文科类

GAO DENG

SHU XUE

高等数学

华东师范大学数学系　编

华东师范大学出版社

高等数学

（文科类）

华东师范大学数学系 编

华东师范大学出版社

(沪) 新登字第201号

高 等 数 学

(文科类)

华东师范大学数学系　编

华东师范大学出版社
(上海中山北路3663号)
新华书店上海发行所发行　华东师范大学数学系电脑排版
常熟高专印刷厂印刷
开本: 850 × 1168　1/32　　印张: 9.5　　字数: 240千字
1993年5月第一版　　　　1993年5月第一次印刷
印数: 0001—2,000本
ISBN 7-5617-0899-8/O·024　　定价: 5.65元

前　　言

我们这套高等数学系列教材是为满足大学文、理各系科对数学不同层次的要求而编写的. 全书分以下三种:

物理、电子、计算机系等 (上、下二册约230课时);

化学、生物、地理系等 (上、下二册约190课时);

文科类 (一册约115课时).

此教材主要适用于高等师范院校各有关专业, 也可作为其他高等学校相近专业的教材或参考书之用.

前两种 (各两册) 的编者为杨庆中、谢寿鑫、魏国强; 文科类 (一册) 的编者为蒋鲁敏、王继延、赵小平. 由毛羽辉、黄丽萍负责组织编写和修改定稿工作.

《高等数学》编写组

一九九二年三月

《高等数学(文科类)》编写说明

随着现代科学技术的迅速发展，文科和理科之间的相互渗透、相互促进已成为学科发展的一个新特点. 在经济学、教育学、心理学、图书情报学甚至人文、历史等领域，数学已成为收集资料、分析数据、探讨理论的一种重要工具. 这种趋势，迫切要求文科学生懂得一些自然科学特别是高等数学的基础知识.

综观目前国外大学的教学，许多学校已为文科学生开设了高等数学的课程. 但到目前为止，国内尚缺少适应文科学生特别是师范院校文科学生需要的教材. 本书就是为了弥补这一不足而写的.

我们认为，为文科学生编写的高等数学教材，要体现微积分的基本思想，反映出其中辩证法思想的精髓；要结合文科有关专业的需要，贯彻学以致用的原则；要适合文科学生原有的基础，适合他们的阅读习惯；要和中小学的教学内容有一定的联系，使他们既能加强原有的数学知识，又对中小学数学教育有一个居高临下的概观. 因此，我们在编写本教材时，一方面力求和现在科技发展相适应，为有关的后继课程打好基础，另一方面是要改变现有文科学生的知识结构，提高他们的文化素质，以适应新的形势.

在教材内容方面，首先对传统的微积分教材进行了删繁就简，按文科专业的要求对内容进行了调整，尽可能具有文科专业的特色. 在理论的陈述及论证等方面，避免了过去的符号化，力图使语言形象、准确. 在每节后附加了思考题，以开阔思路，加深对正文的理解. 在每章后还附有自测题，这些自测题较全面地反映了教学大纲的要求. 考虑到统计学等后继课程的要求，又适当引进了广义积分等内容.

在本书编写过程中得到了河南师范大学陈欣高、山西大学郭跃鹏、湘潭大学陈淑君、苏州铁道师范学院魏武、聊城师范学院张则增等同志的支持和帮助, 在此一并致谢.

编　者

一九九二年三月

目　　录

第一章 函数

§1 函数概念

一、数集和区间

我们常常要考察现实世界中某些事物组成的总体，例如一个学校的学生、一批产品、一个圆内所有的点或是不大于100的自然数等等．在数学中把满足某种条件的事物的总体称为**集合**．上面列举的事物各自组成了集合．

集合通常用A, B, C等大写字母表示；集合中的元素通常用$a, b, c, \cdots, x, y, z$等小写字母表示．"a是A的元素"通常也说成"a属于A"，记作$a \in A$．

特别地，元素都是实数的集合称为**数集**．例如，全体实数组成的集合，通常称为**实数域**；方程$x^2 - 5x + 6 = 0$的根组成的集合，仅由2和3两个数组成，记作$\{2,3\}$；全体自然数组成的集合，记作$\{1,2,3,\cdots\}$；满足不等式$x-3>0$的所有x组成的集合，它是由所有大于3的实数组成，记作$\{x \mid x>3\}$．

