和阻尼系数等)。

③ 测量问题: 已知体系和反应, 求激励。例如利用加速度计或位移计测量由地震引起的地面运动就属于这类问题。

1.4 几种离散的方法

与结构分析相同, 结构动力学也需要进行数学抽象, 借助某种力学模型来研究。选择的模型要简单, 而且能反应真实体系的主要特征和性能。模型可分为两类: 分布参数体系和离散体系。实际工程结构的物理参数, 例如梁、板、轴等的质量及弹性一般是连续分布的, 保持这种特点抽象出来的模型仍具有无穷多个参数, 这样的模型体系称为分布参数体系。在绝大多数情况下, 为了便于分析, 往往需要通过适当的方法将分布参数体系“凝缩”为只有有限个参数的体系, 这就是离散体系。分析两种体系所采用的数学工具不同, 分布参数体系借助于偏微分方程, 而离散体系则借助于常微分方程。本教材只讨论离散体系。

由于两种体系所具有的自由度的数目不同, 分布参数体系又称为无限自由度体系; 离散体系则称为多自由度体系, 它的最简单情况是单自由度体系。注意, 这里指的是动力自由度, 即体系的自由度是要确定体系全部质量的位置所需要的独立坐标的数目。例如一个在 xy 平面内运动的质量需要三个坐标—— x 和 y 方向的平移和绕 z 轴(垂直于 xy 平面)的转角才能完全确定它的位置, 因此它是一个三自由度的体系。如果忽略转动惯性力, 把它看作一个质点, 则只有 x 和 y 两个方向的平移自由度。如果某个方向的位移再受到约束, 则变为一个单自由度体系。

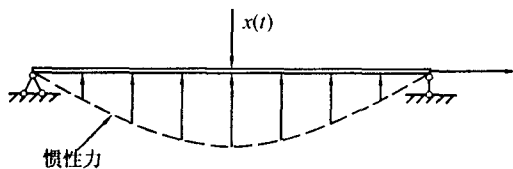


图 1-2 承受动荷载的简支梁

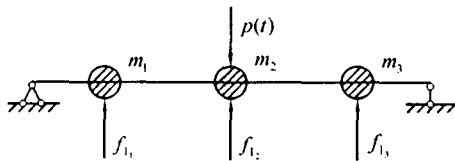


图 1-3 简支梁的集中质量理想化模型

如图1-2所示, 简支梁的质量和刚度是连续分布的, 是一个分布参数体系。每点都可以布置一个质量, 其位置至少必须用一个独立的坐标来描述, 因此体系有无穷多个自由度。为了便于分析, 需要把它“凝缩”为只有有限个自由度的离散体系。“凝缩”的过程称为离散化。离散化的方法有三种: 集中质量法、广义位移法和有限单元法。

集中质量法把结构的质量集中于一系列的离散点上, 只有这些质量点才产生惯性力, 因而只需考虑与它们有关的自由度, 使分析大为简化。图1-3就是图1-2所示简支梁的一种理想化模型。如果忽略轴向变形, 由于体系的约束, 三个质点只能在竖直方向运动, 这样体系就具有三个自由度。如果把质量看作质块, 它具有有限的转动惯量, 则需要考虑转动位移, 这样体系的自由度数不是三个而是六个(三个竖向位移和三个转动位移)。

顺便提一下, 静力问题中的自由度和前面提到的动力自由度的概念是不一样的。在静力问题中, 一个物体的自由度数定义为在不考虑应变的条件下确定该物体在空间中的位置所需要的独立参数的数目, 亦即体系的几何不变度。如图1-3所示简支梁为一个几何不变且又无多余约束的体系, 其静力自由度为零。而在动力问题中, 它却有三个或六个自由度, 因此必须区分体系的静力自由度和动力自由度数。

实际上集中质量法在处理大部分质量时, 对集中在几个离散点的结构特别有效。但是, 如果体系的质量处处都是均匀分布的, 就可利用广义位移法。它也是减少自由度的一种好方法。

广义位移法假定结构的挠曲形状可用一系列规定的位移函数 $\psi_i(x)$ 的和来表达。每一个位移函数(又称为形状函数)仅仅是位置坐标 x 的函数, 而且它必须满足结构的边界条件并保持在结构内部的连续性。所假定的位移函数的数目 n 代表所考虑的自由度数。全结构的位移表达式可写为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) Z_i(t) \quad (1-1)$$

式中 $Z_i(t)$ 称为广义坐标, 它是时间 t 的函数。作为一个简单例子, 就是用三角级数来表示图1-2所示简支梁的挠曲线, 取 $n=3$, 则

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^3 \sin \frac{i\pi x}{L} Z_i(t) \quad (1-2)$$

式中 L 为梁的长度。显然结构在某时刻的挠曲形状, 取决于该时刻广义坐标 $Z_i(t)$ 的值。

有限单元法综合了集中质量法及广义坐标法二者中的某些特点。这个方法是分析连续结构的有限元法的基础, 它提供了既方便又可靠的体系理想化模型, 对用电子计算机分析而言特别有效。

