

1999 年上海大学博士学位论文 11

旋转系统内三维可压缩有旋流动正、反命题的赧势函数模型和变分方法

作者: 沈远胜

专业: 流体力学

导师: 刘高联



上海大学出版社

1999 年上海大学博士学位论文

旋转系统内三维可压缩有旋流动正、反命题的势函数模型和变分方法

作者: 沈远胜
专业: 流体力学
导师: 刘高联



上海大学出版社

· 上 海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (1999)

**Pseudo-potential Model and Variational
Method for Direct / Inverse Problems of
3-D Compressible Rotational Flow in a
Rotating System**

Candidate: Shen Yuansheng

Major: Fluid Mechanics

Supervisor: Prof. Liu Gaolian

Shanghai University Press

• Shanghai •

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：（工作单位，职称）

王伯年（上海理工大学动力学院，教授）

委员：

吴文权 凌志光

刘宇陆 夏 南

导师：

刘高联

评阅人名单:

凌志光	上海工程技术大学能源与环境研究所	200336	教授
戴世强	上海大学力学研究所	200072	教授
王道增	上海大学力学研究所	200072	教授

评议人名单:

王伯年	上海理工大学动力学院	200093	教授
吴文权	上海理工大学动力学院	200093	教授
黄艾香	西安交通大学	710049	教授
谷传纲	西安交通大学	710049	教授
陶 城	哈尔滨工业大学	150001	教授
王仲奇	哈尔滨工业大学	150001	教授
陈乃兴	中国工程热物理研究所	100080	教授
余 申	中国工程热物理研究所	100080	教授
王献孚	武汉交通科技大学	430063	教授
吴克启	华中理工大学	430074	教授

答辩委员会对论文的评语

沈远胜的学位论文《旋转系统内三维可压缩有旋流动正、反命题的赓势函数模型和变分方法》立论正确,推导无误,显示作者对气动力学,特别是对刘高联的赓势函数理论有深刻的认识和新的发展。

沈远胜运用张量分析及 Jacobian 方法详细推导了赓势函数在任意坐标系中及映象空间里的具体表达式,这为其进一步的应用奠定了坚实的数学基础,同时也充分说明沈远胜已具备扎实的数学理论基础和专业知识。

沈远胜对二维问题的赓势函数进行了更加详细的阐述和分析,从 Lagrange 空间的 Hamilton 原理出发,通过空间转换将其转换成为 Euler 空间的 Hamilton 形式。根据林家翘约束理论,需要两个林家翘约束方程及两个拉氏乘子,即需添加四个变量。沈远胜巧妙地通过数学分析与运算证明了两个拉氏乘子中一个可取为零,另一个则为涡势函数,对应于连续方程的那个拉氏乘子即为赓势函数,从而把两个林氏约束等价地变为一个约束,两个拉氏乘子也由两个变为一个,这给有限元计算带来了很大的方便。

应用上述二维问题的赓势-涡势函数模型建立了正命题的变分原理和反命题的变域变分,通过对边界项的分析构造出了未知壁面的自然边界条件,运用变分原理的解,从另一方面证明了动量方程。

针对涡势函数难处理边界条件这一情况,沈远胜构造出了三种涡势函数拟变分形式,并提出了处理边界条件的一些新方案。

为了把该理论推广到三维问题,沈远胜对三维涡势函数作了深入细致的研究与分析,进行了详细的有限元离散。

答辩委员会一致认为论文作者在本学科上已掌握了坚实的基础理论和深入系统的专门知识,已具有独立从事科学研究的能力。论文已达到博士学位论文水平,在理论分析上有一定的创新性。答辩时,回答定位正确。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票（五票）同意论文答辩通过，建议授予博士学位。

答辩委员会主席：**王伯年**

1999 年 4 月 16 日

摘 要

本文由三部分组成: (一) 系统地建立了理论上严密、适用范围普遍的三维无粘有旋流动模型——赝势函数模型; (二) 建立了二维定常有旋流动正、反命题的赝势-涡势函数变分原理及引入映象平面, 导出了赝势函数在映象平面的方程; (三) 建立了三维涡势函数三拟变分形式。

本论文的内容概括如下:

依据缩项法则以张量的形式引入了三维可压缩流动的赝势函数-涡势函数模型。这一模型不仅保持了势函数的主要特点, 而且适用于有旋流动, 同时还具有物理上的相容性, 是势函数向有旋流动的合理推广。除此之外它还克服了由于忽略跨声速流动中激波后的熵增而引起的守恒型势函数解的不唯一性。

详细的推导了在任意曲线坐标下赝势函数、涡势函数和滞止焓函数表示的气动力学方程组, 在圆柱坐标系下各有关方程的具体形式可作为特例而得出。为了适应物理界面形状的复杂性而引入了贴体曲线坐标系及相应的映象空间, 推出了各方程在该空间中的具体形式。