最常用的实数集是区间．设a, b是两个实数，且$a<b$：

满足不等式$a \leqslant x \leqslant b$的所有$x$组成的数集称为**闭区间**，记作$[a,b]$；

满足不等式$a<x<b$的所有x组成的数集称为**开区间**，记作(a,b)；

满足不等式$a<x \leqslant b$或$a \leqslant x<b$的所有x组成的数集称为**半开半闭区间**，分别记作$(a,b]$及$[a,b)$．

在以上各种区间中，a、b分别称为区间的左、右**端点**，差$b-a$称为区间的**长度**．

有时要考虑满足$x \geqslant a$或$x \leqslant b$的所有x组成的数集, 这种数集称为无穷区间, 用$[a,+\infty)$或$(-\infty,b]$表示; 类似地, $(a,+\infty)$或$(-\infty,b)$分别表示满足$x > a$和$x < b$的x组成的数集; $(-\infty,+\infty)$则表示实数域.

我们知道, 实数和数轴上的点一一对应, 于是一个数集和数轴上相应的点组成的点集之间构成一一对应关系. 各种区间都可以用相应的线段、射线或直线表示 (图1-1).

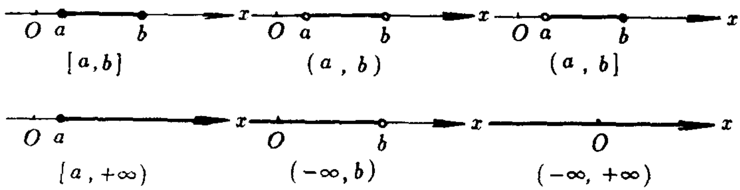

图 1-1

二、常量和变量

现实世界里存在着各种各样的量, 例如长度、体积、温度、气压、产值、价格、入学率、就业率以及增长指数、百分比、浓度……等等, 它们在各个具体的问题中, 可按其值是否变化而分成两类: 一类量在某个过程中始终保持恒定不变的数值 (或者有极微小变化而不必计较者), 称之为常量, 通常用字母$a,b,c\cdots$表示; 另一类量在某个过程中其数值是变化的 (或是可以变化的), 称之为变量, 通常用字母$x,y,z\cdots$表示.

例1 圆周与其直径的比 (圆周率) 是个不变的量, 即常量$\pi = 3.1415926\cdots$. □

例2 设a表示某个学校1992年以前毕业的学生数, x表示1992年以后毕业的学生数, 由于a是一个确定的数, 故为常量; 而x因逐年增加, 故为变量. □

例3 设x表示某图书馆的藏书总数. 当考察这个图书馆历年的藏书情况时, x一般会有不同的数值, 故是变量. □

例 4 用一根4米长的钢筋弯成一个矩形框架. 在考虑如何使矩形框架的面积为最大的问题时, 框架的周长为一常量, 而长、宽、面积这些量都是变量. □

例 5 一笔银行存款的本金与利率都是常量, 而利息则是变量(随存款时间而变). □

变量所有可能取的值组成一个数集, 我们称这个数集为变量的变化范围或变域. 在例4中, 如果规定矩形的宽不大于长, 则仅当宽 $x \leqslant 1$ 时, 4米长的钢筋才能弯成一个满足要求的矩形框架, 所以 x 的变域是 $(0,1]$.

应该注意到, 常量和变量有时是可以互相转化的. 同一个量在不同的场合、不同的条件下可以有不同的解释. 例如银行的利率根据国家有关政策和存储期等因素, 可以取不同值. 储户在选择储蓄形式时, 利率是个变量; 但是, 一旦确定了某一储蓄形式, 利率就是一个常量. 有时, 我们也把常量当作一个特殊的变量——变域只含一个值的变量, 这给问题的处理带来了方便.