有限单元法的理想化模型适用于一切结构形式。为了简单起见, 在目前的讨论中将仅考虑一维的结构构件, 但这个方法的概念可以直接引伸到二维及三维的结构单元中去。

对任何结构, 有限单元离散的第一步是将结构分成适当数量的单元, 联结单元的端点称为节点。例如图1-4所示的梁, 其节点的位移组成结构的广义坐标, 整个结构的挠曲线可利用这些广义坐标, 并借助于一组适当的假定的位移函数, 用类似于方程(1-1)的表达式表示。但是在这种情况下, 位移函数被称为**插值函数**, 因为这些函数确定了指定节点位移之间的形状。例如图1-4画出了与具有二个自由度的节点3有关的插值函数, 这个节点在图平面内产生了横向位移和转角。原则上, 这些插值函数可以是内部连续并满足节点位移所带来的几何位移条件的任意曲线。对于一维单元, 用等截面梁中的节点位移所产生的曲线形状作为插值函数较为方便(它们是三次Hermite多项式, 且示于图1-4中)。

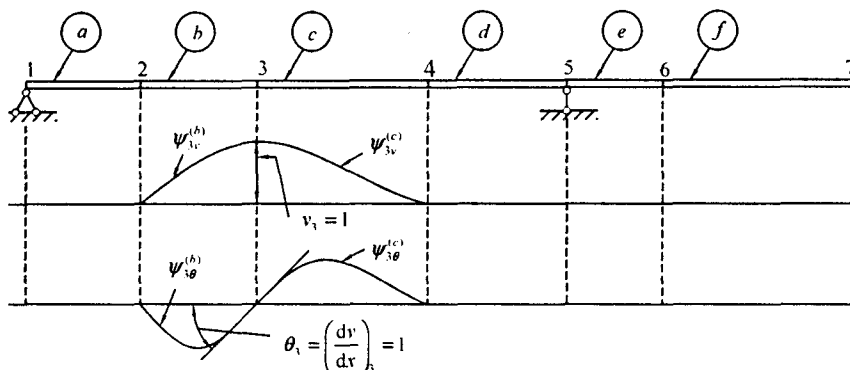


图 1-4 典型的有限单元梁坐标

因为有限单元法所用的位移函数满足广义位移法中所述的条件,所以这种方法所用的坐标应是广义坐标的一种特殊形式,它具有如下的优点:

- ① 只要把结构分成适当数量的单元,即可引入所需的任意数目的广义坐标;
- ② 每一分段所选择的位移函数可以是相同的,故计算得以简化;
- ③ 因每个节点位移仅影响其邻近的单元,所以这个方法所导得的方程大部分是非耦合的,因此解方程式的过程大大地简化。

1.5 动力体系运动方程建立的途径

如前所述,数定结构动力学的首要目的是对已知结构计算它在给定的随时间变化的荷载作用下的位移—时间过程。描述动力位移的数学表达式称为结构的运动方程,这些运动方程的解就提供了所求的位移过程。

动力体系的运动方程的建立是整个分析过程中最重要的环节。通常可用三种不同的方法建立运动方程。

1) 直接平衡法

此法的根据是达朗贝尔原理,即质量所产生的惯性力与它的加速度成正比,但方向相反。这样我们可以把运动方程表示为动力平衡方程。由此我们可以认为荷载包括许多个作用于质量上的力,即抵抗位移的弹性约束力 f_s 、抵抗速度的粘滞力 f_D 、独立确定的外荷载 $p(t)$ 以及抵抗加速度的惯性力 f_I ,而运动方程的表达式可写成仅仅是作用在质量上所有力的平衡表达式

$$f_I + f_D + f_s = p(t) \quad (1-3)$$

2) 虚位移原理

如果结构体系相当复杂,可用虚位移原理。

虚位移原理可阐述如下:如果一个平衡的体系在一组力的作用下承受一个虚位移(即体系约束所允许的任何微小位移),则这些力所做的总功将等于零。因此,在建立动力体系的运动方程时,首先要搞清作用于体系质量的所有力,包括按达朗贝尔原理所定义的惯性

力, 然后引入相应于每个自由度的虚位移, 并使所作的功等于零, 由此得到运动方程。

3) 哈密顿原理

哈密顿原理是应用广泛的一种变分原理, 此原理可表达为:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1-4)$$

式中, T 为体系的总动能, V 为体系的位能, 包括应变能及任何保守外力的势能, W_{nc} 为作用于体系上的非保守力 (如阻尼力及任意外荷载) 所作的功, δ 为在指定时间区间内所取的变分。

哈密顿原理的意义: 在任意时间区间 t_1 到 t_2 内, 动能和位能的变分加上所考虑的非保守力所作的功必等于零。哈密顿原理主要用于建立连续体的运动方程。若动能项 T 消失, 方程 (1-4) 的积分中剩余项将不随时间变化, 于是方程简化为

$$\delta(V - W_{nc}) = 0$$

这就是应用在静力分析中著名的最小位能原理。

这里, 不妨将保守力及非保守力的概念复习一下: 保守力系统实际上是机械能守恒的力学系统。若作用于某质点的场力所作的功只与质点的起始及终止位移有关, 而与中间过程无关, 此场力称为有势力或保守力, 如重力、弹性力等; 反之, 若不符合以上定义的就是非保守力, 如阻尼力、外加荷载等。