建立了二维定常流动的赝势函数-涡势函数模型的正命题和反命题的严格的完整的变分原理, 从而为求解二维定常有旋流动(特别是跨声速流动)奠定了严密的理论基础。

详细探讨了三维涡势函数方程的三种拟变分形式, 并就第三种情况提出了涡势函数边界条件。所有这些为其进一步的应用奠定了坚实的理论基础。

关键词 赝势函数, 涡势函数, 滞止焓, 正问题, 反问题, 变分原理, 变域变分

Abstract

The present dissertation consists of three parts: (1) The pseudo-potential function model for 3-D inviscid rotational rotor flow is systematically established, which is theoretically rigorous and generally applicable; (2) The Variational Principles for 2-D compressible rotational flow using pseudo-potential model encompassing pseudo-potential function and vorticity-potential function are established, and the basic aerodynamic equations in terms of the pseudo-potential function are derived in image-plane; (3) Three kinds of quasi-variational formulation for 3-D vorticity-potential model are established.

The main work of the thesis can be outlined as follow:

The pseudo-potential function and vortex potential functions are derived by means of the term-condensing method, this model not only remains the basic advantages of potential function model, but also applies to the rotational flow. It is a physically self-consistent model and is a rational extension of the potential function to rotational flow. It removes the non-uniqueness of the potential function solutions at transonic speeds due to ignoring entropy gradient behind the shock.

The general form of the fundamental equations of aerodynamics in terms of the pseudo-potential function, the vortex potential function and the enthalpy are derived in the general non-orthogonal

curvilinear coordinate system by means of both tensor calculus and Jacobians. To facilitate the numerical solution, an image-space based on a body-filled curvilinear coordinate system is introduced .

Using the pseudo-potential function, Variational principles for direct and inverse problems of 2-D steady rotational compressible flow are developed rigorously.

Three alternative formulations for the vortex-potential equations are provided .

All these lay a firm theoretical basis for its application to computational fluid dynamics .

Keywords: pseudo-potential function, vorticity-potential function, rothalpy, direct problem, inverse problem, variational principle, variational domain variational principle

目 录

第一章	引 言	1
1.1	研究背景	1
1.2	研究现状	1
第二章	全三维非定常、可压缩、无粘有旋流动的流势函数及在任意坐标下的表达式	8
2.1	流势函数的引入及其基本方程	9
2.2	流势函数模型的气动方程组在任意曲线坐标下的普遍形式	15
2.3	流势模型在直角坐标下的表达形式	27
2.4	流势模型在柱坐标系下的表达形式	28
2.5	流势模型在映象空间内的表达形式	34
2.6	小 结	46
第三章	2-D 有旋流动正、反命题的流势-涡势函数变分原理	47
3.1	流势-涡势函数流动模型	48
3.2	二维有旋流动（定常、无粘）的流势函数正命题变分原理的建立	50
3.3	二维有旋流动（定常、无粘）的流势函数反命题变分原理的建立	56
3.4	小 结	61

第四章 3-D 管道内有旋流动的势函数解法	62
4.1 基本气动方程	63
4.2 方程的离散化	65
4.3 小 结	86
第五章 结论与展望	87
参考文献	89
致 谢	95

第一章 引言

1.1 研究背景

对已知叶型的叶栅进行流动的分析计算（正问题计算），这在预测性能和筛选试验方案等方面是有重要价值的。在这方面人们发展了流线曲率法、势函数法、流函数法、Euler解及Euler加边界层解等方法。然而对于叶型设计，更直接的需要则是反问题的计算，即预先规定叶型表面的气流参数分布，通过计算得出相应的叶型几何尺寸。虽然，叶剖面形状的确定往往需要综合考虑气动性能、强度和制造工艺等各方面的因素，以致使得一个完整的叶型设计问题的解决变得相当复杂，但是，利用反问题的求解技术，部分地解决跨音叶型设计，特别是叶片的改型设计问题，则是一个比较现实而有工程使用意义的课题。例如，某一叶栅经试验或分析计算证明，其表面压力分布不符合要求，应当如何局部地修改叶型以满足设计指标？这样的问题，就不难借助反问题和杂交命题的技术予以解决。

1.2 研究现状

反、杂交性问题已提出几十年了，但由于各种客观原因的限制使得它踟躇不前。然而近几十年来，由于科学技术的迅速发展对叶轮机械的性能不断地提出新的、更高的

要求, 而高速度大容量电子计算机的发展使得利用计算机设计高效率叶片成为现实, 并且各种各样的计算方法应运而生. 因而建立一套行之有效的计算反、杂交问题的方法已成为各国科技人员孜孜以求的目标. 为此他们付出了大量的心血, 取得了巨大的成就, 也从而开创了一种“百花齐放, 百家争鸣”的局面.