三、函数定义

我们在研究一个数学问题时, 不仅要弄清有哪些常量和变量, 更重要的还要研究这些量之间存在着的关系. 例如在例4中, 若以 x、y 和 z 分别表示矩形的宽、长和面积, 则它们和周长 $l\ (=4)$ 之间存在关系:

$$y = \frac{1}{2}(l-2x) = 2-x,$$

$$z = xy = x(2-x).$$

当 x 在其变域 $(0,1]$ 内任取一个值时, y 和 z 分别有完全确定的值与之对应. 这种对应关系就是函数. 一般地. 我们引进下面的函数定义.

定义 设有两个变量 x 和 y, x 的变域为 A. 若对于 A 中任意给定的一个 x 值, 按照某一规则 (用记号 f 表示这个规则), 都有唯一确定的实数值 y 与所取的 x 相对应, 这时我们称此对应规则 f 是定义在 A 上的一个**函数**, 记为

$$y = f(x),\ x \in A.$$

其中x称为自变量, A称为定义域, y称为因变量或函数值, 对应规则f也称为y与x之间的函数关系; 当x取定义域A中的一切值时, 与之对应的所有函数值y的集合

$$B = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\}$$

称为函数的值域.

在上面的例子中, 矩形宽度x是自变量, 面积z是因变量, 定义域是$(0, 1]$; 自变量与因变量之间的对应规则f是通过$z = x(2 - x)$这个运算式表示出来的: 当x给出后, 将x与$2 - x$相乘即可确定z的值.

最通俗的函数定义对函数f与函数值$f(x)$并不加以区分, 而笼统地称"函数$f(x)$"或"函数y".

下面再举一些例子, 来具体认识函数概念.

例6 正方形的面积x和它的边长y的关系是

$$y = \sqrt{x}.$$

其中x是自变量, y是因变量, 定义域是$(0, +\infty)$, 对应规则是: 给出x后, 取x的算术平方根即得到因变量y的值. □

例7 已知华氏温度y和摄氏温度x之间的函数关系为

$$y = ax + b,$$

并从温度计上读得$0°C$相当于$32°F$, $50°C$相当于$122°F$, 试确定上述函数式中的常数系数a与b, 以及定义域.

解 分别以$x_1 = 0$, $y_1 = 32$和$x_2 = 50$, $y_2 = 122$代入, 得

$$b = y_1 = 32,\ a = \frac{1}{x_2}(y_2 - b) = \frac{90}{50} = \frac{9}{5}.$$

因此所求的函数关系为

$$y = \frac{9}{5}x + 32.$$

在这个函数关系中, 以摄氏温度x作为自变量, 华氏温度y作为因变量. 按物理理论, 现实世界的温度都不可能达到或低于$-273°C$, 从而函数的定义域为$(-273, +\infty)$. □

例 8 心理学家在试验中发现, 一个被试验者经过x小时的学习后, 所记忆的无意义单词数y由公式

$$y = 126\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{3}}\right]$$

给出. 在这个函数关系中, 小时数x为自变量, 单词数y为因变量. 定义域是$(0, +\infty)$. □

例 9 公共交通公司规定: 不超过1.20米的儿童免票, 超过1.20米的乘客应购票. 设票价为0.20元, 若以乘客的身高h (米) 作为自变量, 应付的车费p (元) 作为因变量, 它们之间的对应规则可表示为

$$p = \begin{cases} 0, & 0 < h \leqslant 1.20, \\ 0.20, & h > 1.20. \end{cases}$$

这个函数在自变量的不同范围内有不同的对应规则, 这类函数称为**分段函数**. □

分段函数在日常生活中并不少见, 如乘车站数与票价之间的关系, 信件重量与邮资之间的关系等都是分段函数的典型例子.

例 10 一昼夜中气温T随时间t而变化. 图1–2是气温自动记录仪记下的某天的温度曲线. 这里, 函数关系是利用气温曲线给出的. 时间t是自变量. 温度T是因变量, 定义域是$[0, 24]$. □

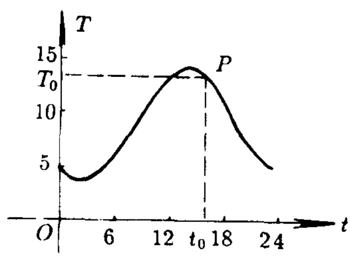

图 1–2

用曲线给出函数关系的例子还有许多: 水位曲线, 心电图等等.

例 11 把一张很大的纸对半撕开变成两张, 把这两张纸重叠后再对半撕开变成四张, 如此重复, 得到每次撕纸后的张数p和撕纸次数n之间的函数关系

$$p = 2^n.$$

这里n是自变量, 它的定义域是正整数$\{1, 2, 3, \cdots\}$. □

在一个函数中, 其函数关系除了用运算表达式或直角坐标系中的曲线表示外, 还可以用表格表示. 例如学生的成绩登记表就是一个简单的例子: 其中学生的学号看作是自变量, 其成绩就是对应的函数值.

f是函数对应规则的记号. 在同一个问题中, 不同的对应规则应该用不同的记号表示, 例如, $f(x) = x^2$, $g(x) = x - \sin x$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -1 < x \leqslant 0, \\ 2x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

在实际问题中, 函数的定义域是由自变量的实际意义来确定的. 如在例6中, 当$x \leqslant 0$时, x就不再能表示一个正方形的面积 (尽管$x = 0$对于算式$\sqrt{x}$仍有意义), 因此该例中函数的定义域取为$(0, +\infty)$; 而当函数仅由一个具体算式给出并无直接的实际意义时, 定义域就是使该算式有意义的那些自变量的值所成的数集.

例 12 试确定下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$; (2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$;

(3) $y = \log_2(1 - x^2)$; (4) $y = \operatorname{tg}(2x)$;

(5) $y = \arcsin(3x)$;

(6) $y = \log_5(x + 1) + \sqrt[4]{1 - x}$.

解 (1) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{(x - 3)(x + 1)}$, 当且仅当$x \geqslant 3$或$x \leqslant -1$时, 根式内的二次三项式$x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$. 故其定义域为

$$A = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty).$$

(2) 当且仅当$x \neq 3$, $x \neq -1$时, 分式的分母不为零. 故其定义

域为

$$A = \{x \mid x \neq 3,\ x \neq -1\}$$
$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty).$$

(3) 因对数的真数必须大于零, 故由$1 - x^2 > 0$, 即$x^2 < 1$, 可知此函数的定义域为

$$A = \{x \mid |x| < 1\} = (-1, 1).$$

(4) 当且仅当一个量不等于$\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 时, 这个量的正切才有意义, 因此对于$y = \operatorname{tg}(2x)$来说, 必须使

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{即}\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

满足此要求的一切x构成$y = \operatorname{tg} 2x$的定义域.

(5) 当且仅当一个量的绝对值不超过1时, 这个量的反正弦 (或反余弦) 才有意义. 由此可知, 要使$y = \arcsin(3x)$有意义, 只须$|3x| \leqslant 1$, 即$|x| \leqslant \frac{1}{3}$. 所以此函数的定义域为

$$A = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

(6) 函数表达式由若干项组成时, 则它的定义域是各项定义域的公共部分. 因为第一项$\log_5(x+1)$的定义域为$x > -1$, 第二项$\sqrt[4]{1-x}$的定义域为$x \leqslant 1$, 所以两项之和的定义域为

$$A = (-1, +\infty) \cap (-\infty, 1] = (-1, 1]. \quad \square$$

综上所述, 定义域和函数关系是确定函数的两要素. 只有当定义域和函数关系都相同时, 两个函数才被认为是等同的函数. 例如$y = |x|$和$y = \sqrt{x^2}$所确定的函数, 由于它们的定义域都是$(-\infty, +\infty)$, 而对于每一个给定的x, 它们所对应的函数值都相等, 所以尽管它们的表达式不同, 但还是等同的函数. 同样, 虽然$f(x) = \sin x$和$g(t) = \sin t$记号不一样, 但也是同一个函数. 再如$f(x) = \frac{x}{x}$与$g(x) = 1$, 由于前者的定义域为$x \neq 0$的一切实数, 而后者的定义域为一切实数, 所以这是两个不同的函数.