反问题的研究可以追述到本世纪 50 年代, 此时 Wu 和 Brown^[1]就提出了中心流线法. 此后人们在这一领域从不同的角度, 采用不同的方法, 展开了广泛的研究, 先后形成了映象平面法、变分原理法、变域变分法等. 现将各方法叙述如下:

(1) 映象平面法

刘高联^[2,3,4]于 1964 年、1967 年、1974 年分别针对不同的几何形状提出了叶栅反命题的映象平面法. 此法是针对物理平面几何形状的未定性和复杂性而引入的, 用它所求出的叶形既能准确地达到预定的叶厚分布, 又能准确地给出预定的凸叶面上的流速分布. 在文献[5]中利用映象平面的特点, 将旋成面叶栅气动正命题的微分-积分解法与叶型修正的“喷气模型”结合起来, 建立了一种适用于旋成面叶栅气动反命题的新解法.

(2) 变分原理法

在文献[6,7]中刘高联分别建立了适用于轴流式和径流式叶轮机 S_2 流面半反命题和 A 型杂交命题的变分原理族, 而在文献[8-10]中系统地给出了旋成面叶栅各类气动杂交型命题的变分原理族.

(3) 变域变分法

刘高联在成功地引入变域变分^[11,12]工具捕获激波的同时,又成功地将其推广到了全三维不可压^[13]、可压^[14]及跨音速流动^[15]的杂交性问题当中,从而解决了许多看似不可能解决的问题.又在文献[16]中,应用变域变分工具成功地解决了反命题的未知型面问题.

(4) 其他方法简述

解决反问题的方法是多种多样的,除上面提到的方法外人们还根据不同情况进行了深入的研究,提出了不同的方法.如:

在不考虑粘性的条件下, Schmidt^[17]于 1979 年根据势流流动的特点,在无旋流假定的基础上提出了二维势流的算法.沈孟育等^[18]针对流动中时常出现的跨声流动的问题于 1983 年提出了正反混合问题的解法.刘高联^[19]于 1984 年提出了旋成面叶栅一些杂交气动命题的新解法.如对 C 型杂交命题,给出微分积分方程方案,在上述基础上给出了 A 型、D 型杂交命题的通用解法.此外,还给出了反命题的通用解法.刘高联^[20]于 1985 年提出了旋转叶轮内完全三元可压缩势流各类杂交命题通用理论与解法,给出了通用解法(1)与通用解法(2).姚征等^[21]于 1984 年对矩函数型 A, B 类杂交命题作了有限元分析,在此基础上,姚征等^[22]又对周角函数型 A, B, C 三类杂交命题作了有限元分析,并建立了对离心、轴流式叶栅通用的计算方法和程序.基于吴仲华教授的三元流动通用理论,葛满初等^[23]提出在轴流式叶轮机械中,给定子午通道内外边界速度分布和全场环量,求解通道内外壁几何边界的方法.蔡睿贤^[24,25]对吴仲华教授创

立的中心流线法提出了解析解新方案, 它可以用来求解叶栅完全反问题. 虽然本法的缺点是算不准叶型前后缘, 但它可以以足够精度由规定的叶栅前后远方状态、中心流线的形状及流速直接解出叶栅. 陈乃祥等^[26]在周向均匀、流动无粘性、叶片无厚度假设条件下, 用涡代替叶片作用, 采用 Clebsch 转换得到流速表达式, 在轴面上给定环量分布的条件下进行转轮叶片设计, 在得到所设计叶片的同时, 可知该叶片作用下的在所述条件下的流场. 这种方法既可使所设计的叶片同时满足连续方程和运动方程, 又可在整个轴面上给定速度矩, 与文献[27, 28]提到的方程相比具有更大的灵活性和实用性, 有利于转轮叶片的优化设计. 又因在求解过程中采用边界适应坐标, 多变量合并及稀疏矩阵压缩等方法, 使设计得以在计算机上实现. 刘秋生等^[29]将文献[18]提出的平面叶栅跨声速流动的正、反混合问题推广到三维流动的情况, 其中的反问题既能计及叶片的气动性能, 又能在一定程度上兼顾强度、冷却、工艺等方面的要求, 同时由于设计了一种适合叶轮机械中三维流动特点的广义 von Mises 坐标系, 克服了反问题所特有的不定求解域边界的困难, 因而成功地将三维正问题分析、叶片的完全三维设计、以及三维叶片的局部改型融合于一个统一的算法之中, 使所编制的程序的功能十分宽广和灵活. 在构造广义 von Mises 坐标系中, 采用了流线支配方程组的旋转差分格式, 因而使之能满意地应用于具有大扰动的跨声速流动计算.

在考虑粘性作用条件下的正、反杂问题方面人们也做了大量的工作. 葛满初等^[30]于1987年在研究了 S_1 流面反问题的计算方法, 用分区的物理模型发展了边界层反问题、无粘和有粘的两步求解方法以及两种不同的求解过程. 王正明^[32]在无粘反问题和