由例10可以看出，由曲线来表示的函数能给人以直观的印象. 如果函数$y = f(x)$是以一个算式给出的，我们一般可以在直角坐标平面上用描点作图法画出这个函数的图象.

思考题

1. 在函数概念中你能对以下论断加以说明吗?

(1) 函数概念体现了事物之间互相联系、依赖和制约的关系;

(2) 函数图象体现了形和数的统一，其中关键是坐标系的引入.

2. 在中学数学里我们已学过等差数列和等比数列. 试以下面两个数列为例，说明它们可以看作一种特殊形式的函数; 说明它们的定义域、对应规则和图象特征:

(1) $1, 3, 5, 7, \cdots$;　　(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots$.

习　题　1.1

1. 具体说明下列各数集的元素是什么?

(1) $\{x \mid x^2 = 0\}$;　　(2) $\{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0\}$;

(3) $\{x \mid x = 2n,\ n \text{是整数}\}$;　　(4) $\{x \mid x^2 - 5x - 6 > 0\}$.

2. 用区间表示x的取值范围:

(1) $2 < x \leqslant 6$;　　(2) $x \geqslant 0$;

(3) $x^2 < 9$;　　(4) $|x - 3| \leqslant 4$.

3. 设数轴上点A与B的坐标分别为a和b, C是A与B之间某一点，其坐标为c. 若

(1) $AC = CB$;　　(2) $AC = 2CB$;

*(3) $AC = \lambda CB$,　$(\lambda > 0)$,

试分别用a与b来表示c.

*4. 对下列区间I_1与I_2，分别求它的交集与并集，并在可能情况下用区间来表示:

(1) $I_1 = [-2, 3)$, $I_2 = (1, 4)$;

(2) $I_1 = (-\infty, -2)$, $I_2 = (0, +\infty)$;

(3) $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [b, c)$;

(4) $I_1=(a,b)$, $I_2=(b-1,b+1)$.

5. 各举两个变量和常量的实际例子, 并说明它们的取值情况.

6. 举例说明: 某些量在一种情况下被解释为变量. 而在另一种情况下却被解释为常量.

7. 已知$f(x)=3x^2+4$. 求

(1) $f(10)$; (2) $f(b^2)$; (3) $f\left(\dfrac{1}{1+t}\right)$.

8. 判别下列函数是否相同, 并说明理由.

(1) $y=\lg x^2$ 和 $y=2\lg x$; (2) $y=\dfrac{x^2}{x}$ 和 $y=x$;

(3) $y=\dfrac{1}{2}x$ 和 $u=\dfrac{1}{2}x$; (4) $y=x$ 和 $y=|x|$;

(5) $y=2x$ 和 $x=\dfrac{y}{2}$.

9. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x+1}$; (2) $y=\sqrt{x^2-4}$;

(3) $y=\sqrt{1-4x^2}$; (4) $y=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$;

(5) $y=\sqrt{x^2}+1$; (6) $y=\sqrt[3]{1-x^2}$;

(7) $y=\lg(x-1)$; (8) $y=\arcsin(5x)$;

(9) $y=\operatorname{ctg}(8x)$; (10) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}$;

(11) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\lg(4x)$; (12) $y=\lg(\lg x)$.

10. 用600公尺长的篱笆围一个矩形的露天仓库, 取宽为自变量, 所围面积为函数, 写出函数表达式、并指出这个函数的定义域.

11. 油漆一个无盖的棱长为3公尺的正方体容器的内表面. 若油漆单位底面积的价格是油漆单位侧面积的价格的两倍, 写出油漆总费用与单位侧面积价格的函数关系.

12. 某水泥厂销售水泥, 顾客购买量不超过800吨时, 按每吨80元的零售价销售; 超过800吨时, 超过部分按零售价的百分之九十销售. 写出总销售价与购买量之间的函数关系, 并作出函数图象.

13. 当某种半导体收音机的售价为每台50元时, 市场的需求量为4万台, 而工厂的供应量为3万台. 倘若售价每提高2元, 市场需求就减少4000台, 而工厂的供应量提高5000台.

(1) 写出需求量与价格的函数关系;